МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 519.87
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-3-72-84

О СБАЛАНСИРОВАННОМ ОПТИМАЛЬНОМ РОСТЕ И РАЗВИТИИ БИОМАСС РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА

© Воротынцев Александр Васильевич
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: avv_alexv@mail.ru

Формулируется математическая модель распределения ассимилятов фотосинтеза, направляемых на рост и дыхание биомасс листьев, корней, репродуктивных органов растений, сопряженная с моделью переноса тепла, влаги и CO_2 в естественном растительном покрове (РП) и почве с учетом баланса энергии. С помощью ростовых функций, управляющих распределением ассимилятов, исследуется задача максимизации конечного значения биомассы репродуктивных органов растений в РП на заданном отрезке времени. В модели функция удельной мощности фотосинтеза зависит от отношения биомасс листьев и корней и имеет единственный максимум. Для постоянной среды доказывается, что линейная по управлениям задача имеет особое решение — сбалансированный рост биомасс РП в вегетативной фазе с постоянным отношением биомасс листьев и корней. При этом решение определяет и явно описывает три фазы: начальную, вегетативную и репродуктивную, что позволяет для каждой фазы получить весьма простые математические модели роста и развития биомассы РП, удобные для исследования и применения: для идентификации, описания водного режима, оценки водопотребления РП и т.д. Работа представляет интерес для применения методов теории оптимального управления к проблемам моделирования.

Ключевые слова: моделирование растительного покрова; распределение ассимилятов фотосинтеза; ростовые функции; оптимальный сбалансированный рост.

Введение

Моделирование динамики роста биомасс и развития органов растений в естественной системе почва-растительный покров (РП) — одна из базовых задач описания функционирования агроценозов и прогнозирования их урожайности, [1, 5, 7]. Особый интерес представляют исследования механизмов адаптации растительных сообществ с помощью вариационных методов и методов теории оптимального управления. В статье на основе математической модели распределения ассимилятов фотосинтеза растений и потоков тепла и влаги в РП исследуется распределение ассимилятов, максимизирующее биомассу репродуктивных органов в конце заданного отрезка времени.

Автор благодарит всех, прямо или косвенно имевших отношение к работе.

1. Модель переноса влаги, тепла и CO_2 в растительном покрове

Приведем в качестве физической основы нижеследующих моделей систему уравнений переноса воды, тепла и CO_2 в РП [1–5].

В слое $0 \le x \le H_l$ растительного покрова (РП) и в корнеобитаемом слое $-H_s \le x \le 0$ почвы рассматриваются две подсистемы уравнений (1)-(4) для температуры воздуха T_a, листьев T_l, концентрации водяного пара в межлистном воздухе q_a, в устьичных полостях листьев q_l:

$$J_{Ta} = -c_p k_a \partial T_a / \partial x, \qquad J_{qa} = -k_a \partial q_a / \partial x, \qquad 0 \le x \le H_l \ ; \quad (1)$$

$$c_p \partial T_a / \partial t = -\partial J_{Ta} / \partial x + f_{Tl}, \quad \partial q_a / \partial t = -\partial J_{qa} / \partial x + f_{ql}, \quad (2)$$

$$f_{Tl} = c_p D_T S_l (T_l - T_a) p_l \ , \qquad f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l, \quad (3)$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = \partial R_{ll} / \partial x \ ; \quad (4)$$

и две подсистемы (5-7) для температуры T_s и водного потенциала $\psi_s < 0$ почвы:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} \partial T_s / \partial x \ , \qquad J_{\psi s} = -k_{\psi s} \partial \psi_s / \partial x, \qquad -H_s \le x \le 0 \quad (5)$$

$$c_s \partial T_s / \partial t = -\partial J_{Ts} / \partial x, \qquad c_\psi \partial \psi_s / \partial t = -\partial J_{\psi s} / \partial x - f_{\psi s}, \quad (6)$$

$$f_{\psi s} = J_{ql} p_k + D_k S_k (\psi_s - \overline{\psi}_s) p_k ; \quad (7)$$

а также подсистема для концентрации углекислого газа CO_2

$$J_{ca} = -k_a \partial c_a / \partial x \ , \quad (8)$$

$$\partial c_a / \partial t = -\partial J_{ca} / \partial x + f_{cl} \ , \quad (9)$$

$$f_{cl} = D_c S_l (c_l - c_a) p_l \ , \quad (10)$$

с краевыми условиями:

$$J_{Ta} = c_p D_a (T_a - T_a^0) \ , \qquad J_{qa} = D_a (q_a - q_a^0), \qquad x = H_l, \quad (11)$$

$$J_{ca} = D_a (c_l - c_a) \ ;$$

$$J_{Ta} = c_p D_{Ts} (T_s - T_a) \ , \qquad J_{qa} = D_{qs} (q_s - q_a), \qquad x = 0, \quad (12)$$

$$J_{ca} = 0 \ ;$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0,t), \qquad -J_{\psi s} + J_{qa} = Q(t), \qquad x = 0, \quad (13)$$

$$T_s = T_s^0 \ , \qquad \psi_s = \psi_s^0, \qquad x = -H_s . \quad (14)$$

Транспорт воды в растениях и испарение ими влаги J_{ql} (транспирация) регулируется водным потенциалом листьев ψ_l, их устьичным сопротивлением r_{st} и описывается нелинейными выражениями:

$$J_{ql} = \int_0^{H_1} f_{ql} dx \ , \ J_{ql} = D_k' (\overline{\psi}_S - \psi_l), \text{ при } \psi_m < \psi_l < \overline{\psi}_S < 0, \quad (15)$$

где $\overline{\psi}_s = \int_{-H_k}^{0} \psi_s p_k dx$, $\mu_l \equiv \psi_l / \psi_m$, $1/D_q = 1/D_T + r_{st}$,

$1/D_k' = r_{kc} + 1/(D_k S_k)$,

$r_{st} = r_{s0}(1-\delta_l \mu_l)(1-\mu_l)^{-1}$, $0 < \mu_l < 1$, $\delta_l > 0$; $\overline{\mu}_s = \overline{\psi}_s / \psi_m$; (16)

$J_{ql} = 0$, при $\overline{\psi}_s \le \psi_m < 0$.

