

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-3-18

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСХОДА СБЕРЕЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

© Аксениюшкина Елена Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент,

Байкальский государственный университет

Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11

E-mail: aks.ev@mail.ru

В работе изучается задача оптимального управления, связанная с поиском стратегии потребления при условии полного расхода сбережений в течение планового периода с целью получения максимальной суммарной полезности потребления с учетом инфляции. Решение задачи оптимизации сбережений проводится в рамках принципа максимума для степенной и логарифмической функций полезности потребления. Рассматриваемая задача допускает аналитическое решение в зависимости от соотношений между параметрами модели. В результате получены оптимальные программы потребления (расхода денежных средств) в плане максимизации функционала полезности. Представлена характеристика эволюции капитала в зависимости от параметров роста и инфляции. Отметим, что для логарифмической функции полезности оптимальное потребление для субъектов с невысоким денежным ресурсом содержит нулевые участки (периоды «голодания») на начальной либо конечной части промежутка планирования.

Ключевые слова: оптимальное управление; функция полезности потребления; принцип максимума; эволюция капитала; оптимальный режим потребления.

Введение

Проблемы управления и оптимизации являются естественными и необходимыми элементами исследований во многих отраслях науки, техники и экономики. В настоящее время теория оптимального управления может служить хорошим примером гармоничного сочетания фундаментальных математических разработок с актуальными прикладными проблемами. Потребности теории и приложений стимулируют развитие этой научной дисциплины по многим направлениям.

На протяжении многих лет принцип максимума Понтрягина в полной мере сохраняет свое теоретическое и прикладное значение и остается ведущим результатом теории оптимального управления [1–3]. К настоящему времени с помощью принципа максимума успешно исследованы и решены многие прикладные задачи оптимизации динамических процессов

самого разного содержания. Среди большого числа приложений теории оптимального управления выделим модели математической экономики [4–10].

Данная работа посвящена исследованию и решению в рамках принципа максимума задачи оптимизации расхода сбережений для степенной и логарифмической функций полезности. Задача допускает аналитическое решение в зависимости от соотношений между параметрами модели. В результате получены оптимальные программы потребления (расхода денежных средств) в рамках максимизации функционала полезности. Интересно отметить, что для логарифмической функции полезности оптимальное потребление для субъектов с невысоким капиталом содержит нулевые участки (периоды «голодания») на начальной либо конечной части промежутка планирования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления, которую наиболее естественно интерпретировать как модель оптимизации сбережений [4]

$$\begin{aligned} \Phi(u) = \int_0^T e^{-\alpha t} g(u(t)) dt \rightarrow \max, \\ \dot{x} = \rho x - u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \\ u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ — денежный капитал (сбережения); $u(t)$ — интенсивность потребления (объем расходов); $g(u)$ — функция полезности потребления; α — параметр дисконтирования (инфляция); ρ — банковская депозитная ставка (параметр роста сбережений).

Функция полезности потребления $g(u)$, $u \geq 0$ определим следующими условиями:

- 1) $g(0) = 0$,
- 2) $g(u)$ строго возрастает для $u \geq 0$,
- 3) $g(u)$ строго вогнутая дифференцируемая функция в области $u \geq 0$.

Управление $u(t)$, $t \in [0, T]$ считаем кусочно-непрерывной функцией с условием неотрицательности.

Таким образом, задача (1) заключается в поиске такой стратегии потребления $u(t)$ с условием полного расхода сбережений $x(t)$ в течение планового периода $[0, T]$, чтобы обеспечить максимум суммарной полезности потребления $\Phi(u)$ с учетом инфляции.

Рассмотрим терминальное условие $x(T) = 0$. Согласно формуле Коши для фазового уравнения имеем

$$x(t) = e^{\rho t} \left(x_0 - \int_0^t e^{-\rho \tau} u(\tau) d\tau \right), \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$x(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T e^{-\rho t} u(t) dt = x_0.$$

Проведем анализ задачи на основе принципа максимума.

Введем функция Понтрягина

$$H(\psi, x, u) = \psi(\rho x - u) + g(u)$$

и образуем сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \alpha \psi - H_x = (\alpha - \rho)\psi.$$

Его решение имеет вид

$$\psi(t) = \psi_0 e^{(\alpha - \rho)t}, \quad t \in [0, T],$$

где $\psi_0 = \psi(0)$, $\psi_0 \neq 0$.

