УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-2-29-41

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ[1]

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: buldaev@mail.ru

© Трунин Дмитрий Олегович
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: tdobsu@yandex.ru

Предлагается новый подход к решению задач оптимального управления с ограничениями на основе построения и решения системы условий улучшения управления в форме задачи о неподвижной точке оператора управления. Для построения указанных условий применяется переход к вспомогательной задаче без ограничений с регулярным функционалом Лагранжа. На основе задачи о неподвижной точке конструируются итерационные алгоритмы последовательного улучшения управления. Подход иллюстрируется на примере.
Ключевые слова: управляемая система с ограничениями; условия улучшения управления; задача о неподвижной точке.

Введение

Распространенным подходом к решению задач оптимального управления с ограничениями является сведение к вспомогательным задачам без ограничений с помощью функционалов Лагранжа, на основе которых получают необходимые условия оптимальности управления типа принципа максимума [1–3]. В классической форме необходимые условия оптимальности являются неконструктивными, так как остается открытым вопрос о выборе множителей Лагранжа.

Поиск экстремальных управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, обычно разделяется на этапы поиска экстремального управления в вспомогательной задаче без ограничений с множителями Лагранжа и этапы подбора этих множителей для удовлетворения ограничений.

Предлагаемый в статье подход основывается на конструировании ус-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ, проект 1.5049.2017/БЧ; РФФИ, проект 18-41-030005-р_а

ловий улучшения управления с точным выполнением ограничений на базе известных специальных формул приращения функционала вспомогательной задачи, не содержащих остаточных членов разложений. Использование таких формул позволяет интерпретировать условия улучшения допустимых управлений как задачу о неподвижной точке. Это дает возможность применить развитую теорию и методы неподвижных точек для эффективного поиска допустимых улучшающих управлений.

Методы неподвижных точек ранее были построены и обоснованы в классах нелинейных задач оптимального управления без ограничений [4; 5]. В данной работе эти подходы развиваются для задач с ограничениями.

1. Постановка задачи с ограничениями

Рассматривается класс нелинейных задач с ограничениями, приводимых к следующему общему виду:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)\,,\ x(t_0) = x^0\,, \tag{1}$$

$$u(t) \in U\,,\ t \in T = [t_0, t_1]\,,$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t),u(t),t)\,dt \to \inf_{u \in V}\,, \tag{2}$$

$$\Phi_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\,, \tag{3}$$

в котором $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t),...,u_m(t))$ — вектор управляющих функций. Множество $U \subseteq R^m$ замкнуто и выпукло. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U. Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывно-дифференцируемы на R^n, функции $F_0(x,u,t)$, $f(x,u,t)$ и их частные производные по x, u непрерывны по совокупности аргументов на множестве $R^n \times U \times T$. Функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$: $\|f(x,u,t) - f(y,u,t)\| \le L\|x - y\|$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t,v)$, $t \in T$ системы (1) для любого доступного управления $v \in V$. Доступное управление $v \in V$ называется допустимым, если выполняется функциональное ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим

$$D = \{v \in V : \Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\}\,.$$

Рассмотрим функцию Понтрягина с вектором $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in R^2$

$$H(\lambda,\psi,x,u,t) = \langle \psi, f(x,u,t) \rangle - \lambda_0 F_0(x,u,t)\,.$$

Для управления $v \in V$ обозначим $\psi(t,v,\lambda)$, $t \in T$ — решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\lambda,\psi(t),x(t),u,t)\,,\ \psi(t_1) = -\sum_{i=0}^{1}\lambda_i\varphi_{ix}(x(t_1))$$

при $x(t) = x(t,v)$, $u(t) = v(t)$, $t \in T$.