Подсистема уравнений, описывающая распределение углеводов, преобразование поглощенного CO_2 в углеводы, затем в биомассу органов и рост биомассы листьев (i=l), корней (i=k), репродуктивных органов (i=R) и стеблей (i=s), имеет вид [6, 7]:

$$\Delta m_i = \rho_i(t)\Phi' \Delta t - \widetilde{R}_i'(T_l) m_i \Delta t - \widetilde{R}_i \Delta m_i, \text{ или} \quad (17)$$

$$\dot{m}_i = \rho_i(t)\frac{\Phi'}{1+\widetilde{R}_i} - R_i' m_i, \ \sum \rho_i(t) = 1, \ \rho_i(t) \ge 0, \ i \in \{l,k,R,s\}, \text{ где} \quad (18)$$

$$\Phi' = S_l \tau \Phi_0, \ R_i' = \widetilde{R}_i'(T_l)\left(1+\widetilde{R}_i\right), \ A_1 = \varepsilon_\phi \sigma(T_l), \quad (19)$$

$$\Phi_0 = \frac{A_1}{(\alpha I_\phi)^{-1} + r_c c_l^{-1}}, \ r_1 = S_l D_a^{-1} + D_c^{-1}, \ r = A_1 r_1 + r_c. \quad (20)$$

Здесь $J_{Ta}(x,t)$, $J_{qa}(x,t)$, $J_{ca}(x,t)$ — потоки тепла, водяного пара и углекислого газа CO_2 в межлистном воздухе, $J_{Ts}(x,t)$, $J_{\psi s}(x,t)$ — потоки тепла и воды в почве; $\overline{\psi}_s(t)$ — усредненный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы, $\psi_l(t)$ — водный потенциал листьев.

В системе (1)-(20) функции $J_{Ta}(x,t)$, $J_{qa}(x,t)$, $J_{ca}(x,t)$, $J_{Ts}(x,t)$, $J_{\psi s}(x,t)$, $J_{ql}(t)$, $T_a(x,t)$, $T_l(t)$, $T_s(x,t)$, $q_a(x,t)$, $c_a(x,t)$, $\psi_l(t)$, $\psi_s(x,t)$, являются искомыми. Остальные величины — заданные функции и константы. $R_{ll}(x,t)$ — заданная поглощенная слоем $(0,x)$ длинноволновая и коротковолновая радиация, $R(0,t)$ — радиационный баланс у поверхности почвы; $R_l(t) = R_{ll}(H_l,t)$ — радиация, поглощенная покровом, $R_s = R(0,t) + J_{Ts}$ — энергия, поглощенная верхним слоем почвы; $S_l(t)$, $S_k(t)$ — площадь поверхности соответственно листьев и корней РП на единицу поверхности почвы; $S_l p_l(x,t)$, $S_k p_k(x,t)$ — плотность листовой и всасывающей корневой поверхности РП; $D_q(\psi_l)$, $D_c(\psi_l)$ — коэффициенты проводимости для водяного пара и CO_2 на границе лист-воздух. T_a^0, q_a^0, c_a^0 и T_s^0, ψ_s^0 — функции времени, измеряемые на высоте метеобудки $H_a > H_l$ над покровом и глубине $-H_s$ почвы; $Q(t)$ — осадки; $\rho(T)$ — насыщенная влажность воздуха при температуре T; c_p, c_s — теплоемкости воздуха и почвы; $k_a(x)$, $k_{Ts}(x)$ — коэффициенты

турбулентной проводимости воздуха и теплопроводности почвы, $k_{\psi s}(\psi_s)$ — влагопроводность почвы; $c_\psi = c_\psi(\psi_s)$; χ — теплота парообразования; c_l — концентрация CO_2 в хлоропластах листьев, D_T, D_k, D_a, D_{Ts}, D_{qs} — постоянные коэффициенты проводимости.

Продукты $\Phi'\Delta t$ фотосинтеза распределяются по органам растения долями $\rho_i(t)$ и используются для роста Δm_i органов; при этом часть углеводов расходуется на дыхание поддержания $\widetilde{R}_i'(T_l)\, m_i \Delta t$ и дыхание роста $\widetilde{R}_i \Delta m_i$. Функции $\rho_i(t)$ называются ростовыми функциями РП. Температурный фактор $\sigma(T_l)$ и константы ε_ϕ, α, r_c определяют влияние потока фотосинтетически активной радиации (ФАР) и концентрации c_l на скорость Φ_0 преобразования CO_2 в ассимиляты единицей поверхности листа.

Дифференциальные уравнения систем связаны алгебраическими выражениями (4), (10), описывающими балансы энергии в межлистном воздухе и на поверхности почвы.

