ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.36
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-3-22-39

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ[1]

© Новиков Михаил Алексеевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
E-mail: nma@icc.ru

В статье исследуется устойчивость стационарного движения нелинейной механической консервативной автономной системы, описывающей вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Для исследуемой системы известны три первых общих интеграла: энергии, момент количества движения, Пуассона. При равенстве Аппельрота, связывающем моменты инерции тела с координатами центра масс, допускается частный интеграл Гесса. Исследуемое стационарное движение имеет место и при существовании интеграла Гесса.
Исследование устойчивости проведено по уравнениям линейного приближения возмущенного движения. Оно опирается на существование только нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения с соответствующими им простыми элементарными делителями. Это выражается системой трех неравенств от коэффициентов характеристического уравнения, притом двукратный нулевой корень имеет простые элементарные делители. Анализ трех неравенств, выражающих чисто мнимые простые корни характеристического уравнения, позволил выделить семь областей решений. Отдельно рассмотрены случаи вырождения характеристического уравнения: появление дополнительных нулевых и кратных чисто мнимых корней.
В частности, установлена неустойчивость в линейном приближении при условии существования частного интеграла Гесса. Показана необходимость применения системы аналитических вычислений.
Ключевые слова: устойчивость движения; интеграл уравнений движения; характеристическое уравнение; элементарный делитель.

Введение

При проектировании механических объектов часто проводится исследование динамических свойств. В качестве таких свойств могут рассматриваться, в частности, выделение стационарных или установившихся движений и установление их устойчивости [1, 2]. Исследование устойчивости опирается на известные методы Ляпунова [1–4]. В настоящей статье рассматривается механическая система,

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-8081.2016.9).

описываемая дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B-C)qr + z_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C-A)rp + x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A-B)pq - x_0\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_0 \neq 0 \neq z_0$, A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси; x_0, z_0 — координаты центра масс в тех же осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ.

Для системы (1) известны первые общие интегралы [5]

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2x_0\gamma_1 + 2z_0\gamma_3 = const,$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = const,$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

При условии Аппельрота

$$AC(x_0^2 + z_0^2) = B(Ax_0^2 + Cz_0^2) \tag{2}$$

система (1) допускает частный линейный интеграл Гесса [5] $V_3 = Ax_0p + Cz_0r = 0$. В связи с этим представляет интерес нахождение условий устойчивости некоторых стационарных движений и в случаях, когда не выполняется равенство Аппельрота.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одно из стационарных движений для системы (1)

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{-z_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(C-A)x_0z_0}}, \quad q_0 = 0, \quad \gamma_{10} = \frac{-Cz_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \\ r_0 = \frac{x_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C(C-A)x_0z_0}}, \quad \gamma_{20} = 0, \quad \gamma_{30} = \frac{Ax_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь рассматриваются движения, для которых $C > A$, $x_0z_0 > 0$. Ставится цель исследования устойчивости стационарного движения (1.1). Оно имеет место и при существовании частного интеграла Гесса.

Связки из первых интегралов возмущенного движения не смогли составить знакоопределенную квадратичную форму. Вторым методом Ляпунова в этом случае не удалось установить устойчивость стационарного движения (1.1). Ввиду сложности вычислительной задачи предложим получение достаточных условий устойчивости (1.1) простейшей линеаризованной системы уравнений движения.

2. Необходимые условия устойчивости по линейному приближению

Проведем исследование устойчивости (2) по уравнениям первого приближения. Составим отклонения $x_1 = p - p_0$; $x_2 = q - q_0$; $x_1 = p - p_0$; $x_2 = q - q_0$; $x_3 = r - r_0$, $x_4 = \gamma_1 - \gamma_{10}$; $x_5 = \gamma_2 - \gamma_{20}$; $x_6 = \gamma_3 - \gamma_{30}$. Необходимые условия устойчивости будем получать по характеристическому уравнению, составленному из дифференциальных уравнений линеаризованной системы возмущенного движения,

$$\dot{x} = D_1 x, \tag{2.1}$$

где матрица линейной части имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & (B-C)r_0/A & 0 & 0 & z_0/A & 0 \\ (C-A)r_0/B & 0 & (C-A)p_0/B & -z_0/B & 0 & x_0/B \\ 0 & (A-B)p_0/C & 0 & 0 & -x_0/C & 0 \\ 0 & -\gamma_{30} & 0 & 0 & r_0 & 0 \\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & -r_0 & 0 & p_0 \\ 0 & \gamma_{10} & 0 & 0 & -p_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы D_1 будет таким:

$$f(\lambda) = det(D_1 - \lambda E) = \lambda^2 f_1(\lambda) = 0, \tag{2.2}$$

где $f_1(\lambda) = \lambda^4 + k_2\lambda^2 + k_0$ при обозначениях

$$k_2 = \frac{1}{ABC(C-A)x_0^2 z_0^2 \sqrt{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2}} \{A^2[C^2 - C(A+B) + 2AB]\, x_0^4 +$$

$$+ AC[2(C-A)^2 + B(A+C)]x_0^2 z_0^2 + C^2[A^2 - A(B+C) + 2BC]z_0^4\},$$

$$k_0 = \frac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)s_0(x_0, z_0)\varphi(x_0, z_0)}{A^2BC^2(C-A)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)},$$

$$\varphi(x_0, z_0) = A^3x_0^4 + 4AC(C-A)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4,$$

$$s_0(x_0, z_0) = AC(x_0^2 + z_0^2) - B(Ax_0^2 + Cz_0^2).$$

Здесь и далее требуется огромное число различных вычислений, связанных с алгебраическими операциями над матрицами, факторизацией полиномиальных выражений. Это выполняется системой аналитических вычислений «Mathematica» на персональных компьютерах.

