ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Научная статья

УДК 519.716

DOI: 10.18101/2304-5728-2021-2-3-16

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА ДВА ES_1^* -ПРЕДПОЛНЫМ МНОЖЕСТВАМ

© **Пантелеев Владимир Иннокентьевич**

доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой алгебраических и информационных систем
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
vl.panteleyev@gmail.com

© **Тагласов Эдуард Станиславович**

магистрант,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
taglasov1@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются мультифункции на двухэлементном множестве вместе с операторами суперпозиции и разветвления по предикату равенства. При суперпозиции особая роль отводится пустому множеству, которое интерпретируется как «поломка». При отсутствии «поломок» выбираются общие элементы при всех возможных уточнениях. Множество общих элементов объявляется значением суперпозиции. Если общих элементов нет, то значением объявляется множество элементов, встречающихся при всех возможных уточнениях. Относительно введенной суперпозиции и оператора разветвления по предикату равенства описаны все предполные множества, сформулирован и доказан критерий полноты. Предполные множества описаны на языке сохранения предиката функцией. Выполнена классификация мультифункций относительно принадлежности предполным множествам. При помощи компьютерного поиска для каждого класса приведены примеры мультифункций.

Ключевые слова: мультифункции; частичные функции; гиперфункции; замкнутые классы; E-замыкание; полные множества; классификация; предполные множества.

Для цитирования

Пантелеев В. И., Тагласов Э. С. О принадлежности мультифункций ранга два ES_1^* -предполным множествам // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 2. С. 3–16.

Введение

Теория гиперопераций — операций, которые отображают наборы элементов из множества A в непустые подмножества A , берет начало в 30-х годах прошлого века, когда Ф. Марти [6] определил гипергруппы, начал анализировать их свойства и применять их к группам, рациональным дробям и алгебраическим функциям. Под гипергруппой понималось множество A с бинарной операцией умножения $(a, b) \rightarrow ab$, сопоставляющей любой паре элементов из A непустое подмножество в A .

Наряду с изучением гиперструктур стали активно изучаться и алгебры (частичных) гиперопераций. При этом отдельно выделяют алгебры операций и алгебры частичных операций [4; 5]. Операции на множестве понимаются в обычном смысле, а частичные операции отображают наборы элементов из множества A в элементы множества A , но, возможно, и в пустое подмножество A . Отождествив одноэлементное подмножество $\{a\}$ с элементом a , можно говорить об алгебрах операций, частичных операций и гиперопераций как подалгебрах алгебры частичных гиперопераций. Стоит заметить, что наряду с терминами «операция», «гипероперация» в литературе используются и термины «функция», «гиперфункция»¹. Мультифункции возвращают в качестве своих значений подмножества (в том числе и пустое) множества, на котором они заданы.

Мультифункции рассматриваются, как правило, вместе с операцией суперпозиции. При изучении функциональной системы «мультифункция, суперпозиция» возникают две существенные проблемы.

Первая связана с тем, что для внешней функции суперпозиции набором значений переменных является набор значений внутренних функций, т. е. набор подмножеств. A на наборах из подмножеств внешняя функция не задана. Поэтому необходимо ввести определение, по которому мультифункции можно вычислять на таких наборах. Соответствующее определение можно вводить разными способами в зависимости от интерпретации подмножеств.

Вторая проблема связана с тем, что операция суперпозиции приводит к счетным или континуальным множествам замкнутых классов. Поэтому интерес вызывают операторы, которые приводят к конечным классификациям. Одним из таких является оператор, где наряду с суперпозицией рассматривается операция разветвления по предикату равенства [1; 2; 7].

В представленной работе рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве, вводится ES_l^* замыкание, описываются предполные множества и приводится классификация мультифункций относительно принадлежности предполным множествам.

¹ Вместо термина «частичная гиперфункция» мы, следуя [8], используем термин «мультифункция».