Известное необходимое условие оптимальности допустимого управления $u \in D$ в форме принципа максимума [3] в задаче (1)–(3) при некотором векторе $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1) \neq 0$, $\lambda_0 = 0 \vee 1$ можно представить в виде:

$$u(t) = \arg\max_{w \in U} H(\lambda,\psi(t,u,\lambda),x(t,u),w,t)\,,\ t \in T\,. \tag{4}$$

Из условия (4) следует ослабленное необходимое условие в форме дифференциального принципа максимума (ДПМ):

$$u(t) = \arg\max_{w \in U} \left\langle H_u(\lambda,\psi(t,u,\lambda),x(t,u),u(t),t),w \right\rangle,\ t \in T\,, \tag{5}$$

которое можно представить в проекционной форме:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(\lambda,\psi(t,u,\lambda),x(t,u),u(t),t))\,,\ t \in T\,,\ \alpha > 0\,. \tag{6}$$

Важно отметить, что для выполнения дифференциального принципа максимума (5) достаточно проверить условие (6) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Допустимое управление $u \in U$, удовлетворяющее условию (4) при некотором $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1)$, $\lambda_0 = 1$, называется регулярным управлением. Если все допустимые управления, удовлетворяющие условию (4), являются регулярными, то задача (1)–(3) называется регулярной. В противном случае задача (1)–(3) называется вырожденной.

Функция H соответствует функции Понтрягина в вспомогательной задаче Лагранжа без ограничения (3):

$$\tilde{L}(\lambda,u) = \sum_{i=0}^{1}\lambda_i\Phi_i(u) \to \inf_{u \in V}\,,$$

в которой условия (4), (5) и (6) являются необходимыми условиями оптимальности.

Поставим задачу улучшения допустимого управления в задаче (1)–(3) в следующей постановке: для заданного допустимого управления $u^I \in D$ требуется найти допустимое управление $u \in D$ с условием $\Delta_u\Phi_0(u^I) = \Phi_0(u) - \Phi_0(u^I) \le 0$.

2. Метод улучшения управления

Рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе регулярного функционала Лагранжа:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)\,,\ x(t_0) = x^0\,, \tag{7}$$

$$u(t) \in U\,,\ t \in T = [t_0,t_1]\,,$$

$$L(\lambda,u)=\Phi_0(u)+\lambda\Phi_1(u)\to\inf_{u\in V},\qquad \lambda\in R. \tag{8}$$

Обозначим $\varphi(\lambda,x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)$. Функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi\in R^n$ и стандартная сопряженная система в задаче (7), (8) имеют вид:

$$H(\psi,x,u,t)=\langle\psi,f(x,u,t)\rangle-F_0(x,u,t),$$

$$\dot\psi(t)=-H_x(\psi(t),x(t),u(t),t),\ t\in T,\ \psi(t_1)=-\varphi_x(\lambda,x(t_1)). \tag{9}$$

Для доступного управления $u\in V$ обозначим $\psi(t,u,\lambda)$, $t\in T$ — решение стандартной сопряженной системы (9) при $x(t)=x(t,u)$.

Рассмотрим задачу улучшения доступного управления в задаче (7), (8): для заданного доступного управления $u^I\in V$ требуется найти доступное управление $u\in V$ с условием $\Delta_u L(\lambda,u^I)=L(\lambda,u)-L(\lambda,u^I)\le 0$. В соответствии с [5] нелокальные условия улучшения доступного управления $u^I\in V$ на основе использования специальных формул приращения функционала без остаточных членов разложений можно представить следующим образом.

Далее будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции $g(y_1,...,y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2}:

$$\begin{aligned}&\Delta_{y_{s_1}+\Delta y_{s_1},y_{s_2}+\Delta y_{s_2}}g(y_1,...,y_l)=\\&=g(y_1,...,y_{s_1}+\Delta y_{s_1},...,y_{s_2}+\Delta y_{s_2},...,y_l)-g(y_1,...,y_l).\end{aligned}$$

Дополнительно обозначим $\Delta x(t)=x(t,u)-x(t,u^I)$, $\Delta u(t)=u(t)-u^I(t)$.

Введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему, включающую дополнительную фазовую переменную $y(t)=(y_1(t),...,y_n(t))$,

$$\dot p(t)=-H_x(p(t),x(t),u(t),t)-r(t), \tag{10}$$

$$\langle H_x(p(t),x(t),u(t),t)+r(t),y(t)-x(t)\rangle=\Delta_{y(t)}H(p(t),x(t),u(t),t) \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1)=-\varphi_x(\lambda,x(t_1))-q, \tag{12}$$

$$\langle\varphi_x(\lambda,x(t_1))+q,y(t_1)-x(t_1)\rangle=\Delta_{y(t_1)}\varphi(\lambda,x(t_1)), \tag{13}$$

в которой по определению полагаем $r(t)=0$, $q=0$ в случае линейности функций f, F_0, φ по x (линейная по состоянию задача (7), (8)), а также в случае $y(t)=x(t)$ при соответствующих $t\in T$.