2. Модель оптимального сбалансированного роста биомасс растительного покрова

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{m_k}{m_l}\ ,\ M = m_l + m_k\ ,\ R'_{lk}(\lambda) = \frac{R'_l + R'_k\lambda}{1+\lambda}\ , \tag{21}$$

$$F(\lambda, \overline{\mu}_s, t) \equiv \frac{1}{M}\frac{\Phi'}{1+\widetilde{R}_i} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1-\overline{\mu}_s}{B_1\lambda + B_2}\Phi_1\ , \tag{22}$$

$$B_1 = 1-\delta_l\overline{\mu}_s\ ,\ B_2 = \frac{A_{kc}}{r_{s0}}\frac{J^+_{qa}(t)}{D'_a + D'_s}\frac{\beta_l}{\beta_k}\ ,\ \Phi_1 = \frac{\beta_l \tau c_a^0}{(1+\widetilde{R}_i)}\ ,\ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}\ ,$$

$$J_{qa}(\overline{\mu}_s) = J^+_{qa}(t)\frac{1+b\beta(\overline{\mu}_s)}{1+\beta(\overline{\mu}_s)}\ ,\ \beta(\overline{\mu}_s) = \frac{C}{MF(\lambda,\overline{\mu}_s,t)},\ C = \frac{(D'_a+D'_s)r_{s0}}{\beta_l\Phi_1^{-1}}\ .$$

Из (17)-(18) следуют уравнения для биомасс $m_i(t)$ корней ($i = k$) и листьев ($i = l$), а из (1)-(16) следуют выражения для удельной мощности $F(\lambda, \overline{\mu}_s, t)$ фотосинтеза и уравнение для усредненного водного потенциала $\overline{\mu}_s$ корнеобитаемого слоя почвы, [2], [3], [4], [5]:

$$\dot{m}_i = \rho_i(t)MF(\lambda,\overline{\mu}_s,t) - R'_i m_i\ ,\ i = \{l,k,R\}\ ; \tag{23}$$

$$\dot{\overline{\mu}}_s = \alpha_w\overline{\mu}_s\left[J_{qa}(\overline{\mu}_s) - Q(t) - J_{\psi sHk}\right].$$

Получим уравнение для общей биомассы M корней и листьев:

$$\dot{M} = \dot{m}_l + \dot{m}_k = (1-\rho_R)MF - (R'_l m_l + R'_k m_k) = \{(1-\rho_R)F - R'_{lk}(\lambda)\}M\ .$$

Получим уравнение для отношения λ биомассы m_k корней к биомассе m_l листьев:

$$\dot{m}_k = \dot{\lambda} m_l + \lambda \dot{m}_l = \dot{\lambda} m_l + \lambda \{\rho_l MF - R'_l m_l\} = \rho_k MF - R'_k m_k ,$$

$$\dot{\lambda} m_l = (\rho_k - \lambda \rho_l) MF - (R'_k \lambda - R'_l \lambda) m_l =$$

$$= (\rho_k - \lambda \rho_l)(1+\lambda) m_l F - \lambda (R'_k - R'_l) m_l .$$

Сокращая на m_l получаем искомое уравнение.

Рассмотрим задачу оптимального роста биомасс растительного покрова на заданном отрезке времени $[0,T]$, максимизирующего выбором ростовых функций $\rho_i(t)$ значение биомассы репродуктивных органов $m_R(T)$.

Для модели (23) определим функцию Понтрягина

$$H(\rho,\psi,x,t) = \psi_M \dot{M} + \psi_R \dot{m}_R + \psi_\lambda \dot{\lambda} + \psi_\mu \dot{\bar{\mu}}_s =$$

$$= H_0(\rho,\psi,\lambda) M - \psi_R R'_R m_R + \tag{24}$$

$$+ \psi_\lambda \{(\rho_k - \lambda \rho_l)(1+\lambda) F - \lambda (R'_k - R'_l)\} + \psi_\mu \dot{\bar{\mu}}_s ,$$

$$H_0(\rho,\psi,\lambda) = [(1-\rho_R)\psi_M + \rho_R \psi_R] F - \psi_M R'_{lk}(\lambda), \tag{25}$$

а также максимизируемый по $\rho = (\rho_l, \rho_k, \rho_R)$ функционал

$$\Im(x,T) = m_R(T) \to max . \tag{26}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление $\rho^* = (\rho_l^*(t), \rho_k^*(t), \rho_R^*(t))$ и оптимальная траектория (ψ^*, x^*), $\psi^* = (\psi_\lambda^*(t), \psi_M^*(t), \psi_R^*(t))$, $x^* = (\lambda^*(t), M^*(t), m_R^*(t))$, максимизирующие (26) для системы (23), должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\dot{\psi}_\lambda = -\frac{\partial}{\partial \lambda} H = -M \frac{\partial}{\partial \lambda} H_0 -$$

$$- \psi_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\rho_k - \lambda \rho_l)(1+\lambda) F - \lambda (R'_k - R'_l)\} - \tag{27}$$

$$- \psi_\mu \frac{\partial}{\partial \lambda} \{\alpha_w \bar{\mu}_s [J_{qa}(\lambda, M, t) - Q(t) - J_{\psi s Hk}]\},$$