Определим H — максимизирующее управление для $\psi = \psi(t)$

$$u_*(t, \psi_0) = \arg \max_{u \geq 0} (g(u) - \psi_0 e^{(\alpha - \rho)t} u), \quad t \in [0, T], \quad \psi_0 \neq 0.$$

Отметим, что в случае $\psi_0 < 0$ функция $g(u) - \psi_0 e^{(\alpha - \rho)t} u$ не ограничена сверху в области $u \geq 0$, поэтому $u_*(t, \psi_0) = \infty$, что не допустимо по смыслу задачи (1).

Сформулируем основное утверждение.

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u_*(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$ в задаче (1) необходимо и достаточно существование такого множителя $\psi_0^* > 0$, что выполняются условия

$$\begin{aligned} 1. \quad & u_*(t) = u_*(t, \psi_0^*), \quad t \in [0, T], \\ 2. \quad & \int_0^T e^{-\rho t} u_*(t) dt = x_0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующая схема решения задачи (1):

- 1) найти в явном виде управление $u_*(t, \psi_0)$, $t \in [0, T]$, $\psi_0 > 0$;
- 2) найти решение $\psi_0^* > 0$ уравнения $f(\psi_0) = x_0$ при $x_0 > 0$ (либо доказать его существование и единственность), где $f(\psi_0) = \int_0^T e^{-\rho t} u_*(t, \psi_0) dt$.

Рассмотрим конкретные реализации задачи (1) для некоторых функций $g(u)$.

2. Степенная функция полезности

Решим задачу (1) с функцией полезности

$$g(u) = \sqrt{u},$$

которая удовлетворяет условиям 1) – 3):

$$g(0) = 0; \quad g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} > 0, \quad u > 0; \quad g''(u) = -\frac{1}{4u\sqrt{u}} < 0, \quad u > 0.$$

Определим задачу на максимум для $\psi_0 > 0$, $t \in [0, T]$

$$\varphi(u) = \sqrt{u} - \psi_0 e^{(\alpha-\rho)t} u \rightarrow \max, \quad u \geq 0. \quad (2)$$

Целевая функция является строго вогнутой в области $u > 0$.

Найдем ее стационарную точку из условия $\phi'(u) = 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} - \psi_0 e^{(\alpha-\rho)t} = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$u_*(t, \psi_0) = \frac{1}{4\psi_0^2 e^{2(\alpha-\rho)t}}, \quad t \in [0, T], \quad \psi_0 > 0.$$

Поскольку $u_*(t, \psi_0) > 0$, то получено решение задачи (2).

Для поиска ψ_0 составим уравнение

$$\frac{1}{4\psi_0^2} \int_0^T \frac{e^{-\rho t}}{e^{2(\alpha-\rho)t}} dt = x_0. \quad (3)$$

Вычислим значение интеграла

$$\int_0^T e^{(\rho-2\alpha)t} dt = \frac{e^{(\rho-2\alpha)T} - 1}{\rho - 2\alpha}, \quad \rho \neq 2\alpha.$$

В случае $\rho = 2\alpha$ значение интеграла равно T . Таким образом, из уравнения (3) получаем

$$\frac{1}{4\psi_0^2} = \frac{x_0(\rho - 2\alpha)}{e^{(\rho-2\alpha)T} - 1}.$$

В результате оптимальное управление в задаче (1) с функцией полезности $g(u) = \sqrt{u}$ выражается по формуле

$$u_*(t) = \frac{x_0 e^{2(\rho-\alpha)t} (\rho - 2\alpha)}{e^{(\rho-2\alpha)T} - 1}, \quad \rho \neq 2\alpha, \quad t \in [0, T].$$

В случае $\rho = 2\alpha$ оптимальное управление имеет вид

$$u_*(t) = \frac{x_0 e^{2\alpha t}}{T}, \quad t \in [0, T].$$

Отметим характер оптимального потребления в зависимости от параметров α , ρ :

- 1) $\rho < \alpha$ — рост сбережений меньше инфляции: расходы на потребление монотонно уменьшаются с течением времени;
- 2) $\rho > \alpha$ — рост сбережений больше инфляции: расходы на потребление монотонно возрастают с течением времени;
- 3) $\rho = \alpha$ — стабильность: потребление находится на постоянном уровне.