При непростых элементарных делителях нулевого корня (2.2) независимо от остальных корней уравнения $f_1(\lambda) = 0$ стационарное движение (2.1) будет неустойчивым [3, 4, 6]. Известно [7], что

элементарные делители матрицы D_1 и любой другой матрицы, полученной из D_1 элементарными преобразованиями над строками и столбцами, будут одинаковыми. Для этого умножим D_1 слева и справа на соответствующие невырожденные матрицы T_1 и Q_1. Полагаем, например, матрицы преобразования такими:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0/z_0 & t_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43}^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{52}^{(1)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cz_0/(Ax_0) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{31}^{(1)} & 0 & 1 & q_{34}^{(1)} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{52}^{(1)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ q_{61}^{(1)} & 0 & q_{63}^{(1)} & q_{64}^{(1)} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где обозначено:

$$t_{14}^{(1)} = \sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\sqrt{\frac{(C-A)(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A^3Cx_0z_0}}, \qquad t_{43}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{AC(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{(C-A)x_0z_0}}, \qquad t_{52}^{(1)} = \frac{B}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \qquad q_{31}^{(1)} = \frac{Ax_0(2Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C^2z_0^3},$$

$$q_{34}^{(1)} = -\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\sqrt{\frac{Ax_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C^5(C-A)z_0^7}}, \qquad q_{52}^{(1)} = \frac{B-A}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{Cz_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(C-A)x_0^3}}, \qquad q_{61}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A^3(C-A)x_0^3(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C^3z_0^5}},$$

$$q_{64}^{(1)} = \frac{-Ax_0(Ax_0^2 + 2Cz_0^2)}{C^2 z_0^3}, \quad q_{63}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \sqrt{\frac{C(C-A)z_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{Ax_0^3}}.$$

В результате получается

$$T_1 D_1 Q_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0/B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0/C & 0 \\ 0 & d_{42}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{53}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$d_{42}^{(2)} = \frac{s_0(x_0, z_0)}{(C-A)x_0\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \qquad d_{53}^{(2)} = \frac{-C^2z_0^2}{Ax_0^2\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}.$$

Такое представление матриц D_2, T_1, Q_1 обусловлено выбором базовых строк и столбцов матрицы D_1. Вместе с тем операцию «сжатие-растяжение» можно выполнить как левосторонним, так и правосторонним преобразованием матриц. Матрица D_2 имеет равный двум дефект. В предположении $s_0(x_0, z_0) \neq 0$ тогда двукратный нулевой корень уравнения (2.2) имеет простые элементарные делители [7].

3. О достаточных условиях устойчивости

Исследование достаточных условий устойчивости линейных консервативных систем сводится к необходимости существования чисто мнимых или нулевых корней характеристического уравнения с всеми простыми элементарными делителями [8]. При ранее установленных простых нулевых корнях уравнения (2.2) для дальнейшего исследования необходим анализ корней уравнения $f_1(\lambda) = 0$, который сводится здесь к неравенствам

$$k_2 > 0, \; k_0 > 0, \quad m_2 = k_2^2 - 4k_0 > 0. \tag{3.1}$$

Свободный член уравнения $f_1(\lambda) = 0$ обращается в нуль, поэтому удобнее осуществить замену переменных

$$B = \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2} + a \tag{3.2}$$

и вещественный параметр a может принимать значения разных знаков.

Выполняя подстановку (3.2) и умножая m_2 на $AB^2C(C-A)x_0^2z_0^2(A^2x_0^2+C^2z_0^2)>0$, получим $F_2=b_2a^2+b_1a+b_0$, где

$$b_2=(Ax_0^2+Cz_0^2)^2[AC(x_0^2+z_0^2)^2+12(C-A)^2x_0^2z_0^2),$$

$$b_1=2(Ax_0^2+Cz_0^2)\{AC(Ax_0^2+Cz_0^2)^2+$$

$$+(C-A)^2[(6A^2+4AC)x_0^2+(4AC+6C^2)z_0^2]\},$$

$$b_0=AC[(Ax_0^2+Cz_0^2)^2+4(C-A)^2x_0^2z_0^2]^2.$$

Тогда система неравенств (3.1) запишется в виде

$$F_1>0,\quad F_0>0,\quad F_2>0. \tag{3.3}$$

Условия устойчивости оказались сведенными к системе неравенств, и поэтому прежде изучим неравенство $F_1>0$.

