УДК 519.642.5
DOI: 10.18101/2304-5728-2019-2-3-15

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИНДЕКСА ДВА[1]

© Будникова Ольга Сергеевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6
E-mail: osbud@mail.ru

© Ботороева Мария Николаевна
старший преподаватель,
Иркутский государственный университет
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6
E-mail: masha888888@mail.ru

Многие процессы, протекающие в различных экобиологических и физических системах, описываются взаимосвязанными интегральными уравнениями Вольтерра I и II рода. Их можно записать в виде системы с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью — интегро-алгебраического уравнения. В статье исследован класс линейных интегро-алгебраических уравнений, для которого в терминах матричных полиномов сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения. Отмечено принципиальное отличие рассматриваемых задач от интегральных уравнений Вольтерра I и II рода. Работ по качественной теории интегро-алгебраических уравнений мало, а численные методы практически не развиты. Так как многие методы, разработанные для численного решения интегральных уравнений Вольтерра, либо принципиально не применимы, либо приводят к расходящимся процессам. Для выделенного класса задач разработаны одно- и двухшаговые методы, основанные на модификации методов типа Адамса. В качестве подтверждения эффективности алгоритмов приведены результаты численных экспериментов.
Ключевые слова: многошаговые методы; интегро-алгебраические уравнения; квадратурные формулы; аппроксимация; индекс; матричный полином.

Для цитирования:
Будникова О. С., Ботороева М. Н. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений индекса два // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 2. С. 3–15.

[1] Исследование частично поддержано грантом РФФИ № 18-51-54001_Вьет_а

Введение

Интегро-алгебраические уравнения (ИАУ) — это системы интегральных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В последние годы ИАУ активно используются для моделирования развивающихся систем (см., например, [2; 9]).

В статье [11] впервые были проведены качественные исследования на предмет существования и единственности решения ИАУ и предложен численный метод их решения первого порядка точности. В публикации [17] было дано понятие индекса (характеристика сложности рассматриваемых задач), по невязке по своей сути аналогичное понятию степени некорректности для интегральных уравнений Вольтерра I рода [2]. В работах [18; 19] рассмотрено применение методов Рунге — Кутты и полиномов наилучшего приближения для численного решения полуявных интегро-алгебраических уравнений. Есть работы, посвященные качественному исследованию и численному решению двумерных ИАУ (см. [15; 22]) и ИАУ со слабой особенностью в ядре (см. [16; 21]). Кроме того, ИАУ посвящено несколько разделов монографии [13]. В статье [3] рассмотрены ИАУ с переменными пределами интегрирования. Отметим, что подавляющее число работ посвящено исследованию ИАУ индекса один. Зачастую методы, разработанные для ИАУ индекса один либо принципиально не применимы для ИАУ индекса два, либо приводят к расходящимся процессам.

Данная статья посвящена построению численных методов решения ИАУ индекса два и продолжает цикл исследований по численному решению ИАУ многошаговыми методами (см. [4; 5; 8]).

Постановка задачи

Будем рассматривать систему интегральных уравнений вида

$$A(t)x(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds=f(t),\ \ 0\le s\le t\le 1. \tag{1}$$

Предполагается, что элементы $(n\times n)$-матриц $A(t)$ и $K(t,s)$ и n-мерной известной вектор-функции $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Непрерывную n-мерную вектор-функцию $x(t)$ будем называть решением задачи (1), если при ее подстановке уравнение обратится в тождество.

Отметим, что при $A(t)\equiv 0$ система (1) является системой интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) I рода. Если $\det A(t)\ne 0, \forall t\in[0,1]$, то (1) — это система ИУВ II рода. Если определитель матрицы $A(t)$ вырождается на дискретном множестве точек $t_j\in[0,1]$, то (1) — это системы ИУВ III рода.

Мы рассматриваем случай
$$A(t) \neq O, \det A(t) \equiv 0, \tag{2}$$
где O — нулевая матрица.

Системы (1) с условием (2), продолжая классификацию, называют системами ИУВ IV рода. В первых работах такие задачи называли интегральными аналогами дифференциально-алгебраических уравнений [11] или вырожденными системами интегральных уравнений Вольтерра [6]. В настоящее время рассматриваемые задачи принято называть интегро-алгебраическими уравнениями.

При исследовании дифференциально-алгебраических уравнений В. Ф. Чистяковым было введено понятие индекса, которое можно использовать в качестве характеристики сложности выделенного класса задач.