1 Основные определения

Множества мультифункций ($\mathcal{M}$), гиперфункций ($\mathcal{H}$), частичных ($\mathcal{O}^*$) и всюду определенных ($\mathcal{O}$) функций на конечном множестве A определяются следующим образом: пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= \{f \mid f: A^n \rightarrow 2^A\}, \quad \mathcal{H}_n = \{f \mid f: A^n \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}\}, \\ \mathcal{O}_n^* &= \{f \mid f: A^n \rightarrow A \cup \{\emptyset\}\}, \quad \mathcal{O}_n = \{f \mid f: A^n \rightarrow A\}, \\ \mathcal{M} &= \bigcup_n \mathcal{M}_n, \quad \mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n, \quad \mathcal{O}^* = \bigcup_n \mathcal{O}_n^*, \quad \mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n.\end{aligned}$$

Для мультифункций обычное определение суперпозиции

$$g = f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

не позволяет, в общем случае, вычислить значение g на наборе $(a_1, \dots, a_m)$ элементов множества A .

Это связано с тем, что набор

$$(f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$$

является набором подмножеств, на котором внешняя функция f не задана.

Поэтому для того чтобы суперпозиция определяла мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$, определим ее значения на наборе $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ следующим образом.

Пусть $B_i = f_i(a_1, \dots, a_m) \subseteq A$, для $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

- $g(a_1, \dots, a_m) = \emptyset$, если $B_i = \emptyset$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ или для некоторого набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ($\beta_i \in B_i$) выполняется $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = \emptyset$;
- иначе

$$g(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_1 \in B_1, \dots, \beta_n \in B_n} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_1 \in B_1, \dots, \beta_n \in B_n} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Определенную таким образом суперпозицию будем обозначать S_f^* .

Введение S_f^* -суперпозиции связано со следующей интерпретацией.

Для набора $(B_1, \dots, B_n) \in (2^A)^n$, где $B_i \neq \emptyset$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, уточнением называется набор $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ($\beta_i \in B_i$).

То, что функция на некотором наборе возвращает пустое подмножество ($\emptyset$), понимается как «поломка». А если «поломки» нет, то находятся общие элементы при всех уточнениях. Если же общих элементов нет, то в качестве значения функции берется множество элементов, которые встречаются при всех возможных уточнениях.

Замечание 1. S_I^* -суперпозиция фактически доопределяет множество мультифункций, задаваемых на множестве A , до функций на множестве 2^A . Стоит заметить, что множество определенных таким образом функций не замкнуто относительно суперпозиции функций.

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

В работе множеством, на котором задаются мультифункции, является множество $E_2 = \{0, 1\}$. Для этого множества используем обозначение «—», а для пустого множества — обозначение «*». Множество, состоящее из одного элемента, не будем отличать от элемента этого множества. Наряду с термином «мультифункция» будем использовать и термин «функция».

Определим ES_I^* -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных, S_i -суперпозиции и разветвления по предикату равенства. ES_I^* -замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$. Мультифункции, отличающиеся только фиктивными переменными, будем обозначать одинаковыми символами.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием, называется ES_I^* -замкнутым классом. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ порождает ES_I^* -замкнутый класс Q (ES_I^* -полно в классе Q), если $[R] = Q$. При $Q = M_2$ говорим о полных множествах.

Множество $R \subseteq Q$ называется предполным в M_2 , если ES_I^* -замыкание R отлично от M_2 , но ES_I^* -замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с M_2 для любой мультифункции $f \notin R$.

В соответствии с замечанием 1 на мультифункции переносим понятие сохранения предиката функцией. Множество мультифункций, сохраняющих предикат R , обозначим как $\text{Pol } R$.

Замечание 2. Если m -местный предикат R содержит всего t наборов, то его удобно задавать в виде матрицы размерности $m \times t$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Пусть задана n -местная мультифункция g и наборы $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi})$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), принадлежащие некоторому m -местному предикату. Столбец

$$\begin{pmatrix} g(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ g(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{pmatrix}$$

будем обозначать как

$$g \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

и называть значением функции на заданных наборах.

В общем случае множество мультифункций, сохраняющих некоторый предикат, не обязательно замкнуто относительно суперпозиции. Для m -местного предиката R определим m -местный предикат R' следующим образом:

$$(B_1, \dots, B_m) \in R' \Leftrightarrow (B_1, \dots, B_m) \in R \text{ и } |B_i| = 1 \text{ для всех } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Предикат R' содержит те и только те наборы из предиката R , в которых не встречается пустое подмножество и подмножества мощности больше 1. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 ([7]). Пусть мультифункции $g, g_1, \dots, g_t$ заданы на конечном множестве A . Если мультифункция f получена суперпозицией мультифункций $g, g_1, \dots, g_t$, сохраняющих некоторый m -местный предикат R , заданный на множестве 2^A , то на наборах, которые принадлежат R' , значение функции f принадлежит R .