4. Дополнительные требования к условиям устойчивости

Рассмотрим возможность существования системы неравенств

$$A^2-A(B+C)+2BC<0,\quad C^2-C(A+B)+2AB>0. \tag{4.1}$$

Вместе с тем должны учитываться основные свойства твердого тела $A+B>C,\ A+C>B$. Последнее свойство $B+C>A$ выполняется тождественно ввиду $C>A$. Предварительно разрешим первое неравенство (4.1) относительно A:

$$(B+C-\sqrt{d_1})/2<A<(B+C+\sqrt{d_1})/2, \tag{4.2}$$

где $d_1=[(B-C)^2-4BC]$ — дискриминат первого квадратичного неравенства (4.1). Для существования решений квадратного неравенства здесь необходимо $d_1\geq 0$. Учитывая строгость неравенства в (4.2), должно быть $d_1\neq 0$. Последнее условие $d_1>0$ приводит к необходимости анализа двух решений

$$1.\,B>(3+2\sqrt{2})C, \tag{4.3}$$

$$2.\,0<B<(3-2\sqrt{2})C. \tag{4.4}$$

В предположении решения (4.3) проверим выполнение свойства $A+C>B$. Составим выражение $A+C-B$, которое должно быть положительным. Подставляя здесь ограниченные значения B, вычисления получают $A+C-B<A+C-(3+2\sqrt{2})C=$ $=A-2(\sqrt{2}+1)C$. Ввиду начально заданного $C>A$ последнее выражение только отрицательно, чего не должно быть в твердом теле.

Для решений B из неравенства (4.4) проверим выполнение свойства $A+B>C$. Аналогично составим $A+B-C<(B+C+\sqrt{d_1})/2+$

$+B-C=[3B-C+\sqrt{d_1}]/2=S_1$. Для оценки знака S_1 сравним их рациональные и иррациональные части. Здесь выполняется $3B-C<3(3-2\sqrt{2})C-C=2(4-3\sqrt{2})C<0$ ввиду $3\sqrt{2}>4$. Далее имеет место $(3B-C)^2-d_1=8B^2>0$. Отсюда заключаем $S_1<0$, что соответствует $A+B<C$. Так как это недопустимо в твердом теле, то система неравенств (4.1) несовместна. Отметим, что также несостоятельны системы неравенств $A^2-A(B+C)+2BC<0$, $C^2-C(A+B)+2AB\geq 0$ и $A^2-A(B+C)+2BC\leq 0$, $C^2-C(A+$ $+B)+2AB>0$. Система уравнений $A^2-A(B+C)+2BC=0$, $C^2-C(A+B)+2AB=0$ несовместна, так как она может существовать только в двух случаях: $1.B=0$, $2.B=C$. Здесь второй случай приводит к $A=0$, и оба эти случая соответствуют плоскому телу.

Аналогично рассмотрим вторую систему неравенств

$$A^2-A(B+C)+2BC>0,\ C^2-C(A+B)+2AB<0. \tag{4.5}$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим необходимое для выполнения (4.5) условие $(C-A)(A+C-3B)<0)$. При $C>A$ отсюда следует

$$A+C-3B<0. \tag{4.6}$$

Второе неравенство (4.5) разрешим относительно C:

$$(A+B-\sqrt{d_2})/2<C<(A+B+\sqrt{d_2})/2, \tag{4.7}$$

где $d_2=(B-A)^2-4AB$, которое должно быть положительным ввиду строгого второго неравенства в (4.5). Здесь могут существовать два возможных решения:

$$1.B>(3+2\sqrt{2})A, \tag{4.8}$$

$$2.0<B<(3-2\sqrt{2})A. \tag{4.9}$$

Для первого решения (4.8) проверим выполнение свойства $A+C>B$. Составим выражение $A+C-B<A+(A+B+\sqrt{d_2})/2-$ $-B=[3A-B+\sqrt{d_2}]/2=S_2$. Так как здесь $3A-B<3A-(3+$ $+2\sqrt{2})A=-2\sqrt{2}A<0$, то знак рациональной части S_2 будет отрицательным. Далее $(3A-B)^2-d_2=8A^2>0$, откуда следует $S_2<0$. Следовательно, решение (4.8) для системы (4.5) не состоятельно.

Другое решение B из (4.9) должно, в частности, удовлетворять условию (4.6). Здесь следует оценка $A+C-3B>A+(A+B-$ $-\sqrt{d_2})/2-3B=[3A-5B-\sqrt{d_2}]/2=S_3$. Легко показать, что здесь $3A-5B>3A-5(3-2\sqrt{2})A=2(5\sqrt{2}-6)A>0$. Для проверки знака S_3

составим разность $(3A-5B)^2-d_2=8(A^2-3AB+3B^2)=S_4$. Так как квадратичная форма относительно A,B в последнем выражении положительно определена, то $S_4>0$, и отсюда следует $S_3>0$, что приводит к $A+C-3B>0$. Но последнее не согласуется с (4.6) и поэтому система (4.5) несовместна. Аналогичные выкладки приводят к невозможности существования системы неравенств $A^2-A(B+C)+$ $+2BC\geq 0,\ C^2-C(A+B)+2AB\leq 0.$

Рассмотрим следующую систему: $A^2-A(B+C)+2BC\leq 0,$ $C^2-C(A+B)+2AB\leq 0.$ Складывая оба неравенства, получим $(C-A)^2+B(C+A)\leq 0$, что невозможно для вещественных положительных A,B,C. Таким образом, для выполнения $F_1>0$ следует рассматривать систему

$$A^2-A(B+C)+2BC>0,\ C^2-C(A+B)+2AB>0. \qquad (4.10)$$

При этом может допускаться обращение в нуль только одного из неравенств (4.10).