Во всех случаях капитал $x_*(t)$, $t \in [0, T]$ уменьшается до нуля.

3. Логарифмическая функция полезности

Проведем решение задачи (1) с функцией полезности

$$g(u) = \ln(u + 1),$$

которая удовлетворяет необходимым условиям

$$g(0) = 0; \quad g'(u) = \frac{1}{u+1} > 0, \quad u \geq 0; \quad g''(u) = -\frac{1}{(u+1)^2} < 0, \quad u \geq 0.$$

Построим задачу на максимум для $\psi_0 > 0$, $t \in [0, T]$

$$\varphi(u) = \ln(u + 1) - \psi_0 e^{(\rho - \alpha)t} u \rightarrow \max, \quad u \geq 0. \quad (4)$$

Целевая функция является строго вогнутой в области $u \geq 0$. Найдем ее стационарную точку из условия $\varphi'(u) = 0$:

$$u_s(t, \psi_0) = \frac{e^{(\rho - \alpha)t}}{\psi_0} - 1.$$

Если $e^{(\rho - \alpha)t} \geq \psi_0$, то $u_s(t, \psi_0) \geq 0$. В этом случае $u_s(t, \psi_0)$ — решение задачи (4): $u_s(t, \psi_0) = u_*(t, \psi_0)$.

Рассмотрим второй случай, когда $e^{(\rho - \alpha)t} < \psi_0$, тогда

$$\frac{\psi_0}{e^{(\rho - \alpha)t}} > 1 \geq \frac{1}{1 + u}, \quad u \geq 0,$$

Отсюда

$$\varphi'(u) = \frac{1}{1 + u} - \frac{\psi_0}{e^{(\rho - \alpha)t}} < 0, \quad u \geq 0,$$

то есть функция $\varphi(u)$ строго убывает в области $u \geq 0$, причем $\varphi(0) = 0$.

Следовательно, в данном случае $u_*(t, \psi_0) = 0$.

Таким образом, решение задачи (4) выражается по формуле

$$u_*(t, \psi_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } e^{(\rho - \alpha)t} < \psi_0, \\ \frac{e^{(\rho - \alpha)t}}{\psi_0} - 1, & \text{если } e^{(\rho - \alpha)t} \geq \psi_0. \end{cases}$$

Выделим точку τ перехода с одного режима на другой. Это корень уравнения $(\rho - \alpha)t = \ln \psi_0$ при условии $\rho \neq \alpha$. В результате

$$\tau = \frac{\ln \psi_0}{\rho - \alpha}.$$

Выясним возможное расположение точки τ относительно отрезка $[0, T]$.

Введем область значений функции $e^{(\rho-\alpha)t}$ для $t \in [0, T]$

$$D = \{y \in R: y = e^{(\rho-\alpha)t}, t \in [0, T]\},$$

которая представляет собой отрезок, соединяющий точки 1 ($t=0$) и $e^{(\rho-\alpha)T}$ ($t=T$). Обозначим $\tilde{\psi}_0 = e^{(\rho-\alpha)T}$.

Рассмотрим два возможных варианта.

- 1) $\rho < \alpha \Rightarrow$ функция $e^{(\rho-\alpha)t}$ строго убывает для $t > 0$. Отсюда следует, что $D = [\tilde{\psi}_0, 1]$, τ строго убывает относительно $\psi_0 > 0$.

Выводы:

- 1.1) если $\psi_0 \geq 1$, то $\tau \leq 0$;
- 1.2) если $\psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1)$, то $\tau \in (0, T)$;
- 1.3) если $\psi_0 \in (0, \tilde{\psi}_0)$, то $\tau \geq T$.
- 2) $\rho > \alpha \Rightarrow$ функция $e^{(\rho-\alpha)t}$ строго возрастает для $t > 0$. Отсюда следует, что $D = [1, \tilde{\psi}_0]$, τ строго возрастает относительно $\psi_0 > 0$.

Выводы:

- 2.1) если $\psi_0 \geq \tilde{\psi}_0$, то $\tau \geq T$;
- 2.2) если $\psi_0 \in (1, \tilde{\psi}_0)$, то $\tau \in (0, T)$;
- 2.3) если $\psi_0 \in (0, 1]$, то $\tau \leq 0$.

Проведем анализ указанных ситуаций с позиций принципа максимума.

- 1) Пусть $\rho < \alpha$.