Определение 1. [12] Минимальное число m, при котором существует дифференциальный оператор
$$\Omega_m = \sum_{j=0}^{m} W_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$
где W_j — $(n \times n)$-матрицы с непрерывными элементами, такой, что
$$\Omega_m \circ \left(A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds \right) = \breve{A}(t)x(t) + \int_0^t \breve{K}(t,s)x(s)ds,$$
здесь $\breve{A}(t), \breve{K}(t,s)$ — некоторые матрицы с непрерывными элементами, причем
$$\det \breve{A}(t) \neq 0, \ \ \forall t \in [0,1]$$
назовем индексом системы (1).

Понятие индекса аналогично понятию степени некорректности для интегральных уравнений Вольтерра I рода, введенному А. С. Апарциным. Так, уравнение Вольтерра I рода с ядром $K(t,t) \neq 0, \forall t \in [0,1]$ имеет индекс один, а ИУВ I рода с $K(t,t) = 0$, но $K'_t(t,t) \neq 0, \forall t \in [0,1]$, — индекс два [2].

Для получения достаточных условий существования и единственности непрерывного решения задачи (1) приведем необходимое определение.

Определение 2. [14] Матричный полином
$$\lambda^2 B(t) + \lambda C(t) + D(t),$$
где $B(t), C(t), D(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$, если для любого $t \in [0,1]$ выполнены условия:

1) $rank B(t) = r = const$;

2) $rank\left[B(t) | C(t)\right] = r + l = const$;

3) $\det(\lambda^2 B(t) + \lambda C(t) + D(t)) = a_0(t)\lambda^{2r+l} + a_1(t)\lambda^{2r+l-1} + ..., a_0(t) \neq 0.$

В работах [7; 14] описаны свойства матричных полиномов, имеющих простую структуру, и их приложения к исследованию различных классов уравнений. Приведем наиболее важные из них.

Лемма 1. [14] Если матричный полином $\lambda^2 B(t)+\lambda C(t)+D(t)$ на отрезке $[0,1]$ имеет простую структуру и элементы матриц $B(t), C(t), D(t)$ принадлежат классу функций $C^p_{[0,1]}$, то существуют невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ с элементами из $C^p_{[0,1]}$, такие, что

$$P(t)\left(\lambda^2 B(t)+\lambda C(t)+D(t)\right)Q(t)=$$
$$=\lambda^2\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} C_{11}(t) & 0 & C_{13}(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & 0 \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r-l} \end{pmatrix},$$

где $C_{11}(t), C_{13}(t), D_{11}(t), D_{12}(t), D_{21}(t), D_{22}(t)$ — некоторые блоки подходящей размерности, а E_r — единичная матрица размерности r.

Лемма 2. [7] Если матричный полином $\lambda^2 B(t)+\lambda C(t)+D(t)$ на отрезке $[0,1]$ имеет простую структуру, то матрицы $P(t)B(t)$, $P(t)C(t)$, $P(t)D(t)$ имеют блочный вид:

$$P(t)B(t)=\begin{pmatrix} B^1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P(t)C(t)=\begin{pmatrix} C^1(t) \\ C^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, P(t)D(t)=\begin{pmatrix} D^1(t) \\ D^2(t) \\ D^3(t) \end{pmatrix}$$

и

$$\det\begin{pmatrix} B^1(t) \\ C^2(t) \\ D^3(t) \end{pmatrix}\neq 0\,\forall t\in[0,1].$$

Здесь $B^1(t)$, $C^1(t)$, $D^1(t)$ — матрицы размерности $(r\times n)$, $C^2(t)$, $D^2(t)$ — $(l\times n)$-матрицы, $D^3(t)$ есть $((n-r-l)\times n)$-матрица.

Существование и единственность решения поставленной задачи

На основе лемм 1 и 2 можно получить условия на входные данные, при выполнении которых ИАУ (1) индекса два имеет единственное непрерывное решение.

Утверждение 1. Пусть для задачи (1) с условием (2) справедливо:

1) элементы $A(t), f(t)\in C^{p+2}_{[0,1]}, K(t,s)\in C^{p+2}_{\Delta}, \Delta=\{0\le s\le t\le 1\}, p\ge 2$;

2) матричный полином $\lambda^2 A(t)+\lambda K(t,t)+K'_t(t,t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$;

3) $rank\, A(0)=rank\left[A(0)\middle|f(0)\right]$;

4) $rank\, A(0)=rank\left[A(0)\middle|\left(f'(0)-\left(A'(0)+K(0,0)\right)x(0)\right)\right]$.