В линейной по состоянию задаче (7), (8) модифицированная сопряженная система (10)–(13) в силу определения совпадает со стандартной сопряженной системой (9).

В нелинейной по состоянию задаче (7), (8) алгебраические уравнения

(11) и (13) всегда можно аналитически разрешить относительно величин $r(t)$ и q в виде явных или условных формул (возможно, не единственным образом).

Таким образом, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (10)–(13) всегда можно свести (возможно, не единственным образом) к дифференциальной сопряженной системе с однозначно определенными величинами $r(t)$ и q.

Для доступных управлений $u \in V$, $u^I \in V$ обозначим $p(t,u^I,u,\lambda)$, $t \in T$ — решение модифицированной сопряженной системы (10)–(13) при $x(t)=x(t,u^I)$, $y(t)=x(t,u)$, $u(t)=u^I(t)$. Из определения следует очевидное равенство $p(t,u,u,\lambda)=\psi(t,u)$, $t \in T$.

Проекционные условия улучшения доступного управления $u^I \in V$ с заданным параметром проектирования $\alpha > 0$ имеют вид:

$$u(t)=P_U(u^I(t)+\alpha(H_u(p(t,u^I,u,\lambda),x(t,u),u^I(t),t)+s(t))),\ t \in T, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\Delta_{u(t)}H(p(t,u^I,u,\lambda),x(t,u),u^I(t),t)=\\&=\left\langle H_u(p(t,u^I,u,\lambda),x(t,u),u^I(t),t)+s(t),u(t)-u^I(t)\right\rangle,\end{aligned} \tag{15}$$

в котором в уравнении (15) по определению полагается $s(t)=0$ в случае линейности функции f, F_0 по u (линейная по управлению u задача (7), (8)), или в случае $u(t)=u^I(t)$ при $t \in T$.

Уравнение (15) всегда можно однозначно разрешить относительно величины $s(t)$ (возможно, не единственным образом).

Согласно [5] решение системы (14), (15) обеспечивает улучшение управления $u^I \in V$ для любого параметра $\alpha > 0$ с оценкой улучшения функционала:

$$\Delta_u L(\lambda,u^I) \le -\frac{1}{\alpha}\int_T \left\|u(t)-u^I(t)\right\|^2 dt.$$

При этом улучшение управления гарантируется не только в достаточно малой окрестности исходного управления $u^I \in V$, т. е. рассматриваемая процедура улучшения обладает свойством нелокальности в отличие от известных градиентных методов и других локальных методов улучшения управления.

Условия (14), (15) рассматриваются как задача о неподвижной точке в пространстве управлений для определяемого правыми частями этих условий однозначно выбираемого оператора управления.

Как указано в [5], задача (14), (15) является эквивалентной краевой задаче в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u^\alpha(t),t),\quad x(t_0)=x^0,$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x^I(t), u^I(t), t) - r(t),$$
$$\left\langle H_x(p(t), x^I(t), u^I(t), t) + r(t), x(t) - x^I(t) \right\rangle =$$
$$= \Delta_{x(t)} H(p(t), x^I(t), u^I(t), t)$$
$$p(t_1) = -\varphi_x(\lambda, x^I(t_1)) - q,$$
$$\left\langle \varphi_x(\lambda, x^I(t_1)) + q, x(t_1) - x^I(t_1) \right\rangle = \Delta_{x(t_1)} \varphi(\lambda, x^I(t_1)),$$

в которой

$$u^\alpha(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t), x(t), u^I(t), t) + s(t))),\ t \in T,$$
$$\Delta_{u^\alpha(t)} H(p(t), x(t), u^I(t), t) = \left\langle H_u(p(t), x(t), u^I(t), t) + s(t), u^\alpha(t) - u^I(t) \right\rangle$$

и обозначено $x^I(t) = x(t, u^I)$, $t \in T$.