$$\dot{\psi}_M = -\frac{\partial}{\partial M} H = -H_0 = \tag{28}$$

$$= -[(1-\rho_R)\psi_M + \rho_R \psi_R] F + \psi_M R'_{lk}(\lambda),$$

$$\dot{\psi}_R = -\frac{\partial}{\partial m_R} H = R'_R \psi_R \ , \ \psi_R(t) = e^{-R'_R (T-t)} ; \tag{29}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial}{\partial \psi_\lambda} H = (\rho_k - \lambda \rho_l)(1+\lambda) F - \lambda (R'_k - R'_l) ; \tag{30}$$

$$\dot{M} = \frac{\partial}{\partial \psi_M} H = M \frac{\partial}{\partial \psi_M} H_0 = M \{(1-\rho_R) F - R'_{lk}(\lambda)\} ; \tag{31}$$

$$\dot{m}_R = \frac{\partial}{\partial \psi_R} H = M \frac{\partial}{\partial \psi_R} H_0 - R'_R m_R = \rho_R MF - R'_R m_R \ ; \tag{32}$$

$$\dot{\bar{\mu}}_s = \alpha_w \bar{\mu}_s \left[J_{qa}(\bar{\mu}_s) - Q(t) - J_{\psi sHk} \right] .$$

$$\psi_\lambda(T) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Im = 0 \ , \ \psi_M(T) = \frac{\partial}{\partial M} \Im = 0 \ , \ \psi_R(T) = \frac{\partial}{\partial m_R} \Im = 1 \ ; \tag{33}$$

$$m_l(0) = m_{l0} \ , \ m_k(0) = m_{k0} \ , \ m_R(0) = 0 \ , \ \lambda(\tau_1) = \lambda_0 \ , M(0) = M_0 \ .$$

Для оптимальной траектории необходимо выполнение условия максимума

$$H\left(\rho^*, \psi^*, x^*\right) = \max_{\rho \in \Gamma} H\left(\rho, \psi^*, x^*\right) \ , \ \Gamma = \left\{ \rho : \sum \rho_i = 1, \rho_i \geq 0 \right\} . \tag{34}$$

Ниже будем пока полагать водный потенциал $\bar{\mu}_s$ постоянным параметром модели (27)-(34) и исключать его из анализа.

Уточним условие максимума (34) для функции (24):

$$\left[H_0\left(\rho^*, \psi^*, \lambda^*\right) - H_0\left(\rho, \psi^*, \lambda_*\right) \right] M^* \geq \psi^*_\lambda \left[\left(\Delta\rho_k - \lambda^* \Delta\rho_l \right) (1+\lambda) F\left(\lambda^*\right) \right]$$

или

$$-\Delta\rho_R \left(\psi^*_R - \psi^*_M \right) M^* F\left(\lambda^*\right) \geq \psi^*_\lambda \left[\left(\Delta\rho_k - \lambda^* \Delta\rho_l \right) (1+\lambda) F\left(\lambda^*\right) \right]. \tag{36}$$

Неравенство (36) должно выполняться для всех $0 \leq t \leq T$, $\Delta\rho_i \equiv \rho_i - \rho_i^*$, таких, что $\rho \in \Gamma$.

Обозначим через λ_0 решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[F(\lambda) - R'_{lk}(\lambda) \right] = 0 , \tag{35}$$

доставляющее максимум функции $F(\lambda) - R'_{lk}(\lambda)$. В данной модели этот максимум единственный.

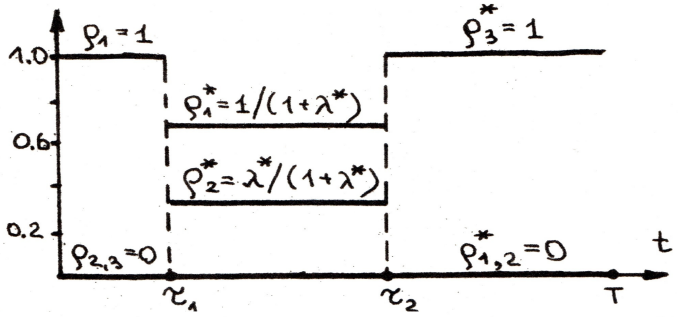

Рис. 1. Оптимальные ростовые функции $\rho_l = \rho_1$, $\rho_k = \rho_2$, $\rho_R = \rho_3$.

Отметим ключевую особенность модели (30)-(32) оптимального сбалансированного роста биомасс РП. Функция Понтрягина $H(\rho, \psi, x, t)$ линейна по управлению $\rho = (\rho_l, \rho_k, \rho_R)$. Линейная функция в общем случае достигает на симплексе Γ максимума только в вершинах симплекса, т.е.

максимум в (34) достигается только в одной из точек $\rho_j = 1$, $\rho_i = 0$, $i \neq j$. Применительно к задаче оптимального роста биомасс РП это означало бы, что продукты фотосинтеза F в (23) направляются в общем случае в каждый момент времени на рост только одной биомассы - либо листьев, либо корней, либо репродуктивных органов. Это с очевидностью противоречит наблюдаемому в реальности сбалансированному росту листьев и корней.

На рис. 1 показаны графики оптимальных ростовых функций $\rho_l = \rho_1^*(t)$, $\rho_k = \rho_2^*(t)$, $\rho_R = \rho_3^*(t)$. На рис. 2 приведены оптимальные траектории биомасс $m_l = m_1(t)$, $m_k = m_2(t)$, $m_R = m_3(t)$ листьев, корней и репродуктивных органов, отвечающие оптимальным ρ_i. Здесь фаза $[\tau_1, \tau_2]$ сбалансированного роста $m_2(t) = \lambda^* m_1(t)$ осуществляется с отношением биомасс $\lambda_0 = \lambda^*$.