2 Критерий полноты

Введем в рассмотрение следующие восемь множеств мультифункций ранга 2:

$$K_1 = \text{Pol } R_1, R_1 = \{0, *\}; K_2 = \text{Pol } R_2, R_2 = \{1, *\}; K_3 = \mathcal{O}_2^*; K_4 = \mathcal{H}_2;$$

$$K_5 = \{f \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{*, 1, -\} \text{ для любого } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n\};$$

$$K_6 = \{f \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{*, 0, -\} \text{ для любого } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n\};$$

$$K_7 = \text{Pol } R_7, R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * & - \end{pmatrix};$$

$$K_8 = \text{Pol } R_8, R_8 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Замкнутость этих множеств достаточно очевидна. Также несложно показать их попарную различность.

Определим унарную функцию $\lambda(x): \lambda(0) = *, \lambda(1) = -$.

Лемма 2 ([3]). Множество функций $S = P \cup \{\lambda\}$, где P — E -полное множество в классе $\mathcal{O}_2$, является полным в классе $\mathcal{M}_2$.

Будем в дальнейшем использовать обозначение f_{K_i} для функции, не принадлежащей множеству K_i ($i \in \{1, \dots, 8\}$).

Из леммы 2 и [1] следует

Лемма 3. Справедливо $[0, 1, f_{K_3}, f_{K_4}] = \mathcal{M}_2$.

Лемма 4. Пусть $g_1(x) = (-)$, $g_2(x) = (11)$. Тогда справедливо

$$[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_5}] = \mathcal{M}_2.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно выразить константу 0 и воспользоваться леммой 3. Для функции f_{K_5} возьмем набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, такой, что $f_{K_5}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Рассмотрим функцию $h(x)$, где $h(x) = f_{K_5}(u_1(x), \dots, u_n(x))$ и

$$u_i(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если } \alpha_i = 0; \\ 1, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Тогда $h(x) = (0\beta)$, где $\beta \in \{0, 1, *, -\}$.

Пусть

$$p(x, y) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x = y; \\ t(x), & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

В векторном представлении $p(x, y) = (-0\beta -)$. Суперпозиция $p(g_1, g_2)$ определяет константу 0.

Двойственным образом доказывается

Лемма 5. Пусть $g_1(x) = (-)$, $g_2(x) = (00)$. Тогда справедливо

$$[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_6}] = \mathcal{M}_2.$$

Теорема 1. Множество мультифункций R является ES_I^* -полным в $\mathcal{M}_2$ тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_8$.

Доказательство. Отождествлением переменных из функции f_{K_8} можно получить одну из восьми следующих одноместных функций:

$$\begin{aligned} f_{K_8}^1 &= (-), f_{K_8}^2 = (00), f_{K_8}^3 = (11), f_{K_8}^4 = (10), \\ f_{K_8}^5 &= (0-), f_{K_8}^6 = (-0), f_{K_8}^7 = (1-), f_{K_8}^8 = (-1). \end{aligned}$$

Так как $f_{K_8}^6(f_{K_8}^6(x)) = f_{K_8}^5$ и $f_{K_8}^5(f_{K_8}^5(x)) = (00)$, $f_{K_8}^7(f_{K_8}^7(x)) = f_{K_8}^8$ и $f_{K_8}^8(f_{K_8}^8(x)) = (11)$, то достаточно рассмотреть первые четыре случая.

Случай 1. $f_{K_8}^1 = (-)$. Из функции f_{K_7} отождествлением переменных можно получить функцию $h(x, y)$, такую, что на наборах (01) и (10) она принимает одно из следующих шести значений — (00), (11), (0-), (1-), (-0), (-1).

Определим функцию $t(x, y)$:

$$t(x, y) = \begin{cases} -, & \text{если } x = y; \\ h(x, y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Суперпозиция $t(-, -)$ определяет одну из двух функций: (1) или (0). Для первой функции воспользуемся леммой 4. Для второй — леммой 5.

Случай 2. $f_{K_8}^2 = (00)$. Подставляя константу 0 в функцию f_{K_1} , получим одну из двух функций: (1) или (-). Далее применяем лемму 3 или лемму 5.