Рассмотрим возможные ситуации для ψ_0 .

- 1.1) Если $\psi_0 \geq 1$, то $e^{(\rho-\alpha)t} < \psi_0$, $t \in [0, T]$.

Следовательно, $u_*(t, \psi_0) = 0$, $t \in [0, T]$. Это управление не допустимо по терминальному условию.

- 1.2) Если $\psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1)$, то $e^{(\rho-\alpha)t} \geq \psi_0$, $t \in [0, \tau]$ и $e^{(\rho-\alpha)t} < \psi_0$, $t \in (\tau, T]$. Тогда максимизирующее управление имеет вид

$$u_*(t, \psi_0) = \begin{cases} \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, T]. \end{cases}$$

Исследуем построенное управление на оптимальность. Рассмотрим функцию

$$f(\psi_0) = \int_0^{\tau} e^{-\rho t} \left(\frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1 \right) dt, \quad \psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1), \quad \tau = \frac{\ln \psi_0}{\rho - \alpha}.$$

Найдем явное выражение для $f(\psi_0)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} e^{-\rho t} \left(\frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1 \right) dt &= \frac{1}{\psi_0} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt - \int_0^{\tau} e^{-\rho t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha \psi_0} - \frac{1}{\alpha \psi_0} e^{-\alpha \tau} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho \tau} - \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

С учетом определения точки τ и свойств логарифма получаем

$$e^{-\alpha \tau} = e^{\frac{-\alpha}{\rho-\alpha} \ln \psi_0} = \psi_0^{\frac{\alpha}{\alpha-\rho}}, \quad e^{-\rho \tau} = e^{\frac{-\rho}{\rho-\alpha} \ln \psi_0} = \psi_0^{\frac{\rho}{\alpha-\rho}}.$$

В результате

$$f(\psi_0) = \frac{1}{\alpha \psi_0} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} \right) \psi_0^{\frac{\rho}{\alpha-\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1).$$

Вычислим значение функции $f(\psi_0)$ для $\psi_0 = 1$ и $\psi_0 = \tilde{\psi}_0$

$$f(1) = 0,$$

$$\begin{aligned} f(\tilde{\psi}_0) &= \frac{1}{\alpha} e^{(\alpha-\rho)T} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho T} - \frac{1}{\alpha} e^{-\rho T} - \frac{1}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{-\rho T} (e^{\alpha T} - 1) + \frac{1}{\rho} (e^{-\rho T} - 1). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$f(\tilde{\psi}_0) = \int_0^T (e^{(\rho-\alpha)(t-T)} - 1) e^{-\rho t} dt > 0,$$

и введем обозначение

$$a = \frac{1}{\alpha} e^{-\rho T} (e^{\alpha T} - 1) + \frac{1}{\rho} (e^{-\rho T} - 1).$$

Подсчитаем производную $f'(\psi_0)$ по формуле дифференцирования интеграла по параметру $\left(\tau = \frac{\ln \psi_0}{\rho - \alpha} \right)$

$$f'(\psi_0) = \left(\int_0^{\tau} \left(\frac{e^{-\alpha t}}{\psi_0} - e^{-\rho t} \right) dt \right)' = -\frac{1}{\psi_0^2} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt + \frac{1}{\psi_0(\rho - \alpha)} \left(\frac{e^{-\alpha \tau}}{\psi_0} - e^{-\rho \tau} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\psi_0^2} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt + \frac{e^{-\rho\tau}}{\psi_0(\rho-\alpha)} \left(\frac{e^{(\rho-\alpha)\tau}}{\psi_0} - 1 \right) = -\frac{1}{\psi_0^2} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt < 0.$$

Таким образом, функция $f(\psi_0)$ монотонно убывает на интервале $(\tilde{\psi}_0, 1)$. Отсюда вывод: если $x_0 \in (0, a)$, то уравнение $f(\psi_0) = x_0$ имеет единственный корень ψ_0^* на $(\tilde{\psi}_0, 1)$ и управление

$$u_*(t) = \begin{cases} \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, & t \in [0, \tau_*], \\ 0, & t \in [\tau_*, T], \end{cases}$$

где $\tau_* = \frac{\ln \psi_0^*}{\rho - \alpha}$, является оптимальным в задаче (1).