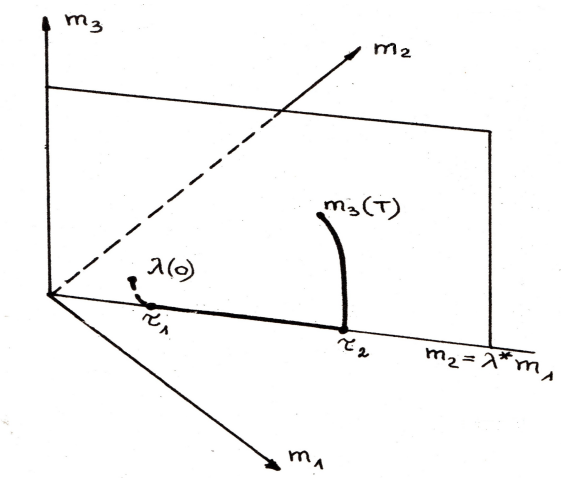

Рис. 2. Траектория биомасс m_i оптимального роста РП.

Задача (24)-(34) выделяет три фазы роста растительного покрова.

На первой начальной стадии $0 \le t \le \tau_1$ все ассимиляты MF в (23) направляются на рост той биомассы, которой недостаточно для осуществления сбалансированного роста корней и листьев $m_k = \lambda_0 m_l$. Здесь либо $\rho_l^*(t) = 1$, либо $\rho_k^*(t) = 1$.

Особый, магистральный режим распределения ассимилятов фотосинтеза F реализуется на следующей вегетативной фазе $\tau_1 < t \le \tau_2$ сбалансированного роста $m_k = \lambda_0 m_l$ биомасс листьев и корней с постоянным отношением этих биомасс $\lambda(t) = \lambda_0$, где λ_0 доставляет максимум удельной мощности фотосинтеза F с учетом общего дыхания $R'_{lk}(\lambda_0)$ под-

держания листьев и корней растений. В этом случае (36) удовлетворяется с $\rho_i^*(t)$ из (38) при $\psi_\lambda^*(t)=0$ для $\tau_1 < t \le \tau_2$.

На заключительной репродуктивной фазе $\tau_2 < t \le T$ все ассимиляты направляются с $\rho_R^*(t)=1$ на рост репродуктивной биомассы $m_R(t)$.

Такой несколько неожиданный результат подтверждает основательность модели (30)-(32) вместе с моделью (1)-(20) переноса тепла, влаги и CO_2 в растительном покрове, [1]-[6]. Результат замечателен тем, что определяет три фазы развития РП и позволяет явно вычислить оптимальную траекторию биомасс РП согласно дифференциальной системе (40), (44), (45) с постоянными коэффициентами. Также важно отметить, что эта система, т.е. РП под управлением (38), (42), очевидно, суммирует случайные малые вариации среды, повышая свою устойчивость.

Замечание. Почти везде в тексте ρ, ψ, λ следует помечать звездочкой «*» как оптимальные. Однако, чтобы не утяжелять текст, «*» оставлена лишь там, где ее наличие следует подчеркнуть.

3. Теорема об оптимальном сбалансированном росте РП

Теорема. Для условий

$$\lambda_0 > 0 \text{ — единственный максимум } F(\lambda) - R'_{lk}(\lambda); \tag{37}$$

$$F(\lambda_0) - R'_{lk}(\lambda_0) + R'_R > 0,\ R'_l = R'_k = R',\ \dot{\bar{\mu}}_s = 0,$$

следующее управление $\rho^* = \left(\rho_l^*(t), \rho_k^*(t), \rho_R^*(t)\right)$ и траектория $\left(\psi^*, x^*\right)$, $\psi^* = \left(\psi_\lambda^*(t), \psi_M^*(t), \psi_R^*(t)\right)$, $x^* = \left(\lambda^*(t), M^*(t), m_R^*(t)\right)$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина для системы (27)-(33).

При $\tau_1 < t \le \tau_2$:

$$\rho_l^*(t) = \frac{1}{1+\lambda_0} - A,\ \rho_k^*(t) = \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0} + A,\ \rho_R^*(t) = 0\ ; \tag{38}$$

$$A = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \lambda_0} ln\, F(\lambda_0);$$

$$\lambda^*(t) = \lambda_0\ ; \tag{39}$$

$$ln\left(M^*(t) / M^*(\tau_2)\right) = \left[F(\lambda_0) - R'_{lk}(\lambda_0)\right](t-\tau_2)\ ;\ m_R^* = 0\ ; \tag{40}$$

$$-\rho_R\left(\psi_R^* - \psi_M^*\right)M^* F(\lambda_0) \ge \psi_\lambda^* \left\{(\rho_k - \lambda_0 \rho_l) - A\right\}(1+\lambda_0)F(\lambda_0)\ . \tag{41}$$

При $\tau_2 < t \le T$:

$$\rho_l^*(t) = \rho_k^*(t) = 0\ ,\ \rho_R^*(t) = 1\ ; \tag{42}$$

$$ln\left(\lambda^*(t)/\lambda_0\right) = -\left(R'_k - R'_l\right)(t-\tau_2)\ ; \tag{43}$$

$$ln\left[M^*(t) / M^*(\tau_2)\right] = -R'_{lk}(\lambda)(t-\tau_2)\ , \tag{44}$$

$$\dot{m}_R^* = M^* F\left(\lambda^*\right) - R'_R m_R^*\ ; \tag{45}$$

$$(1-\rho_R)\left(\psi_R^*-\psi_M^*\right)M^*F\left(\lambda^*\right)\geq\psi_\lambda^*\left[\left(\rho_k-\lambda^*\rho_l\right)(1+\lambda)F(\lambda)\right]. \quad (46)$$