Эквивалентность краевой задачи и задачи о неподвижной точке (14), (15) понимается в следующем смысле. Пусть пара $(x(t), p(t))$, $t \in T$ является решением краевой задачи. Тогда управление $u^\alpha(t)$, $t \in T$ является решением задачи о неподвижной точке (14), (15). Наоборот, пусть доступное управление $u^\alpha \in V$ является решением задачи (14), (15). Тогда пара $(x(t, u^\alpha), p(t, u^I, u^\alpha, \lambda))$, $t \in T$ является решением краевой задачи.

Таким образом, для улучшения управления $u^I \in V$ достаточно решить задачу о неподвижной точке (14), (15) или эквивалентную ей краевую задачу.

Решения задачи о неподвижной точке (14), (15) и эквивалентной краевой задачи зависят от множителя Лагранжа $\lambda \in R$. Дополним указанные задачи условием удовлетворения ограничения (3) с помощью выбора $\lambda \in R$. В результате получим условия улучшения допустимого управления $u^I \in D$ в задаче (1)–(3) с оценкой, аналогичной [5]:

$$\Delta_u \Phi_0(u^I) = \Delta_u L(\lambda, u^I) \le -\frac{1}{\alpha} \int_T \left\| u(t) - u^I(t) \right\|^2 dt. \tag{16}$$

Предлагаемый подход оптимизации управляемых систем с ограничениями состоит в последовательном решении задач улучшения допустимого управления в форме конструируемых задач о неподвижной точке однозначно определяемого оператора управления с дополнительным условием выполнения ограничения (3).

3. Итерационные алгоритмы

Для реализации задачи (14), (15), (3) рассматривается итерационный процесс с точным выполнением ограничения (3) при $k \ge 0$ с заданным начальным управлением $u^0 \in V$ при $k = 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda),x(t,u^k),u^I(t),t) + s^k(t))),\ t \in T, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\Delta_{u^k(t)} H(p(t,u^I,u^k,\lambda),x(t,u^k),u^I(t),t) = \\ = \left\langle H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda),x(t,u^k),u^I(t),t) + s^k(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\Phi_1(u^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1,u^{k+1})) = 0, \tag{19}$$

в котором на каждой итерации решается неявно заданное от множителя $\lambda \in R$ уравнение (19).

Для численного решения указанной задачи (17)–(19) относительно $\lambda \in R$ можно использовать известные методы.

Распространенный подход основывается на замене условия (19) эквивалентным уравнением:

$$\lambda = G(\lambda, u^{k+1}), \tag{20}$$

в котором функцию $G(\lambda, u^{k+1})$ можно выбирать различными способами по аналогии с [6]. Например, $G(\lambda, u^{k+1}) = \lambda + \beta\Phi_1(u^{k+1})$, $\beta \neq 0$.

Тогда для решения задачи (17), (18), (20) можно использовать известные одношаговые методы последовательных приближений и их модификации [6]. В частности, метод простой итерации при $j \geq 0$ с заданным $\lambda^0 \in R$ при $j = 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^j),x(t,u^k),u^I(t),t) + s^k(t))),\ t \in T,$$

$$\Delta_{u^k(t)} H(p(t,u^I,u^k,\lambda^j),x(t,u^k),u^I(t),t) =$$

$$= \left\langle H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^j),x(t,u^k),u^I(t),t) + s^k(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle,$$

$$\lambda^{j+1} = G(\lambda^j, u^{k+1}).$$

Критерием окончания внутренних итераций по индексу $j \geq 0$ может служить неявное условие:

$$\left|\Phi_1(u^{k+1})\right| \leq \varepsilon_1$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — заданная точность выполнения ограничения (3).

Расчет внешних итераций по индексу $k \geq 0$ проводится до первого выполнения условия:

$$\Phi_0\left(u^{k+1}\right) + \varepsilon_2 \leq \Phi_0\left(u^I\right),$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — заданная точность улучшения допустимого управления. В этом случае строится новая задача (14), (15), (3) для улучшения полученного расчетного управления, рассматриваемого как u^I, и итерационный алгоритм повторяется. При этом в качестве начального приближения управления $u^0 \in V$ при $k = 0$ для итерационного процесса (17)–(19) выбирается полученное расчетное управление.