1.3) Если $\psi_0 \in (0, \tilde{\psi}_0)$, то $\tau \geq T$. Тогда максимизирующее управление имеет вид

$$u_*(t, \psi_0) = \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1, \quad t \in [0, T].$$

Соответствующее выражение для функции $f(\psi_0)$ представляется по формуле

$$f(\psi_0) = \int_0^T e^{-\rho t} \left(\frac{1}{\psi_0} e^{(\rho-\alpha)t} - 1 \right) dt, \quad \psi_0 \in (0, \tilde{\psi}_0).$$

После интегрирования получаем

$$f(\psi_0) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \psi_0} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho}, \quad \psi_0 \in (0, \tilde{\psi}_0).$$

Поскольку $(1 - e^{-\alpha T}) > 0$, то $f(\psi_0) \rightarrow \infty$ при $\psi_0 \rightarrow 0$. Кроме того,

$$f(\tilde{\psi}_0) = \frac{e^{-\rho T} (e^{\alpha T} - 1)}{\alpha} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho} = a.$$

При этом производная

$$f'(\psi_0) = -\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \psi_0^2} < 0, \quad \psi_0 \in (0, \tilde{\psi}_0).$$

Следовательно, уравнение $f(\psi_0) = x_0$ имеет единственный корень ψ_0^* для любого $x_0 \geq a$

$$\psi_0^* = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \left(x_0 + \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right)},$$

который определяет оптимальное управление в задаче (1)

$$u_*(t) = \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, \quad t \in [0, T].$$

Подведем итог для случая $\rho < \alpha$ в форме следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть в задаче (1)

$$\tilde{\psi}_0 = e^{(\rho-\alpha)T}, \quad a = \frac{e^{-\rho T}(e^{\alpha T} - 1)}{\alpha} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho}.$$

Если $x_0 \in (0, a)$, то оптимальное управление задачи выражается по формуле

$$u_*(t) = \begin{cases} \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, & t \in [0, \tau_*], \\ 0, & t \in (\tau_*, T], \end{cases}$$

где $\tau_* = \frac{\ln \psi_0^*}{\rho - \alpha}$, $\psi_0^* \in (\tilde{\psi}_0, 1)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{1}{\alpha \psi_0} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} \right) \psi_0^{-\frac{\rho}{\rho-\alpha}} - \frac{1}{\rho} = x_0, \quad \psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1).$$

Если $x_0 \geq a$, то оптимальное управление задачи выражается по формуле

$$u_*(t) = \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, \quad t \in [0, T],$$

где

$$\psi_0^* = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \left(x_0 + \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right)}.$$

Замечание 1. Отметим характер оптимального управления для случая, когда рост капитала меньше инфляции ($\rho < \alpha$)

- $x_0 \in (0, a)$ — начальный капитал меньше «среднего» уровня:
 $[0, \tau_*]$ — монотонное убывание до нуля ($u_*(\tau_*) = 0$);
 $[\tau_*, T]$ — нулевое потребление, период «голодания».
- $x_0 \geq a$ — начальный капитал выше «среднего» уровня:
 $[0, T]$ — монотонное убывание расходов на потребление; период «голодания» отсутствует.

Замечание 2. Охарактеризуем эволюцию капитала $x_*(t)$ при условии $\rho < \alpha$

- $x_0 \in (0, a)$ — начальный капитал меньше «среднего» уровня:

- $[0, \tau_*]$ — монотонное убывание до нуля ($x_*(\tau_*) = 0$);
 $[\tau_*, T]$ — отсутствие денежных средств, нулевое «дно».
- $x_0 \geq a$ — начальный капитал выше «среднего» уровня:
 $[0, T]$ — монотонное убывание до нуля ($x_*(T) = 0$).

Рассмотрим аналогичным образом следующий случай

2) Пусть $\rho > \alpha$.

2.1) Если $\psi_0 \geq \tilde{\psi}_0$, то $e^{(\rho-\alpha)t} < \psi_0$, $t \in [0, T]$.

Следовательно, $u_*(t, \psi_0) = 0$, $t \in [0, T]$. Это управление не допустимо по терминальному условию.