5. Полный набор требований к получению условий устойчивости

Составим наиболее полный набор для выполнения системы неравенств (3.3). Введем в рассмотрение уравнение

$$f_1(\sqrt{\mu})=f_2(\mu)=0. \qquad (5.1)$$

С учетом ранее установленных в предыдущем разделе свойств полный набор возможных требований будет таким:

$1.C^2-C(A+B)+2AB>0$ (коэффициент при x_0^4 в выражении F_1 должен быть положительным),

$2.A^2-A(B+C)+2BC>0$ (коэффициент при z_0^4 в выражении F_1 должен быть положительным),

$3.A+B-C>0$ (свойство моментов инерции твердого тела),

$4.A+C-B>0$ (свойство моментов инерции твердого тела),

$5.F_1>0$ (сумма корней уравнения (5.1) должна быть отрицательной),

$6.F_0>0$ (произведение корней уравнения (5.1) должна быть положительным),

$7.F_2>0$ (корни уравнения (5.1) только вещественны).

Применим здесь подстановку (2.4), тогда в том же порядке требования запишутся:

$1.a(Ax_0^2+Cz_0^2)(2A-C)+C[A^2x_0^2+(2A^2-2AC+C^2)z_0^2]>0$,

$2. a(Ax_0^2 + Cz_0^2)(2C - A) + A[(A^2 - 2AC + 2C^2)x_0^2 + C^2 z_0^2] > 0$,

$3. a(Ax_0^2 + Cz_0^2) + A^2 x_0^2 + C(2A - C)z_0^2 > 0$,

$4. a(Ax_0^2 + Cz_0^2) - (A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2) > 0$,

$5. a(Ax_0^2 + Cz_0^2)[2(A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2) - AC(x_0^2 + z_0^2)] + AC[(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2 +$
$+ 4(C - A)^2 x_0^2 z_0^2] > 0$,

$6. a\varphi(x_0, z_0) < 0$,

$7. b_2 a^2 + b_1 a + b_0 > 0$.

Дискриминант биквадратного уравнения $\varphi(x_0, z_0) = 0$ обозначим $d_3 = A^2 C^2 (4A^2 - 7AC + 4C^2) > 0$. Дискриминант квадратного относительно параметра a уравнения $b_2 a^2 + b_1 a + b_0 = 0$ равен $d_4 = -36(C - A)^2 x_0^4 z_0^4 \varphi(x_0, z_0)$.

Шестое требование оказалось факторизованным. Поэтому основное разделение условий при анализе семи перечисленных требований проведем для положительных и отрицательных значений параметра a. Для краткости изложения введем обозначения

$$a_1 = \frac{C[A^2 x_0^2 + (2A^2 - 2AC + C^2)z_0^2]}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)(C - 2A)},$$

$$a_2 = \frac{-A[(A^2 - 2AC + 2C^2)x_0^2 + C^2 z_0^2]}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)(2C - A)} < 0,$$

$$a_3 = \frac{-A^2 x_0^2 + C(C - 2A)z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2}, \quad a_4 = \frac{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2}{Ax_0^2 + Cz_0^2} > 0,$$

$$a_5 = \frac{-AC[(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2 + 4(C - A)^2 x_0^2 z_0^2]}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(2A - C)x_0^2 + C(2C - A)z_0^2]}.$$

Вместе с тем введем точечные значения относительного параметра $t = z_0^2 / x_0^2 > 0$. Наиболее часто используемой величиной при анализе является больший положительный корень уравнения $\varphi(x_0, z_0) = 0$: $t_8 = \dfrac{A[2(C - A) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}]}{C^2} > 0$. В пятом и третьем требованиях будут применяться величины $t_5 = \dfrac{A(C - 2A)}{C(2C - A)}$, $t_3 = \dfrac{A^2}{C(C - 2A)}$.

Перечисленные величины a_i $(i = 1, \ldots, 5)$, t_j $(j = 3, 5, 8)$ введены для выбора из них наибольших или наименьших значений при решении

систем неравенств. В зависимости от знака $(C-2A)$ некоторые из них участвуют в оценках нижних и верхних точных границ.

6. Получение решений системы неравенств (3.3)

Проведем параметрический анализ решений системы (3.3) в терминах A, C, a, t, и вначале положим $a>0$. Из шестого требования тогда необходимо $\varphi(x_0, z_0)<0$, что приводит к выбору значений $t>t_8$. Далее рассмотрим первое распределение моментов инерции тела $A<C<2A$. При любых положительных a тождественно выполняются первое, второе, третье и пятое требования. При этом седьмое требование заведомо выполнено при всех положительных слагаемых многочлена $b_2a^2+b_1a+b_0$. Четвертое требование ограничивает сверху значения параметра a. При отсутствии других ограничений одну часть решений системы неравенств (3.3) можно записать:

$$A<C\le 2A,\ \ t>t_8,\ \ 0<a<a_4. \tag{6.1}$$

Для другой возможности распределения моментов инерции $C>2A$ тождественно выполняются второе и седьмое требования. В пятом требовании знак выражения $[A(2A-C)x_0^2+C(2C-A)z_0^2]$ зависит от отклонения $(t-t_5)$. Сравним значения t_5, t_8:

$$t_8-t_5=\frac{A[(2A^2-4AC+3C^2)+(2C-A)\sqrt{4A^2-7AC+4C^2}]}{C^2(2C-A)}.$$

В последнем выражении рациональная часть представляет положительно определенную относительно A, C квадратичную форму, и положительную иррациональную часть. Поэтому $t_5<t_8$, и при положительных a величину t_5 можно не учитывать. Следовательно, в этом случае пятое требование выполняется тождественно. Тогда можно получить нетривиальную область решений системы (3.3) при выполнении условий

$$t>t_8,\ \ C>2A,\ \ \ \max[0,a_3]<a<\min[a_1,a_4].$$

Для сравнения величин a_1, a_4 составим разность $a_1-a_4=2A^2C-2A$, которая в данном случае положительна. Следовательно, верхней гранью является a_4. При оценке знака a_3 используем t_3:

$$t_3-t_8=\frac{-A[4A^2-7AC+2C^2+(C-2A)\sqrt{4A^2-7AC+4C^2}]}{(C-2A)}.$$

Здесь рациональная часть выражения в квадратных скобках является знакопеременной квадратичной формой, а иррациональная часть положительна. Отрицательный знак этого выражения может оказаться в

единственном случае, когда

$$C > 2A, \quad 4A^2 - 7AC + 2C^2 < 0,$$

$$|4A^2 - 7AC + 2C^2| > (C - 2A)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}.$$

Легко подсчитать

$$(4A^2 - 7AC + 2C^2)^2 - (C - 2A)^2(4A^2 - 7AC + 4C^2) =$$
$$= -AC(C - A)(5C - 12A).$$

Решением последних неравенств является $2A < C < 12/5A.$

Следовательно, при $2A < C < 12/5A$ выполняется $t_3 > t_8$, а при $C > 12/5A$ будет $t_3 < t_8$. Тогда при значениях $t < t_3$ получим $a_3 < 0$, а для $t > t_3$ следует $a_3 > 0$. Окончательно при $2A < C < 12/5A$ величина $a_3 < 0$ на отрезке $t \in (t_8; t_3)$, и $a_3 > 0$ при $C > 12/5A$.

Следующие решения системы неравенств (3.3) можно записать:

$1. t_3 \geq t_8 : \ 2A < C \leq 12/5A, \ [t_8 < t \leq t_3; \ 0 < a < a_4] \cup [t > t_3; \ a_3 < a < a_4],$ (6.2)

$2. t_3 < t_8 : C > 12/5A, \ a_3 < a < a_4.$ (6.3)

Далее рассмотрим другую часть значений параметра a: $a < 0$. Шестое требование здесь приводит к $\varphi(x_0, z_0) > 0$, откуда областью определения следует $t \in (0; t_8)$. Ввиду отрицательности дискриминанта d_4 и $b_2 > 0$ седьмое требование выполняется тождественно. Четвертое требование можно не принимать в расчет вследствие $a < 0 < a_4$ (что заведомо выполняется). Здесь также выделим два распределения моментов инерции тела:

$1. A < C \leq 2A, \ 2. C > 2A.$

Для первого распределения сразу понадобится установить требования на параметр: $a > a_1, \ a > a_2, \ a > a_3 \ (a_1 < 0, \ a_2 < 0)$. В пятом требовании имеется две возможности:

1) $t < t_5$ (где должно выбираться $a < a_5 \ (a_5 > 0)$),

2) $t > t_5$ (где выбирается $a > a_5 \ (a_5 < 0)$).

Первая возможность может не учитываться для отрицательных значений a, где F_1 получается суммой двух положительных слагаемых. Решение системы (3.3) тогда может существовать при условиях:

$$t \in (0; t_5), \ \ A < C \leq 2A, \ \ \max[a_1, a_2, a_3] < a < 0, \quad \text{и}$$
$$t \in (t_5; t_8), \ \ A < C \leq 2A, \max[a_1, a_2, a_3, a_5] < a < 0.$$

Сразу установим соотношения

$$a_1 - a_2 = \frac{2(C-A)(A^2 - AC + C^2)}{(C-2A)(2C-A)}, \quad a_1 - a_3 = \frac{2A(C-A)}{C-2A},$$

$$a_2 - a_3 = \frac{-2(C-A)}{2C-A}.$$

При первом распределении $A < C \le 2A$ их легко упорядочить: $a_1 < a_2 < a_3 < 0$. Для значений $t \in (t_5; t_8)$ нужно учитывать a_5:

$$a_5 - a_3 = \frac{-(C-A)[2A^3x_0^4 + AC(3C-A)x_0^2z_0^2 + 2C^2(C-A)z_0^4]}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(2A-C)x_0^2 + C(2C-A)z_0^2]} < 0$$

(здесь все слагаемые в скобках положительны). Следовательно, на отрезке $(0; t_8)$ для рассматриваемых $A < C \le 2A$ точной нижней гранью значений параметра a является a_3. Тогда можно записать решение системы неравенств (3.3):

$$A < C \le 2A, \ t \in (0, t_8), \ a_3 < a < 0. \tag{6.4}$$

Рассмотрим другой случай распределения моментов инерции $C > 2A$. Здесь прежде всего следует учитывать только те значения параметра t, при которых $a_3 < 0$. Если при этом $t_3 > t_8$, то гарантируется значение $a_3 < 0$. Это выполняется, как ранее установлено, при $2A < C < 12/5A$. Далее опорной точкой является $t = t_5 : t_3 - t_5 = \dfrac{-A(C-A)(C-5A)}{C(C-2A)(2C-A)}$. Отсюда можно заключить, что $t_3 \ge t_5$ при $2A < C \le 5A$, и $t_3 < t_5$ при $C > 5A$. В промежутке $(0; t_5)$ пятое требование выполняется тождественно при всех отрицательных значениях a как сумма положительных слагаемых. Тогда возможные решения системы (3.3) могут быть при выполнении условий $\max[a_2, a_3] < a < \min[0, a_1]$. Точно так же в промежутке $(t_5; t_8)$ условиями будут $\max[a_2, a_3, a_5] < a < \min[0, a_1]$.