Если улучшения управления в указанном смысле не происходит, то численный расчет задачи о неподвижной точке (14), (15), (3) проводится до выполнения условия:

$$\left\| u^{k+1} - u^k \right\|_{C(T)} \le \varepsilon_3 ,$$

где $\varepsilon_3 > 0$ — заданная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом построение и расчет последовательных задач улучшения управления заканчиваются.

В результате получаем релаксационную последовательность управлений $u^k \in V$, удовлетворяющих ограничению (3) с заданной точностью $\varepsilon_1 > 0$.

В рассматриваемой схеме реализации для решения задачи (17)–(19) можно использовать другие известные методы. В частности, двухшаговый итерационный процесс при $j \ge 1$ с двумя начальными приближениями λ^0 и λ^1, являющийся аналогом метода секущих [6]:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^j), x(t,u^k), u^I(t), t) + s^k(t))) ,\ t \in T ,$$

$$\Delta_{u^k(t)} H(p(t,u^I,u^k,\lambda^j), x(t,u^k), u^I(t), t) =$$
$$= \left\langle H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^j), x(t,u^k), u^I(t), t) + s^k(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle,$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - \frac{\lambda^j - \lambda^{j-1}}{\Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k)} \Phi_1(u^{k+1}) .$$

Альтернативный подход к решению задачи (14), (15), (3) основывается на ее эквивалентном представлении в форме задачи о неподвижной точке относительно вектора (u,λ):

$$u(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,u^I,u,\lambda), x(t,u), u^I(t), t) + s(t))) ,\ t \in T , \quad (21)$$

$$\Delta_{u(t)} H(p(t,u^I,u,\lambda), x(t,u), u^I(t), t) =$$
$$= \left\langle H_u(p(t,u^I,u,\lambda), x(t,u), u^I(t), t) + s(t), u(t) - u^I(t) \right\rangle, \quad (22)$$

$$\lambda = G(\lambda, u) . \quad (23)$$

Тогда для ее решения можно использовать соответствующие аналоги известных методов последовательных приближений и их модификаций [6]. В частности, метод простой итерации при $k \ge 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^k), x(t,u^k), u^I(t), t) + s^k(t))) ,\ t \in T ,$$

$$\Delta_{u^k(t)} H(p(t,u^I,u^k,\lambda^k), x(t,u^k), u^I(t), t) =$$
$$= \left\langle H_u(p(t,u^I,u^k,\lambda^k), x(t,u^k), u^I(t), t) + s^k(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle,$$

$$\lambda^{k+1} = G(\lambda^k, u^{k+1}) .$$

При $k = 0$ задаются начальное управление $u^0 \in V$ и начальный множитель $\lambda^0 \in R$.

Расчет итерационным алгоритмом задачи о неподвижной точке (21)–(23) проводится до первого одновременного выполнения условий:

$$\left|\Phi_1(u^{k+1})\right| \le \varepsilon_1 ,$$

$$L\left(\lambda^{k+1}, u^{k+1}\right) + \varepsilon_2 < L\left(\lambda^{k+1}, u^I\right),$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ — заданные точность выполнения ограничения и точность улучшения управления соответственно. В этом случае строится новая задача о неподвижной точке (21)–(23) для полученного расчетного управления и итерационный алгоритм повторяется. При этом в качестве начального приближения управления $u^0 \in V$ для итерационного процесса выбирается полученное расчетное управление.

Если улучшения в указанном смысле не происходит, то численный расчет задачи о неподвижной точке (21)–(23) проводится до одновременного выполнения условий:

$$\left|\Phi_1(u^{k+1})\right| \le \varepsilon_1 ,$$

$$\left\|u^{k+1} - u^k\right\|_{C(T)} \le \varepsilon_3 ,$$

где $\varepsilon_3 > 0$ — заданная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом построение и расчет последовательных задач улучшения управления заканчивается.