2.2) Если $\psi_0 \in (1, \tilde{\psi}_0)$, то $e^{(\rho-\alpha)t} < \psi_0$, $t \in [0, \tau)$ и $e^{(\rho-\alpha)t} \geq \psi_0$, $t \in [\tau, T]$. Тогда максимизирующее управление имеет вид

$$u_*(t, \psi_0) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau), \\ \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Исследуем построенное управление на оптимальность. Определим функцию

$$f(\psi_0) = \int_0^T e^{-\rho t} u_*(t, \psi_0) dt, \quad \psi_0 \in (1, \tilde{\psi}_0).$$

Найдем явное выражение для $f(\psi_0)$

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\rho t} u_*(t, \psi_0) dt &= \int_{\tau}^T e^{-\rho t} \left(\frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0} - 1 \right) dt = \frac{1}{\psi_0} \int_{\tau}^T e^{-\alpha t} dt - \int_{\tau}^T e^{-\rho t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha \psi_0} e^{-\alpha \tau} - \frac{1}{\alpha \psi_0} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho \tau} - \frac{1}{\rho} e^{-\rho T}. \end{aligned}$$

С учетом определения точки τ и свойств логарифма получаем

$$f(\psi_0) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho} \right) \psi_0^{\frac{\rho}{\alpha-\rho}} - \frac{1}{\alpha \psi_0} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho T}, \quad \psi_0 \in (\tilde{\psi}_0, 1).$$

Вычислим значение функции $f(\psi_0)$ для $\psi_0 = 1$ и $\psi_0 = \tilde{\psi}_0$

$$f(1) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho T} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) + \frac{1}{\rho} (e^{-\rho T} - 1),$$

$$f(\tilde{\psi}_0) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho} \right) e^{-\rho T} - \frac{1}{\alpha} e^{-\rho T} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho T} = 0.$$

Введем обозначение

$$b = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T}) + \frac{1}{\rho}(e^{-\rho T} - 1) > 0.$$

Подсчитаем производную $f'(\psi_0)$ по формуле дифференцирования интеграла по параметру

$$\begin{aligned} f'(\psi_0) &= \left(\int_{\tau}^T \left(\frac{e^{-\alpha t}}{\psi_0} - e^{-\rho t} \right) dt \right)' = -\frac{1}{\psi_0^2} \int_{\tau}^T e^{-\alpha t} dt - \frac{1}{\psi_0(\rho - \alpha)} \left(\frac{e^{-\alpha \tau}}{\psi_0} - e^{-\rho \tau} \right) = \\ &= -\frac{1}{\psi_0^2} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt - \frac{e^{-\rho \tau}}{\psi_0(\rho - \alpha)} \left(\frac{e^{(\rho - \alpha)\tau}}{\psi_0} - 1 \right) = -\frac{1}{\psi_0^2} \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} dt < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $f(\psi_0)$ монотонно убывает на интервале $(1, \tilde{\psi}_0)$. Отсюда вывод: если $x_0 \in (0, b)$, то уравнение $f(\psi_0) = x_0$ имеет единственный корень ψ_0^* на $(1, \tilde{\psi}_0)$, и управление

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_*), \\ \frac{e^{(\rho - \alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, & t \in [\tau_*, T], \end{cases}$$

где $\tau_* = \frac{\ln \psi_0^*}{\rho - \alpha}$, является оптимальным в задаче (1).

2.3) Если $\psi_0 \in (0, 1)$, то $\tau \geq T$. Тогда максимизирующее управление имеет вид

$$u_*(t, \psi_0) = \frac{e^{(\rho - \alpha)t}}{\psi_0} - 1, \quad t \in [0, T].$$

Исследуем полученное управление на оптимальность. Выражение для функции $f(\psi_0)$ представляется по формуле

$$f(\psi_0) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \psi_0} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho}, \quad \psi_0 \in (0, 1).$$

Поскольку $(1 - e^{-\alpha T}) > 0$, то $f(\psi_0) \rightarrow \infty$ при $\psi_0 \rightarrow 0$. Кроме того,

$$f(1) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho} = b.$$

При этом производная $f'(\psi_0) = \frac{1}{\alpha \psi_0^2}(e^{-\alpha T} - 1) < 0$, $\psi_0 \in (0, 1)$.