При $C > 2A$ легко установить: $a_1 > 0, a_3 > a_2 > a_5$. Тогда решения системы неравенств (4.5) в этом случае можно записать:

$$1. t_3 \ge t_8 : 2A < C \le 12/5A, t \in (0; t_8), \ a_3 < a < 0, \tag{6.5}$$

$$2. t_3 \in (t_5; t_8) : 12/5A \le C < 5A, \ t \in (0; t_3), \ a_3 < a < 0, \tag{6.6}$$

$$3. t_3 \in (0; t_5) : C \ge 5A, \ t \in (0; t_3), \ a_3 < a < 0. \tag{6.7}$$

Интересно отметить, что первое и второе требования хотя и участвовали в анализе, но не отразились в условиях устойчивости.

7. Исследование вырожденных случаев

Рассмотрим возможные особые случаи при анализе системы неравенств (3.3). Они возникают при обращении в нуль свободного члена уравнения $f_1(\lambda)=0$, когда получается кратный нулевой корень $f_1(\lambda)=0$, и при существовании кратных чисто мнимых корней. При этом кратный нулевой корень уравнения $f_1(\lambda)=0$ существует в двух случаях: 1.$a=0$ $(s_0(x_0,z_0)=0)$, 2.$\varphi(x_0,z_0)=0$.

В первом случае при $a=0$ выполняется равенство Аппельрота (1.2) и возникает четырехкратный нулевой корень уравнения (2.2). Легко видеть, здесь дефект матрицы D_2 равен трем. Следовательно, кратному нулевому корню при $a=0$ соответствуют не все простые элементарные делители, что приводит к растущему решению системы (2.1) [3, 4, 6] и неустойчивости стационарного движения (1.1).

Для анализа других случаев вырождения будем предполагать $s_0(x_0,z_0)\neq 0$, и составим $\lambda-$матрицу $(D_1-\lambda E)$. В результате элементарных операций, что сводится к линейным операциям над строками и столбцами и попросту выражается умножением $(D_1-\lambda E)$ слева на матрицу $T(\lambda)$ и справа на матрицу $Q(\lambda)$, получим

$$D_3(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & d_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0/B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0/C & 0 \\ d_{41}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{54}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{63}^{(3)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$d_{12}^{(3)}=\frac{-s_0(x_0,z_0)}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{Ax_0^2+Cz_0^2}{A^3C(C-A)x_0^3z_0}},$$

$$d_{54}^{(3)}=\frac{-1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{(Ax_0^2+Cz_0^2)^3}{AC(C-A)x_0^3z_0}},$$

$$d_{63}^{(3)}=\frac{3\lambda}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C(C-A)(Ax_0^2+Cz_0^2)^3}{A^3x_0^3}}=b_{63}\lambda,$$

$$d_{41}^{(3)}=\frac{\lambda}{3s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{Ax_0}{C(C-A)z_0^3(Ax_0^2+Cz_0^2)^5}}\psi_4(\lambda)=b_{41}\lambda\psi_4(\lambda),$$

Левостороняя матрица преобразования здесь имеет вид

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & Cz_0/(Ax_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ 0 & t_{52} & -C/x_0 & 0 & 1 & 0 \\ t_{61} & -B\lambda/x_0 & t_{63} & -z_0/x_0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$t_{41}=\frac{1}{3s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{ACx_0}{(C-A)z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^5}}\ \{-A^2BCx_0z_0\times$$
$$\times(Ax_0^2+Cz_0^2)+Ax_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,[A^3Bx_0^4+AC(3A^2-AB-4AC+$$
$$+3BC+C^2)x_0^2z_0^2+C^2(2A^2-2AB-2AC+3BC)z_0^4]\lambda^2-2z_0(Ax_0^2+$$
$$+Cz_0^2)s_0(x_0,z_0)(A^2x_0^2+C^2z_0^2)\},$$

$$t_{42}=\frac{-B\lambda}{3(C-A)z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^2}[AC(C-A)\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,x_0z_0\lambda^2+A^3x_0^4+$$
$$+AC(A+C)x_0^2z_0^2+C^3z_0^4],$$

$$t_{43}=\frac{-1}{3s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{ACx_0}{(C-A)z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^5}}\ \{ABC^2(C-A)\times$$
$$\times(Ax_0^2+Cz_0^2)x_0z_0^2\lambda^4+Cz_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,[A^2(3AB-2AC-2BC+2C^2)x_0^4+$$
$$+AC(A^2+3AB-4AC-BC+3C^2)x_0^2z_0^2+BC^3z_0^4]\lambda^2+2x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)\times$$
$$\times s_0(x_0,z_0)(A^2x_0^2+C^2z_0^2)\},$$