Точка переключения τ_2 управлений $\rho_i^*(t)$ определяется выражением

$$\tau_2=T-\frac{1}{F(\lambda_0)}\varepsilon^{-1}(\lambda_0)ln(1+\varepsilon(\lambda_0)). \quad (47)$$

Хотя теорема (37)-(47) сформулирована в весьма общем виде, ее полное доказательство выполнено лишь для условия равенства коэффициентов дыхания $R_k'=R_l'$. Это условие в силу (43) позволяет сохранить оптимальное сбалансированное отношение $\lambda(t)=\lambda_0$ и при $\tau_2<t\leq T$. Ограничение $R_k'=R_l'$ можно исключить некоторым расширением модели (30)-(32).

3. Доказательство теоремы

Доказательство. Очевидно, что неравенства (41) и (46) выполняются при $\forall\rho\in\Gamma$, если

А) $\psi_\lambda^*(t)=0$ при $\tau_1<t\leq T$;

В) $\left(\psi_R^*-\psi_M^*\right)>0$ при $\tau_2<t\leq T$, $\left(\psi_R^*-\psi_M^*\right)\leq 0$ при $\tau_1<t\leq T$.

Оптимальная траектория $\left(\psi^*,x^*\right)$, $\psi^*=\left(\psi_\lambda^*(t),\psi_M^*(t),\psi_R^*(t)\right)$, $x^*=\left(\lambda^*(t),M^*(t),m_R^*(t)\right)$, определяемая управлением $\rho^*=\left(\rho_l^*(t),\rho_k^*(t),\rho_R^*(t)\right)$ из (38) и (42), существует.

В самом деле, в зависимости от начального значения $\lambda(0)\geq\lambda_0$ или $\lambda(0)\leq\lambda_0$ соответствующие распределения ассимилятов $\rho_l(t)=1$ или $\rho_k(t)=1$ в (23) и (30) приведут за время τ_1 отношение $\lambda(t)=m_k/m_l$ биомасс корней и листьев к значению $\lambda(\tau_1)=\lambda_0$. Например, для $\lambda(0)\geq\lambda_0$ значение момента τ_1 времени достижения $\lambda(\tau_1)=\lambda_0$ при $\rho_l(t)=1$, $\rho_k(t)=0$ определяется монотонно убывающим на $[0,\tau_1]$ решением уравнения (30)

$$\frac{d}{dt}ln\lambda=-\left\{(1+\lambda)F+\left(R_k'-R_l'\right)\right\}<0.$$

Оценки для τ_1 и $M(\tau_1)$ можно получить из (22). Отметим, что $\tau_1<T$ при достаточно больших F.

По достижении биомассами значения $\lambda(t)=\lambda_0$ значения $\rho_i(t)$ полагаются равными (38). Такие значения $\rho_i(t)$ сохраняют на $(\tau_1,\tau_2]$ отношение $\lambda(t)$ биомасс постоянным и равным λ_0. В самом деле, подставляя (38) в (30) получим $\dot\lambda=\varphi(\lambda,\lambda_0)$, $\varphi(\lambda_0,\lambda_0)=0$, где

$$\varphi=\frac{\lambda_0-\lambda}{1+\lambda_0}(1+\lambda)F(\lambda)+\left\{\lambda_0(1+\lambda)^2F(\lambda)-\lambda(1+\lambda_0)^2F(\lambda_0)\right\}\frac{\partial}{\partial\lambda_0}lnF(\lambda_0),$$

$R'_k - R'_l = (1+\lambda)^2 \frac{\partial}{\partial\lambda} R'_{lk}(\lambda)$.

Отсюда $\lambda(t) = \lambda_0$, т.е. (39) доказано. Теперь (40) очевидно. В момент τ_2 распределение ассимилятов изменяется на (42), что определяет траекторию в виде (43)-(45).

Докажем А) при $R'_k = R'_l = R'$. Из (43) следует $\dot{\lambda} = 0$ и $\lambda(t) = \lambda_0$ при $\tau_2 < t \le T$. Очевидно $R'_{lk}(\lambda) = R'$. Отсюда из (35) следует, что λ_0 доставляет единственный максимум $F(\lambda)$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} R'_{lk}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} F(\lambda) = 0,\ \frac{\partial}{\partial\lambda} H_0 = 0\ ; \tag{48}$$

$\lambda(t) = \lambda_0$, при $\tau_1 < t \le T$.

Подставляя последнее в (30) и (27) получим $\dot{\psi}^*_\lambda = -\psi^*_\lambda * Const(\lambda_0, \rho^*)$, $\psi^*_\lambda(T) = 0$; отсюда $\psi^*_\lambda(t) = 0$ при $\tau_1 < t \le T$. Кроме того, $A = 0$ в (38). Утверждение А) доказано.

Докажем В). Из (37) и (49) следует, что $(\psi_R - \psi_M)M$ монотонно возрастающая функция t, при $\tau_1 < t \le T$, достигающая максимума $M(T)$ при $t = T$. Значение этой функции, равное 0, определяет, исходя из (36), момент $t = \tau_2$ времени переключения значения $\rho^*_R(t) = 0$ на $\rho^*_R(t) = 1$. Значение τ_2 определяется в (51), (54). Отсюда следует утверждение В).