Для анализа условий сходимости итерационных процессов можно применить известный принцип возмущений аналогично работе [4]. Основным условием сходимости указанных выше итерационных процессов является выполнение свойства «сжимания» [6] для оператора правой части задачи о неподвижной точке. Для сходимости процессов большое значение имеет выбор функции $G(\lambda, u)$ и выбор начального приближения $\lambda^0 \in R$ множителя Лагранжа, которые определяются свойствами конкретной задачи (1)–(3).

Принципиальную возможность сходимости релаксационной последовательности управлений к оптимальному решению можно обосновать на основе достаточных условий существования минимизирующей последовательности управлений в задачах с ограничениями аналогично работе [7].

4. Пример

В качестве иллюстрации приводится простой пример улучшения допустимого управления методом неподвижных точек.

Рассматривается задача оптимального управления с терминальным ограничением-равенством:

$$\dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 0,\ u(t) \in R,\ t \in T = [0,1], \tag{24}$$

$$\Phi_0(u) = \int_T (x^2(t) - u^2(t))dt \to \inf_{u \in V} , \tag{25}$$

$$\Phi_1(u) = x(1) = 0\,. \tag{26}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^I = 0$, которому соответствует решение $x(t,u^I) = 0$, $t \in T$ и значение функционала $\Phi_0(u^I) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу на основе регулярного функционала Лагранжа:

$$L(\lambda,u) = \int_T (x^2(t) - u^2(t))dt + \lambda x(1) \to \inf_{u\in V}, \qquad \lambda \in R\,. \tag{27}$$

Функция Понтрягина и модифицированная дифференциально-алгебраическая сопряженная система в задаче Лагранжа (24), (27) имеют следующий вид:

$$H\left(p,x,u,t\right) = pu - x^2 + u^2,$$

$$\dot p\left(t\right) = 2x(t) - r(t),\ p\left(1\right) = -\lambda,$$

$$-y^2(t) + x^2(t) = (-2x(t) + r(t))(y(t) - x(t))\,.$$

После преобразований модифицированная сопряженная система принимает форму:

$$\dot p\left(t\right) = x(t) + y(t),\ p\left(1\right) = -\lambda\,.$$

Условия улучшения доступного $u^I \in V$ при $\alpha > 0$ в форме задачи о неподвижной точке в вспомогательной задаче (24),(27) имеют вид:

$$u(t) = u^I(t) + \alpha(p(t,u^I,u,\lambda) + 2u + s(t)),$$

$$p(t,u^I,u,\lambda)(u(t) - u^I(t)) + u^2(t) - (u^I(t))^2 =$$

$$= (p(t,u^I,u,\lambda) + 2u^I(t) + s(t))(u(t) - u^I(t)).$$

После преобразования и присоединения ограничения-равенства задача улучшения управления принимает вид:

$$u(t) = u^I(t) + \alpha(p(t,u^I,u,\lambda) + u(t) + u^I(t)),$$

$$x(1,u) = 0\,.$$

Для заданного управления $u^I = 0$ получаем систему уравнений:

$$u(t) = \alpha(p(t,u^I,u,\lambda) + u(t)), \tag{28}$$

$$x(1,u) = 0\,. \tag{29}$$

Краевая задача, эквивалентная системе (28),(29), имеет вид:

$$\dot x(t) = u^\alpha(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 0,$$

$$\dot p\left(t\right) = x(t),$$

$$u^\alpha(t) = \alpha(p(t) + u^\alpha(t))\,.$$

При этом множитель Лагранжа определяется соотношением $\lambda = -p\left(1\right)$.

При $\alpha = 1$ краевая задача допускает единственное решение $x(t) = 0$,

$p(t)=0$, $t\in T$ с выходным управлением $u^{\alpha}(t)=0$, $t\in T$.

При $\alpha\neq 1$ краевая задача принимает эквивалентную форму:

$$\dot{x}(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}p(t),\ x(0)=0,\ x(1)=0,$$
$$\dot{p}(t)=x(t).$$

Проводя анализ уравнения второго порядка:

$$\ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{\alpha-1}x(t)=0,\ x(0)=0,\ x(1)=0,$$

несложно показать, что при $\alpha=\dfrac{k^2\pi^2}{k^2\pi^2-1}$, $k\geq 1$ кроме нулевого решения существуют ненулевые решения краевой задачи:

$$x(t)=C\sin k\pi t,\ p(t)=-\frac{C}{k\pi}\cos k\pi t,\ t\in T,\ C\neq 0$$

с выходными допустимыми управлениями $u^{\alpha}(t)=Ck\pi\cos k\pi t$, $t\in T$.