$$t_{44}=\frac{1}{3(C-A)(Ax_0^2+Cz_0^2)^2}[AC\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,x_0z_0\lambda^2+A^2(3C-A)x_0^4+$$
$$+2AC(2C-A)x_0^2z_0^2+C^3z_0^4],$$

$$t_{45}=\lambda\sqrt{\frac{AC(C-A)x_0^3z_0}{(Ax_0^2+Cz_0^2)^3}}\ \sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2},$$

$$t_{52}=\frac{1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{Cz_0(Ax_0^2+Cz_0^2)}{A(C-A)x_0^3}},$$

$$t_{46}=\frac{-x_0}{3(C-A)z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^2}[AC\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,x_0z_0\lambda^2+A^3x_0^4+$$

$$+2AC(2A-C)x_0^2z_0^2+C^2(3A-2C)z_0^4],$$

$$t_{61}=\frac{1}{s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{AC(C-A)z_0}{x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)}}[ABx_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+$$

$$+z_0s_0(x_0,z_0)],$$

$$t_{63}=\frac{1}{s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{AC(C-A)z_0}{x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)}}[BCx_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2-$$

$$-x_0s_0(x_0,z_0)].$$

Правосторонняя матрица Q запишется:

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix} q_{11} & 0 & Cz_0/(Ax_0) & 0 & 0 & 0\\ q_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & 1 & 0 & 0\\ q_{51} & q_{52} & -C\lambda/x_0 & 0 & 1 & 0\\ q_{61} & q_{62} & t_{63} & z_0/x_0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$q_{11}=\frac{1}{3s_0(x_0,z_0)}(Ax_0^2+Cz_0^2)[-ABCx_0z_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+AC(2A-$$

$$-3B+C)x_0^2z_0^2+C^2(A-B)z_0^4],$$

$$q_{21}=\frac{\lambda\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}{s_0(x_0,z_0)}\sqrt{\frac{A^3C(C-A)x_0^3z_0}{Ax_0^2+Cz_0^2}},$$

$$q_{31}=\frac{Ax_0}{3Cz_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^2s_0(x_0,z_0)}[ABCx_0z_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+$$

$$+A^2(C-B)x_0^4+AC(A-3B+2C)x_0^2z_0^2+2C^2(A-B)z_0^4],$$

$$q_{41}=\frac{-1}{3s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{AC(C-A)x_0}{z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^5}}\{A^2BCx_0^2z_0^2(Ax_0^2+$$

$$+Cz_0^2)\lambda^4+Ax_0^2\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,[A^2(C-B)x_0^4+AC(2C+B-2A)x_0^2z_0^2]\lambda^2+$$

$$+z_0(4Ax_0^2-Cz_0^2)(A^2x_0^2+C^2z_0^2)z_0s_0(x_0,z_0)(Ax_0^2+Cz_0^2)\},$$

$$q_{43}=\frac{1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C^3(C-A)z_0}{Ax_0(Ax_0^2+Cz_0^2)}}[-Ax_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+$$

$$+2z_0(Ax_0^2+Cz_0^2)], \qquad q_{42}=\frac{C(A-2B)z_0\lambda^2}{A^2x_0^2+C^2z_0^2},$$

$$q_{51}=\frac{A\lambda}{3z_0s_0(x_0,z_0)(Ax_0^2+Cz_0^2)}[-ABCx_0z_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+$$

$$+A^2(B-C)x_0^4-2AC(C-A)x_0^2z_0^2+C^2(A-B)z_0^4],$$

$$q_{52}=\frac{B-A}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{Cz_0(Ax_0^2+Cz_0^2)}{A(C-A)x_0^3}},$$

$$q_{61}=\frac{-1}{3s_0(x_0,z_0)\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A^3(C-A)x_0}{Cz_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^5}}\,\{ABC^2x_0^2z_0^2(A^2x_0^2+$$

$$+C^2z_0^2)\lambda^4+Cz_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,[A^2(C-2B)x_0^4-AC(2A+B-2C)x_0^2z_0^2+$$

$$+C^2(B-A)z_0^4]\lambda^2-z_0(Ax_0^2-4Cz_0^2)(A^2x_0^2+C^2z_0^2)s_0(x_0,z_0)\},$$

$$q_{62}=\frac{(ABx_0^2+C(A-B)z_0^2)\lambda}{x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)},$$

$$q_{63}=\frac{1}{\sqrt[4]{A^2x_0^2+C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{AC(C-A)z_0}{x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)^3}}\,[-Cz_0\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}\,\lambda^2+$$

$$+2x_0(Ax_0^2+Cz_0^2)].$$

Перестановкой строк и столбцов с приведением коэффициентов $a_{12}, a_{54}, b_{43}, b_{63}$ к единице можно представить матрицу $D_3(\lambda)$ в более простой диагональной форме, которую проще записать в терминах инвариантных множителей [7]. В случае $\varphi(x_0,z_0)=0$ инвариантные множители будут такими: $1,1,1,1,\lambda,\lambda^3(\lambda^2+h_1)$, где

$$h_1=(Ax_0^2+Cz_0^2)[(Ax_0^2+Cz_0^2)^2+4(C-A)^2x_0^2z_0^2]\times$$
$$\times AC(C-A)x_0z_0(x_0^2+z_0^2)\sqrt{A^2x_0^2+C^2z_0^2}.$$

Легко видеть, что при полученных здесь инвариантных множителях четырехкратному нулевому корню соответствуют непростые элементарные делители. Следовательно, при $\varphi(x_0,z_0)=0$ стационарное движение (1.1) неустойчиво.