Следовательно, уравнение $f(\psi_0) = x_0$ имеет единственный корень ψ_0^* для любого $x_0 \geq b$

$$\psi_0^* = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \left(x_0 + \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right)},$$

который определяет оптимальное управление в задаче (1)

$$u_*(t) = \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, \quad t \in [0, T].$$

Подведем итог для случая $\rho > \alpha$ в форме следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть в задаче (1)

$$\tilde{\psi}_0 = e^{(\rho-\alpha)T}, \quad b = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \psi_0} + \frac{e^{-\rho T} - 1}{\rho}.$$

Если $x_0 \in (0, b)$, то оптимальное управление задачи выражается по формуле

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_*], \\ \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, & t \in (\tau_*, T], \end{cases}$$

где $\tau_* = \frac{\ln \psi_0^*}{\rho - \alpha}$, $\psi_0^* \in (1, \tilde{\psi}_0)$ — единственный корень уравнения

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho} \right) \psi_0^{-\frac{\rho}{\rho-\alpha}} - \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha \psi_0} + \frac{e^{-\rho T}}{\rho} = x_0, \quad \psi_0 \in (1, \tilde{\psi}_0).$$

Если $x_0 \geq b$, то оптимальное управление задачи выражается по формуле

$$u_*(t) = \frac{e^{(\rho-\alpha)t}}{\psi_0^*} - 1, \quad t \in [0, T],$$

где

$$\psi_0^* = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha \left(x_0 + \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right)}.$$

Замечание 1. Отметим характер оптимального управления для случая, когда рост капитала больше инфляции ($\rho > \alpha$)

- $x_0 \in (0, b)$ — начальный капитал ниже «среднего» уровня:
 $[0, \tau_*]$ — нулевое потребление, период «голодания»;
 $[\tau_*, T]$ — монотонное убывание до нуля ($u_*(T) = 0$).
- $x_0 \geq b$ — начальный капитал выше «среднего» уровня:
 $[0, T]$ — монотонное убывание расходов на потребление; период «голодания» отсутствует.

Замечание 2. Охарактеризуем эволюцию капитала $x_*(t)$ при условии $\rho > \alpha$

- $x_0 \in (0, b)$ — начальный капитал ниже «среднего» уровня:
 $[0, \tau_*]$ — период накопления денежных средств до максимально возможной суммы ($x_*(\tau_*) = \max_{0 \leq t \leq T} x_*(t)$);
 $[\tau_*, T]$ — монотонное убывание до нуля ($x_*(T) = 0$).
- $x_0 \geq b$ — начальный капитал выше «среднего» уровня:
 $[0, T]$ — монотонное убывание до нуля ($x_*(T) = 0$).

Рассмотрим случай равенства параметров.

3) Пусть $\rho = \alpha$.

3.1) Если $\psi_0 \geq 1$, то $u_*(t, \psi_0) = 0$, $t \in [0, T]$.

Это управление не допустимо по терминальному условию.

3.2) Если $\psi_0 < 1$, то максимизирующее управление имеет вид

$$u_*(t, \psi_0) = \frac{1}{\psi_0} - 1, \quad t \in [0, T].$$

Определим функцию

$$f(\psi_0) = \int_0^T e^{-\rho t} u_*(t, \psi_0) dt, \quad \psi_0 \in (0, 1).$$

Найдем явное выражение для $f(\psi_0)$

$$\int_0^T e^{-\rho t} u_*(t, \psi_0) dt = \left(\frac{1}{\psi_0} - 1 \right) (e^{-\rho T} - 1).$$

Тогда решение уравнения $f(\psi_0) = x_0$ имеет вид

$$\frac{1}{\psi_0^*} - 1 = \frac{x_0}{e^{-\rho T} - 1}.$$

Подведем итог для случая $\rho = \alpha$ в форме следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть в задаче (1) $\rho = \alpha$.

Тогда оптимальное управление является постоянным и выражается по формуле

$$u_*(t) = \frac{x_0}{e^{-\rho T} - 1}.$$

Заключение

На основе принципа максимума решена задача оптимизации сбережений для степенной и логарифмической функций полезности. В результате получены оптимальные программы потребления (расхода денежных

средств) в рамках максимизации функционала полезности, которые сформулированы в виде теорем 1, 2, 3.