Указанные выходные управления, согласно (16), обеспечивают строгое улучшение управления $u^I=0$ с оценкой

$$\Delta_{u^{\alpha}}\Phi_0(u^I)\leq -C^2(k^2\pi^2-1)\int_T\cos^2 k\pi t dt=-\frac{C^2}{2}(k^2\pi^2-1).$$

Заключение

Предлагаемый подход неподвижных точек на основе вспомогательной задачи с регулярным функционалом Лагранжа основывается на представлении условий улучшения допустимого управления в форме задачи о неподвижной точке конструируемого оператора управления.

Выделим отличия предлагаемого подхода от известных подходов.

Известный метод Лагранжа основывается на поиске управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности в задаче с ограничениями, представляемых с помощью обобщенного функционала Лагранжа.

Предлагаемый подход неподвижных точек состоит в построении релаксационной последовательности допустимых управлений на основе системы условий улучшения управления в вспомогательной задаче без ограничений с регулярным функционалом Лагранжа, дополненных условиями удовлетворения ограничений с помощью выбора множителя Лагранжа.

Разработанная форма системы условий улучшения управления в виде задачи о неподвижной точке позволяет применить теорию и методы неподвижных точек для построения релаксационных последовательностей допустимых улучшающих управлений, обладающих принципиальной возможностью сходимости к оптимальным решениям задач оптимального управления с ограничениями.

Литература

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 428 с.
2. Необходимое условие в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев [и др.]. М.: Наука, 1990. 320 с.
3. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
4. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.
5. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операций проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров динамических систем // Вестник Бурятского госуниверситета. Математика, информатика. 2017. № 1. С. 38–54. DOI:10.18101/2304-5728-2017-1-38-54.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
7. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997. 288 с.

ON ONE APPROACH TO OPTIMIZATION OF THE CONTROLLED SYSTEMS WITH RESTRICTIONS ON THE BASIS OF A FIXED POINT PROBLEM

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: buldaev@mail.ru

Dmitriy O. Trunin
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Senior Lecturer,
Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: tdobsu@yandex.ru

In the article we consider a new approach to solving optimal control problems with constraints based on construction and solution of a system of conditions for improving control in the form of a fixed point problem for control operator. To construct these conditions we apply the transition to an auxiliary problem without restrictions and with a regular Lagrange functional. Iterative algorithms for successive control improvement are constructed on the basis of a fixed point problem. We illustrate this approach by an example.
Keywords: controlled system with constraints; conditions for improving control; a fixed point problem.

References

1. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow: Nauka Publ., 1979. 428 p.
2. Afanasiev A. P., Dikusar V. V., Milyutin A. A., Chukanov S. A. *Neobkhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii* [Necessary Condition in Optimal Control]. Moscow: Nauka Publ., 1990. 320 p.

3. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.

4. Buldaev A. S. *Metody vozmushchenii v zadachakh uluchsheniya i optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Perturbation Methods in Problems of Improving and Optimizing Control Systems]. Ulan-Ude: Buryat State University Publ, 2008. 260 p.

5. Buldaev A. S. Metody nepodvizhnykh tochek na osnove operatsii proektirovaniya v zadachakh optimizatsii upravlyayushchikh funktsii i parametrov dinamicheskikh sistem [Fixed-Point Methods Based on Design Operations in Optimization Problems of Control Functions and Parameters of Dynamical Systems]. *Vestnik Buryatskogo gosuniversiteta. Matematika, informatika — Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Computer Science.* 2017. No. 1. Pp. 38–54. DOI: 10.18101/2304-5728-2017-1-38-54.

6. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow: Nauka Publ., 1989. 432 p.

7. Gurman V. I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [Expansion Principle in Control Problems]. Moscow: Nauka Publ., 1997. 288 p.