Неравенства (41) и (46) теперь тривиально следуют из утверждений А) и В) . Выражение (47) совпадает с (54).

3. Вспомогательные свойства модели

1. Для $0 \le t \le T$ справедливо

$$\frac{d}{dt}\{(\psi_R - \psi_M)M\} = \{F(\lambda) + R'_R - R'_{lk}(\lambda)\}M\psi_R\ . \tag{49}$$

$$\frac{d}{dt}\{M\psi_R\} = M\psi_R\{(1-\rho_R)F + R'_R - R'_{lk}\}, \tag{50}$$

$\frac{d}{dt}\{M\psi_M\} = -\rho_R\psi_R MF$.

В самом деле,

$\frac{d}{dt}\{M\psi_R\} = \dot{M}\psi_R + M\dot{\psi}_R = M\psi_R \frac{\partial}{\partial\psi_M} H_0 + MR'_R\psi_R =$

$= M\psi_R\{(1-\rho_R)F + R'_R - R'_{lk}(\lambda)\}$,

$\frac{d}{dt}\{M\psi_M\} = \dot{M}\psi_M + M\dot{\psi}_M = M\psi_M \frac{\partial}{\partial\psi_M} H_0 - MH_0 = -\rho_R\psi_R MF$,

$\frac{d}{dt}\{(\psi_R - \psi_M)M\} = (\psi_R - \psi_M)M \frac{\partial}{\partial\psi_M} H_0 + \{H_0 + R'_R\psi_R\}M =$

$= (\psi_R - \psi_M)M\{(1-\rho_R)F - R'_{lk}\} + [\rho_R(\psi_R - \psi_M) + \psi_M]MF -$

$- R'_{lk}\psi_M M + R'_R\psi_R M = [F(\lambda) + R'_R - R'_{lk}(\lambda)]M\psi_R$.

2. Как видно из (49), функция $(\psi_R - \psi_M)M$ возрастающая по t и равная $M(T)$ при $t = T$. Для определения момента времени переключения оптимального управления $\rho_R(t)$ найдем момент времени τ_2, в котором возрастающая функция $(\psi_R - \psi_M)M$ обращается в ноль. Проинтегрируем эту функцию на $(\tau_2, T]$, где $\rho_R = 1$, и исключим $M\psi_R$ из полученной системы, учитывая $\psi_R(T) = 1$, $\psi_M(T) = 0$:

$$M(\psi_R - \psi_M)\Big|_{\tau_2}^{T} = \int_{\tau_2}^{T} (F + R'_R - R'_{lk})M\psi_R d\xi \ , \tag{51}$$

$$ln(M\psi_R)\Big|_{\xi}^{T} = \int_{\xi}^{T} (R'_R - R'_{lk})d\zeta \ .$$

Обозначим

$$\varepsilon(\lambda) = (R'_R - R'_{lk}(\lambda))/F(\lambda) \ . \tag{52}$$

В результате исключения $M\psi_R$ получаем точное уравнение для τ_2:

$$1 = \int_{\tau_2}^{T} [1 + \varepsilon(\lambda)]F(\lambda)exp\left\{-\int_{\xi}^{T} \varepsilon(\lambda)F(\lambda)d\zeta\right\}d\xi \ . \tag{53}$$

Из (38) при $R'_l = R'_k = R'$ следует, что отношение биомасс $\lambda(t)$ постоянно и равно $\lambda(t) = \lambda_0$. Следовательно, в этом случае $F = F(\lambda_0)$, $R'_{lk}(\lambda) = R'$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0)$ постоянны, и уравнение (53) легко преобразуется к точному решению

$$1 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\left[1 - e^{\varepsilon F*(\tau_2 - T)}\right] \text{ или}$$

$$\tau_2 = T - \frac{1}{F(\lambda_0)}\varepsilon^{-1}(\lambda_0)ln(1 + \varepsilon(\lambda_0)) \approx T - \frac{1}{F(\lambda_0)} . \tag{54}$$

Заключение

Проблема прогнозирования динамики функционирования растительного покрова в естественных условиях является непростой задачей, в частности, из-за многообразия условий в почве и воздухе, изменчивости и трудностей измерения параметров среды. Для решения этой практической и экономически важной проблемы необходим спектр математических моделей системы почва-растение различной детализации.

В статье полностью решена задача нахождения оптимального распределения ассимилятов фотосинтеза растений в естественном растительном покрове (РП), максимизирующего биомассу репродуктивных органов в конце заданного отрезка времени для унимодальной функции мощности фотосинтеза, при постоянных параметрах внешней среды (влажности, температуры воздуха и почвы в РП) и равенстве коэффициентов дыхания листьев и корней. Решение задачи определяет и описывает три фазы роста и развития биомасс: начальную, вегетативную и репродуктивную. Для каждой фазы получены явные и сравнительно простые выражения, описывающие динамику биомасс, транспирацию, водопотребление РП, необ-

ходимые для достаточно полного описания физического функционирования РП. Замечательным свойством оптимальной модели оказалось интегрирование РП малых случайных колебаний среды. Можно ожидать, что методами приближенных вычислений полученные результаты будут дополнены поправками для непостоянных параметров внешней среды в РП, например, для изменяющихся влажности и температуры почвы и воздуха.