Литература

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Габасов Р., Кирилова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
3. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
4. Бельский В. З. Оптимизационные модели экономической динамики. М.: Наука, 2007. 259 с.
5. Дыхта В. А. Оптимальное управление в моделях экономики. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2015. 100 с.
6. Красовский А. А., Лебедев П. Д., Тарасьев А. М. Замена Бернулли в модели Рэмзи: оптимальные траектории при ограничениях на управление // Журнал вычислит. матем. и мат. физики. 2017. Т. 57, № 5. С. 768–782.
7. Аксеньюшкина Е. В. Построение оптимальной инвестиционной политики фирмы // Известия Байкальского государственного университета. 2017. Т. 27, № 2. С. 274–280. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).274-280.
8. Антипина Н. В. Влияние инвестиционной составляющей на экономические показатели малых и средних фирм // Baikal Research Journal. 2017. Т. 8, № 2. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(2).26.
9. Сорокина П. Г. Прогнозирование динамики налоговой базы по налогу на имущество организаций // Baikal Research Journal. 2017. Т. 8, № 2. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(2).16.
10. Суходолов А. П., Кузнецова И. А., Тимофеев С. В. Анализ подходов в моделировании средств массовой информации // Вопросы теории и практики журналистики. 2017. Т. 6, № 3. С. 287–305. DOI: 10.17150/2308-6203.2017.6(3).287-305.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONSUMPTION AND SAVING BASED ON THE MAXIMUM PRINCIPLE

Elena V. Aksenyushkina

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,

Department of Mathematics and Econometric Theory,

Baikal State University

11 Lenina St., Irkutsk 664003, Russia

E-mail: aks.ev@mail.ru

The article deals with the problem of optimal control associated with the search for a consumption strategy in order to obtain the maximum total utility adjusted for inflation. Solution of the problem of saving optimization is carried out within the maximum principle for power and logarithmic utility functions of consumption. The problem under consideration admits an analytical solution depending on the relations between the parameters of a model. As a result, we have obtained optimal consumption programs (cash outflow) in terms of maximizing the utility functionality. The article describes the evolution of capital depending on the parameters of growth and inflation. We note that for the logarithmic utility function the optimal consumption for subjects with a low monetary resource contains zero segments (periods of "starvation") at the initial or final part of the planning interval.

Keywords: optimal control; utility function of consumption; the maximum principle; evolution of capital; optimal consumption regime.

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 392 p.
2. Gabasov R., Kirilova F. M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [Maximum Principle in Optimal Control Theory]. Moscow: Librokom Publ., 2011. 272 p.
3. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.
4. Belen'kii V. Z. *Optimizatsionnye modeli ekonomicheskoi dinamiki* [Optimization Models of Economic Dynamics]. Moscow: Nauka Publ., 2007. 259 p.
5. Dykhta V. A. *Optimal'noe upravlenie v modelyakh ekonomiki* [Optimal Control in Economic Models]. Irkutsk: Irkutsk State University Publ., 2015. 100 p.
6. Krasovskii A. A., Lebedev P. D., Taras'ev A. M. Zamena Bernulli v modeli Remzi: optimal'nye traektorii pri ogranicheniyakh na upravlenie [Bernoulli Replacement in the Ramsey Model: Optimal Trajectories under Control Constraints]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki — Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics*. 2017. V. 57. No. 5. Pp. 768–782.
7. Akseyushkina E. V. Postroenie optimal'noi investitsionnoi politiki firmy [Construction of the Company's Optimal Investment Policy]. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta — Proceedings of Baikal State University*. 2017. V. 27. No. 2. Pp. 274–280. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).274-280.
8. Antipina N. V. Vliyanie investitsionnoi sostavlyayushchei na ekonomicheskie pokazateli malyykh i srednikh firm [Influence of the Investment Component on the Economic Performance of Small and Moderate-Sized

Firms]. *Baikal Research Journal*. 2017. V. 8. No. 2. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(2).26.

9. Sorokina P. G. Prognozirovanie dinamiki nalogovoi bazy po nalogu na imushchestvo organizatsii [Forecasting the Taxation Base Dynamics for Corporate Property Tax]. *Baikal Research Journal*. 2017. V. 8, No. 2. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(2).16.

10. Sukhodolov A. P., Kuznetsova I. A., Timofeev S. V. Analiz podkhodov v modelirovanii sredstv massovoi informatsii [Analysis of the Approaches in Modeling of Mass Media]. *Voprosy teorii i praktiki zhurnalistiki — Problems of Journalism Theory and Practice*. 2017. V. 6. No. 3. Pp. 287–305. DOI: 10.17150/2308-6203.2017.6(3).287-305.