Случай 3. $f_{K_8}^3 = (11)$. Подставляя константу 1 в функцию f_{K_2} , получим одну из двух функций: (0) или (-). И далее применяем лемму 3 или лемму 4.

Случай 4. $f_{K_8}^4 = (10)$. Как и в случае 1, воспользуемся функцией f_{K_7} . Подставляя в нее на соответствующие места переменных функцию (10), можно получить одну из следующих одноместных функций — (00), (11), (0-), (-0), (1-), (-1).

В первых двух случаях с помощью отрицания можно получить двойственные функции и свести к лемме 3, а остальные случаи описанным ранее способом сводятся к первым двум.

3 Классификация мультифункций

Для каждой мультифункции g однозначным образом определим вектор принадлежности предполным множествам. Длина такого вектора равна 8, а i -я координата вектора равна 1, если мультифункция g принадлежит предполному множеству K_i , и 0 иначе.

На множестве всех мультифункций определим отношение эквивалентности следующим образом: эквивалентными будут мультифункции, у которых совпадают векторы принадлежности предполным множествам. Так как число предполных множеств равно 8, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно 2^8 .

Через $\bar{K}$ обозначим множество функций, которые не принадлежат множеству K .

Лемма 6. Число классов эквивалентности мультифункций, принадлежащих множествам K_1 и K_2 , относительно принадлежности ES^*_I -предполным множествам равно 18.

Доказательство. Если мультифункция принадлежит множеству $K_1 \cap K_2$, то она также принадлежит множеству K_8 . Осталось рассмотреть принадлежность остальным множествам — $K_3 - K_7$.

Для перечисления всех классов разобьем множество рассматриваемых функций на 4 множества — $K_3 \cap K_4$, $K_3 \cap \bar{K}_4$, $\bar{K}_3 \cap K_4$ и $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

а) множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. Так как булева функция на нулевом наборе возвращает 0, а на единичном 1, то она не принадлежит множествам K_5 и K_6 . В этом случае функции могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству K_7 . Таким образом получили два класса.

б) рассмотрим второе множество $K_3 \cap \bar{K}_4$ — множество функций, которые хотя бы на одном наборе возвращают * и ни на одном из наборов не возвращают -. В этом случае разобьем оставшееся множество функций на 4 множества — $K_5 \cap K_6$, $K_5 \cap \bar{K}_6$, $\bar{K}_5 \cap K_6$ и $\bar{K}_5 \cap \bar{K}_6$.

Множество $K_5 \cap K_6$ состоит из одной функции — *, которая принадлежит множеству K_7 .

В остальных трех случаях функции могут принадлежать либо не принадлежать множеству K_7 . Всего получили шесть классов.

в) функция из множества $\bar{K}_3 \cap K_4$ на некотором наборе возвращает - и ни на одном из наборов не возвращает *. В этом случае очевидно, что функция, принадлежащая K_8 , не принадлежит K_5 и K_6 и может либо принадлежать, либо не принадлежать K_7 . То есть получили два класса.

г) рассмотрим последнее множество $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$. Если мультифункция не возвращает значения 0 и 1, то мультифункция принадлежит множеству K_7 . Иначе она может и не принадлежать K_7 . Получили один и шесть классов соответственно.

В таблице 1 описано 18 функций из множества $K_1 \cap K_2$ с векторами принадлежности предполным множествам. Лемма доказана.

Таблица 1

Функции из множества $K_1 \cap K_2$

	функция	вектор		функция	вектор
1	(01)	1 1 1 1 0 0 1 1	2	(0001)	1 1 1 1 0 0 0 1
3	(**)	1 1 1 0 1 1 1 1	4	(*1)	1 1 1 0 1 0 1 1
5	(*111)	1 1 1 0 1 0 0 1	6	(0*)	1 1 1 0 0 1 1 1
7	(000*)	1 1 1 0 0 1 0 1	8	(*101)	1 1 1 0 0 0 1 1
9	(*001)	1 1 1 0 0 0 0 1	10	(0--1)	1 1 0 1 0 0 1 1
11	(0-01)	1 1 0 1 0 0 0 1	12	(*--*)	1 1 0 0 1 1 1 1
13	(*--1)	1 1 0 0 1 0 1 1	14	(*-11)	1 1 0 0 1 0 0 1
15	(0--*)	1 1 0 0 0 1 1 1	16	(0-0*)	1 1 0 0 0 1 0 1
17	(0*-1)	1 1 0 0 0 0 1 1	18	(*-01)	1 1 0 0 0 0 0 1

Лемма 7. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам K_1 и $\bar{K}_2$, относительно принадлежности ES_l^* -предполным множествам равно 19.