В результате полученные результаты с приближенными поправками станут спектром согласованных статистических моделей, удобных для исследования и применения: для идентификации, описания водного режима, оценки водопотребления РП и т.д.

Литература

1. Полуэктов Р. А. Динамические модели агроэкосистем. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 312 с.

2. Воротынцев А.В. Модель переноса тепла и влаги в системе почва-растение с учетом баланса энергии // Вестник БГУ. 2012. Вып. 1. С. 107–111.

3. Воротынцев А. В. Исследование модели водно-теплового режима системы почва-растение-приземный слой воздуха. М.: Вычислительный центр РАН, 1991. 53 с.

4. Воротынцев А. В. Исследование модели переноса тепла и влаги в системе почва-растение // Математическая биология и биоинформатика. Спецвыпуск по итогам конференции ЭкоМатМод-2011. 2012. Т. 7, № 1. С. 45–53.

5. Воротынцев А. В. Приближенная модель переноса тепла и влаги в системе почва-растение с учетом баланса энергии. // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2014. Вып. 9. № 1. С. 22–26.

6. Воротынцев А. В., Рогожина Н. Л., Соколова И. А., Степченкова С. О. Две задачи оптимального управления для модели системы почва-растение. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1988. 38 с.

7. Бихеле З. Н., Молдау Х. А., Росс Ю. К. Математическое моделирование транспирации и фотосинтеза растений при недостатке почвенной влаги. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 223 с.

8. Воротынцев А. В. Модель распределения ассимилятов и оптимального роста растительного покрова // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2015. Вып. 9. С. 54–61.

ON BALANCED OPTIMAL GROWTH AND DEVELOPMENT
OF BIOMASS VEGETATION

Aleksandr V. Vorotyntsev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Researcher,
Computing Center named after A. A. Dorodnicyn FRC IU RAS
40, Vavilova St., Moscow, 119333, Russia
E-mail: avv_alexv@mail.ru

A mathematical model for the distribution of photosynthesis assimilates directed to the growth and respiration of the biomass of leaves, roots, and reproductive organs of plants is formulated. It is associated with a model of transfer heat, moisture and CO2 in the natural plant cover (PC) and soil, taking into account the energy balance. With the help of growth functions that control the assimilates distribution, the problem of maxi-

mizing the final value of the biomass of the reproductive organs of plants in the PC at a given time interval is studied. In the model, the specific power function of photosynthesis depends on the ratio of the biomass of leaves and roots and has a single maximum. For a constant medium, it is proved that a linear control problem has a special solution-a balanced growth of biomasses of the PC in the vegetative phase with a constant ratio of the biomass of leaves and roots. The solution defines and explicitly describes three phases: initial, vegetative and reproductive, which makes it possible for each phase to obtain rather simple mathematical models of growth and development of the biomass of the PC, convenient for research and application: for identification, description of the water regime, evaluation of the PC water consumption etc. The work is of interest to the application of methods of optimal control theory to modeling problems.

Keywords: modeling of the plant cover; distribution of photosynthesis assimilates; growth functions; optimal balanced growth.

References

1. Poluektov P. A. *Dinamicheskie modeli agroekosistem* [Dynamic Models of Agrosystems]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1991. 312 p.

2. Vorotyntsev A. V. Model' perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie s uchetom balansa energii [Model of Heat and Moisture Transfer in the Soil-Plant System Taking into Account the Energy Balance]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Buryat State University*. 2012. No. 1. Pp. 107–111.

3. Vorotyntsev A. V. *Issledovanie modeli vodno-teplovogo rezhima sistemy pochva-rastenie-prizemnyi sloi vozdukha* [Research of the Model of Water-Heat Regime of the Soil-Plant-Surface Air Layer System]. Moscow: Computing Center of RAS, 1991. 53 p.

4. Vorotyntsev A. V. Issledovanie modeli perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie [Study of the Model of Heat and Moisture Transfer in the Soil-Plant System]. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika. Spetsvypusk po itogam konferentsii - Mathematical Biology and Bioinformatics. Special issue on the results of the conference.* EkoMatMod 2011. 2012. V. 7, No. 1. Pp. 45–53.

5. Vorotyntsev A. V. Priblizhennaya model' perenosa tepla i vlagi v sisteme pochva-rastenie s uchetom balansa energii [Approximate Model of Heat and Moisture Transfer in the Soil-Plant System Taking into Account the Energy Balance]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, Informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2014. Issue 9, No. 1. Pp. 22–26.

6. Vorotyntsev A. V., Rogozhina N. L., Sokolova I. A., Stepchenkova S. O. *Dve zadachi optimal'nogo upravleniya dlya modeli sistemy pochva-rastenie* [Two Optimal Control Problems for the Soil-Plant System Model].Moscow: Computing Center of AS USSR, 1988. 38 p.

7. Bikhele Z. N., Moldau Kh. A., Ross Yu. K. *Matematicheskoe modelirovanie transpiratsii i fotosinteza rastenii pri nedostatke pochvennoi vlagi* [Mathematical Modeling of Transpiration and Photosynthesis of Plants with a Lack of Soil Moisture]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1980. 223 p.

8. Vorotyntsev A. V. Model' raspredeleniya assimilyatov i optimal'nogo rosta rastitel'nogo pokrova [Model of Distribution of Assimilates and Optimal Growth of Vegetation Cover]. *Vestnik Buryatskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika, Informatika – Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2015. Issue 9. Pp. 54–61.