В случае кратных чисто мнимых корней уравнения $f_1(\lambda)=0$ при $\lambda_{1/2}=\pm i\sqrt{h_1/2}$ инвариантные множители будут: $1,1,1,1,\lambda,\lambda(\lambda^2+h_1/2)^2$. Здесь элементарные делители для $\lambda_{1/2}$ тоже не являются простыми.

Таким образом, в линейном приближении [3, 4] стационарное движение (1.1) является неустойчивым при всех вырождениях уравнения $f_1(\lambda)=0$.

Учитывая, что условия устойчивости по начальному приближению нелинейной системы имеют значительно большие ограничения, чем условия устойчивости линеризованной системы, можно заключить о неустойчивости стационарного движения (1.1) при существовании интеграла Гесса. При этом неустойчивость движения (1.1) не зависит от знака z_0.

Заключение

В результате проведенных вычислений составлены области устойчивости (6.1)–(6.7) линеаризованной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения для механической системы (1). Параметрический анализ устойчивости проведен в зависимости от трех параметров: a (отклонение от равенства Аппельрота), t (положительный параметр z_0^2/x_0^2), относительный положительный параметр C/A. При условии Аппельрота (2) стационарное движение (1.1) для линеаризованной системы (1) оказалось неустойчивым. Следует отметить, что даже в случаях, когда центр масс расположен ниже плоскости Oxy, стационарное движение (1.1) системы (1) неустойчиво.

Всюду при анализе требовался большой объем вычислений, особенно при факторизации алгебраических выражений. С применением системы аналитических вычислений удалось значительно ускорить и упростить вычислительные операции.

Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.

2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

3. Каменков Г. В. Устойчивость движения, колебания, аэродинамика. М.: Наука, 1971. Т. 1. 255 с.

4. Каменков Г. В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972. Т. 2. 213 с.

5. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.

6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

8. Бахтин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 80–133.

ON STABILITY OF STATIONARY MOTION
OF MECHANICAL CONSERVATIVE SYSTEM

Mikhail A. Novikov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Leading Researcher,
Institute of Systems Dynamics and Theory of
Management named after V. M. Matrosov SB RAS
134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russia
E-mail: nma@icc.ru

The article studies the stability of stationary motion of a nonlinear mechanical conservative autonomous system that rotates a rigid body around a fixed point. For the system under study, the first three common integrals are known: energy, moment of momentum, Poisson. At Appelrot equality that connects the moments of body inertia with the coordinates of the center of mass, a particular Hess integral is allowed. The steady-state motion under research is also valid for the existence of the Hess integral.
The research of stability is carried out by the equations of linear approximation of perturbed motion. It is based on the existence of only zero and purely imaginary roots of the characteristic equation with the corresponding simple elementary divisors. This is expressed by a system of three inequalities from the coefficients of the characteristic equation, moreover, the double zero root has simple elementary divisors. The analysis of three inequalities expressing purely imaginary simple roots of the characteristic equation, enabled us to identify seven areas of solutions. The cases of degeneration of the characteristic equation are separately considered: the appearance of additional zero and multiple purely imaginary roots.
Thus, the instability in the linear approximation is revealed under the condition of the existence of a particular Hess integral. The necessity of using the system of analytical computations is shown.
Keywords: stability of motion; integral of motion equations; characteristic equation; elementary divisors.

References

1. Lyapunov A. M. *Obshaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya. Sobraniye sochineniy* [General Problem of Stability of Motion. Collected Works]. Moscow: Leningrad: USSR Acad. Sci. Publ. 1956. V. 2. Pp. 7–263.
2. Chetayev N. G. *Ustoychivost dvizheniya. Raboty po analyticheskoy mekhanike.* [Stability of Motion. Works in Analytical Mechanics]. Moscow: USSR Acad. Sci. Publ. 1962. 535 p.
3. Kamenko G. V. *Ustoychivost dvizheniya, kolebaniya, aerodynamika* [Stability of Motion, Oscillations, Aerodynamics]. Moscow: Nauka Publ. 1971. V. 1. 255 p.
4. Kamenkov G. V. *Ustoychivost i kolebaniya nelimeinykh sistem* [Stability and Oscillations of Nonlinear Systems]. Moscow: Nauka Publ. 1972. V. 2. 213 p.
5. Golubev V. V. *Lektsiyi po inyegrirovaniyu uravneniy dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoy tochki* [Lectures on Integration of Equations of Motion for a Rigid Body about a Fixed Point]. Moscow, 2002. 287 p.
6. Malkin I. G. *Teoriya ustoychivosi dvizhenia* [Theory of Stability of Motion]. Moscow: Nauka Publ. 1966. 530 p.
7. Gantmacher F. R. *Teoriya matrits* [Theory of Matrices]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 576 p.
8. Bakhtin A. B., Bruno A. D., Varin V. P. Mnozhestva ustoichivosti mnogoparametricheskikh gamil'tonovykh sistem [Sets of Stability of Multiparametric Hamiltonean Systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied mathematics and Mtchanics*. 2012. V. 76, Iss. 1. Pp. 80–133.