Доказательство. Рассмотрим принадлежность множествам $K_3 - K_8$.

Как и в предыдущем доказательстве, рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам $K_3 \cap K_4$, $K_3 \cap \bar{K}_4$, $\bar{K}_3 \cap K_4$ и $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

а) множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. В этом случае функции на нулевом и единичном наборах возвращают значение 0. Таким образом, они не принадлежат множествам K_5 , K_7 и K_8 . Осталось два варианта относительно принадлежности множеству K_6 . Получили два класса.

Аналогичный результат получаем и в случае $\bar{K}_3 \cap K_4$.

б) если функция принадлежит множеству $K_3 \cap \bar{K}_4$, то она не принадлежит множеству K_5 , так как на единичном наборе она возвращает 0. Также несложно заметить, что если функция не принадлежит K_8 , т. е. на нулевом и единичном наборе возвращает (00), то она не принадлежит K_7 . Остается не более двух вариантов. А если функция принадлежит K_8 , то остается не более 4-х вариантов. Таким образом, получили шесть классов эквивалентности.

г) рассмотрим последнее множество $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$. В этом случае разобьем оставшееся множество функций на 4 множества — $K_5 \cap K_6$, $K_5 \cap \bar{K}_6$, $\bar{K}_5 \cap K_6$ и $\bar{K}_5 \cap \bar{K}_6$.

В первом случае функция возвращает только два значения: * и -. Таким образом, она также принадлежит K_7 и K_8 . Получили еще один класс эквивалентности.

Функция, принадлежащая $K_5 \cap \bar{K}_6$, не возвращает 0, поэтому на нулевом наборе возвращает * и принадлежит K_8 . Ко множеству K_7 она либо принадлежит, либо нет. Получили два класса эквивалентности.

Если мультифункция, принадлежащая $\bar{K}_5 \cap K_6$, не принадлежит K_8 , т. е. на нулевом и единичном наборах возвращает (00) или (0 -), то она не принадлежит K_7 . Иначе она может и принадлежать K_7 . Таким образом, получили три класса.

Аналогичный результат получаем и в последнем случае.

В таблице 2 приведено 19 мультифункций с векторами принадлежности предполным множествам. Лемма доказана.

Таблица 2

Функции из множества $K_1 \cap \bar{K}_2$

	функция	вектор		функция	вектор
1	(00)	1 0 1 1 0 1 0 0	2	(0100)	1 0 1 1 0 0 0 0
3	(*0)	1 0 1 0 0 1 1 1	4	(*000)	1 0 1 0 0 1 0 1
5	(0*00)	1 0 1 0 0 1 0 0	6	(*100)	1 0 1 0 0 0 1 1
7	(*110)	1 0 1 0 0 0 0 1	8	(0*10)	1 0 1 0 0 0 0 0
9	(0 –)	1 0 0 1 0 1 0 0	10	(0 – 10)	1 0 0 1 0 0 0 0
11	(* –)	1 0 0 0 1 1 1 1	12	(**1 –)	1 0 0 0 1 0 1 1
13	(*11–)	1 0 0 0 1 0 0 1	14	(* – – 0)	1 0 0 0 0 1 1 1
15	(* – 00)	1 0 0 0 0 1 0 1	16	(0* – 0)	1 0 0 0 0 1 0 0
17	(*10 –)	1 0 0 0 0 0 1 1	18	(* – 10)	1 0 0 0 0 0 0 1
19	(0*1–)	1 0 0 0 0 0 0 0			

Лемма 8. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам $\bar{K}_1$ и K_2 , относительно принадлежности ES_I^* -предполным множествам равно 19.

Доказательство. Доказательство того, что классов эквивалентности 19, происходит аналогично предыдущей лемме. Функции и соответствующие им векторы приведены в таблице 3.

Таблица 3

Функции из множества $\bar{K}_1 \cap K_2$

	функция	вектор		функция	вектор
1	(11)	0 1 1 1 1 0 0 0	2	(1001)	0 1 1 1 0 0 0 0
3	(1*)	0 1 1 0 1 0 1 1	4	(111*)	0 1 1 0 1 0 0 1
5	(1*11)	0 1 1 0 1 0 0 0	6	(110*)	0 1 1 0 0 0 1 1
7	(100*)	0 1 1 0 0 0 0 1	8	(1*01)	0 1 1 0 0 0 0 0
9	(– 1)	0 1 0 1 1 0 0 0	10	(– 001)	0 1 0 1 0 0 0 0
11	(– *)	0 1 0 0 1 1 1 1	12	(– *1*)	0 1 0 0 1 0 1 1
13	(– 11*)	0 1 0 0 1 0 0 1	14	(– *11)	0 1 0 0 1 0 0 0
15	(– *0*)	0 1 0 0 0 1 1 1	16	(– 00*)	0 1 0 0 0 1 0 1
17	(– 10*)	0 1 0 0 0 0 1 1	18	(1 – 0*)	0 1 0 0 0 0 0 1
19	(– *01)	0 1 0 0 0 0 0 0			

Лемма 9. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$, относительно принадлежности ES_I^* -предполным множествам равно 16.

Доказательство. Из условия следует, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям $f(0, \dots, 0) \in \{1, -\}$, $f(1, \dots, 1) \in \{0, -\}$. Очевидно, что такие функции не принадлежат K_8 . Рассмотрим принадлежность к оставшимся множествам $K_3 - K_7$.

Как и в предыдущих доказательствах, рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам $K_3 \cap K_4$, $K_3 \cap \bar{K}_4$, $\bar{K}_3 \cap K_4$ и $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

В случае $K_3 \cap K_4$ рассматриваются булевы функции, которые на нулях возвращают 1, а на единицах 0, поэтому они не принадлежат множествам K_5 и K_6 . Множеству K_7 они могут принадлежать либо нет. Получили два класса эквивалентности.

Аналогичный результат получается и в случае $K_3 \cap \bar{K}_4$.

Рассмотрим случай, когда функция не возвращает * и возвращает –.

Если функция не возвращает ни одну из констант: 0 и 1, то очевидно, что это одна функция — (–). Получили один класс эквивалентности.

Если функция возвращает 1 и не возвращает 0, то она принадлежит K_5 , но не принадлежит оставшимся множествам K_6 и K_7 . Получили еще один класс.

Аналогичный результат получим в случае, когда функция возвращает 0 и не возвращает 1.

Если функция возвращает обе константы, то она не принадлежит K_5 и K_6 . Получили два класса.

Случай $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$. Функция возвращает * и –.

Если функция не возвращает ни одну из констант: 0 и 1, то она принадлежит K_5 , K_6 и K_7 . Получили один класс эквивалентности.

Если функция возвращает 1 и не возвращает 0, то она принадлежит K_5 , а K_6 не принадлежит. Осталось два варианта относительно принадлежности множеству K_7 , что дает два класса эквивалентности.

Аналогичные результаты получим в случае, когда функция возвращает 0 и не возвращает 1 и когда возвращает обе константы.

В таблице 4 приведены 17 функций и соответствующие им классы. Лемма доказана.

Таблица 4

Функции из множества $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2$

	функция	вектор		функция	вектор
1	(10)	0 0 1 1 0 0 1 0	2	(1000)	0 0 1 1 0 0 0 0
3	(1*00)	0 0 1 0 0 0 1 0	4	(1*000000)	0 0 1 0 0 0 0 0
5	(– –)	0 0 0 1 1 1 1 0	6	(1 –)	0 0 0 1 1 0 0 0
7	(– 0)	0 0 0 1 0 1 0 0	8	(1 – – 0)	0 0 0 1 0 0 1 0
9	(– 100)	0 0 0 1 0 0 0 0	10	(– * – –)	0 0 0 0 1 1 1 0
11	(– * 1 –)	0 0 0 0 1 0 1 0	12	(1 * 1 –)	0 0 0 0 1 0 0 0
13	(– * 0 –)	0 0 0 0 0 1 1 0	14	(– * 00)	0 0 0 0 0 1 0 0
15	(1 * – 0)	0 0 0 0 0 0 1 0	16	(– * 10)	0 0 0 0 0 0 0 0

Теорема 2. Число классов мультифункций относительно принадлежности ES_I^* -предполным множествам равно 79.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из лемм 6–9.

Заключение

В статье впервые введено ES_I^* -замыкание мультифункций, что является дальнейшим развитием теории дискретных функций и может найти применение при исследованиях гиперструктур, обработке неполной и противоречивой информации. Для введенного замыкания сформулирован и доказан критерий полноты множества мультифункций, заданных на двухэлементном множестве, показано, что множество мультифункций разбивается на 79 классов эквивалентности относительно принадлежности предполным множествам. Проведенные исследования подтверждают тезис о том, что оператор разветвления по предикату равенства относится к так называемым «сильным» операторам.

В дальнейшем может быть исследование S_I^* -замыкания, в первую очередь для множества мультифункций, заданных на двухэлементном множестве, получения критерия полноты и проверки гипотезы о континуальности множества всех замкнутых классов.

Литература

1. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. 2008. № 3(20). С. 80–88. Текст: непосредственный.
2. Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2014. Т. 10. С. 93–105. Текст: непосредственный.
3. Пантелеев В. И. Суперпозиции функций k -значной логики и их обобщений: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.01.09. Иркутск, 2009. 215 с. Текст: непосредственный.
4. Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G. One Interval in the Lattice of Partial Hyperclones // Czechoslovak Mathematical Journal. 2005. № 3(55). P. 719–724.
5. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set // Multiple-Valued Logic. An International Journal. 2002. № 4(8). P. 495–501.
6. Marty F. Sur une Generalization de la Notion de Groupe // 8th Congress Math. Scandinaves. Stockholm, 1934. P. 45–49.
7. Panteleev V. I., Riabets L. V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. № 2(13). P. 231–241.
8. Pouzet M., Rosenberg I. Small Clones and the Projection Property // Algebra Universalis. 2010. Vol. 63. P. 37–44.

Статья поступила в редакцию 25.05.2021; одобрена после рецензирования 25.06.2021; принята к публикации 19.08.2021.

ON THE MEMBERSHIP OF MULTIFUNCTIONS OF RANK TWO IN ES^*_1 -PRECOMPLETE SETS

Vladimir I. Panteleev

Dr. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Irkutsk State University
1 Karl Marx St., Irkutsk, 664003, Russia

Eduard S. Taglasov

Master's student,
Irkutsk State University
1 Karl Marx St., Irkutsk, 664003, Russia

Abstract. Multifunctions on a two-element set are considered together with operators of superposition and branching by an equality predicate. In superposition, a special role is assigned to the empty set, which is interpreted as "breakage". In the absence of "breakage", common elements are selected with all possible refinements. The set of common elements is declared as a superposition value. If there are no common elements, then the value of the multifunction is declared to be the set of all elements that occur with all possible refinements. For the introduced superposition and the branching operator by the equality predicate all precomplete sets are described, a completeness criterion is formulated and proved. Multifunctional classification is performed concerning belonging to precomplete sets. Examples of multifunctional classes are given. Precomplete sets are described in the language of predicate preservation by function. When performing the classification of multifunctional functions, a computer search was used.

Keywords: multioperations; partial operations; hyperoperations; closed classes; E-closure; complete sets; classification; precomplete sets.

For citation

Panteleev V. I., Taglasov E. S. On the Membership of Multifunctions of Rank Two in ES^*_1 -precomplete Sets. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*. 2021; 2: 3–16 (In Russ.).

References

1. Marchenkov S. S. The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions. *Discrete Math. Appl.* 2008. 4(18). Pp. 381–389.
2. Panteleev V. I., Riabets L. V. The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2014. (10). Pp. 93–105.
3. Panteleev V. I. Superpositions of k-valued Logic Functions and Their Generalizations. *Dis. ... Dr. Sci. (Phys. and Math.)*: 01.01.09. Irkutsk, 2009. 215 p.
4. Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G. One Interval in the Lattice of Partial Hyperclones. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 2005. 3(55). Pp. 719–724.
5. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*. 2002. 4(8). Pp. 495–501.
6. Marty F. Sur une Generalization de la Notion de Groupe. *8th Congress Math. Scandinaves. Stockholm*, 1934. Pp. 45–49.

7. Panteleev V. I., Riabets L. V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2020. 2(13). Pp. 231–241.

8. Pouzet M., Rosenberg I. Small Clones and the Projection Property. *Algebra Universalis*. 2010. (63). Pp. 37–44.

The article was submitted 25.05.2021; approved after reviewing 25.06.2021; accepted for publication 19.08.2021.