Тогда на отрезке $[0,1]$ задача (1) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$ из класса $C^p_{[0,1]}$.

Доказательство непосредственно вытекает из равенства

$$A(t)x'(t)+\left(A'(t)+K(t,t)\right)x(t)+\int_0^t K'_t(t,s)x(s)ds=f'(t), \tag{3}$$

полученного из (1) дифференцированием по t, лемм 1, 2 и аналогично доказательству из [7].

Сформулированная теорема носит достаточный характер, прокомментируем ее условия. Первое условие — гладкость входных данных — является необходимым и используется при проведении доказательства. Третье и четвертое условия также являются необходимыми, так как гарантируют разрешимость системы в начальной точке. А вот второе условие носит лишь достаточный характер и гарантирует нам отсутствие сингулярных точек в решении. При нарушении этого условия исследование системы (1) затруднено, так как она может иметь множество решений. Для иллюстрации рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Система

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}+\int_0^t \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]$$

имеет множество решений

$$\begin{cases} x(t)=c\sqrt{t}, \\ y(t)=2, \end{cases}$$

где c — произвольная постоянная.

Выпишем определитель матричного полинома

$$\det\left(\lambda^2 A(t)+\lambda K(t,t)+K'_t(t,t)\right)=\det\begin{pmatrix} \lambda^2 t-\dfrac{3}{2}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}=\lambda^3 t^2-\frac{3}{2}\lambda^2 t.$$

Видно, что условие простой структуры нарушено в точке $t=0$.

Пример 2. Рассмотрим еще одну систему

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}+\int_0^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} g''(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

$$g(0)=g'(0)=0,\ t\in[0,1],$$

которая имеет множество решений

$$\begin{cases} x(t)=c, \\ y(t)=g''(t), \end{cases}$$

где c — произвольная постоянная.

Здесь

$$\det\left(\lambda^2 A(t)+\lambda K(t,t)+K_t'(t,t)\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda^2 t-\lambda & \lambda^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\lambda^2(t-1)-\lambda.$$

Условие простой структуры нарушено, так как $rank\, A(t)=1,$ а

$$\deg\left(\det\left(\lambda^2 A(t)+\lambda K(t,t)+K_t'(t,t)\right)\right)=\begin{cases}2,\ t\neq 1\\ 1,\ t=1\end{cases}.$$

В заключение данного пункта опишем сложности численного решения ИАУ. Рассматриваемые в статье задачи имеют индекс два, то есть система (1) включает в себя взаимосвязанные ИУВ II рода, ИУВ I рода, имеющих степень некорректности один и два, что хорошо демонстрирует следующий пример.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}a&b&c\\0&1&0\\0&0&(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(s)\\y_2(s)\\y_3(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\end{pmatrix},$$

$$f_2(0)=f_3(0)=f_3'(0)=0,\ t\in[0,1],$$

где a, b, и c — скалярные параметры. При гладких входных данных это уравнение имеет достаточно гладкое решение.

Для второй и третьей компоненты имеем ИУВ I рода соответственно

$$\int_0^t y_2(s)ds=f_2(t), \tag{4}$$

$$\int_0^t (t-s)y_3(s)ds=f_3(t). \tag{5}$$

В работе [1] показано, что простейшие методы, основанные на квадратурных формулах правых, левых, средних прямоугольников, а также метод трапеций являются сходящимися для модельного уравнения (4). Применение неявных квадратурных формул порядка выше двух точности приводит к неустойчивым процессам. Например, в [20] приведены результаты применения формул Грегори и Симпсона. Позже в [10] было показано, что ряд эффективных явных многошаговых методов для модельного уравнения (5) являются расходящимися для (4).

Обобщая все вышесказанное, можно заключить, что построение методов для численного решения ИАУ индекса два — нетривиальная задача, так как разработанные алгоритмы должны хорошо справляться с решением всех трех типов уравнений.

Численные методы

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih,\ i = 1,...,N,\ h = \frac{1}{N}$. Опишем, прежде всего, применение явных методов типа Адамса [10; 20] к построению численных методов решения ИУВ I рода.

Для заданной функции $g(t)$, с учетом обозначения $g_i = g(t_i)$, имеем

$$\int_0^{t_{i+1}} g(\tau)d\tau = \int_0^{t_{k+1}} g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\tau)d\tau \approx$$

$$\approx \int_0^{t_{k+1}} L_{k+1}^0(g_0, g_1, ..., g_k, \tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, \tau)d\tau =$$

$$= h\sum_{l=0}^{k} \beta_l g_l + \sum_{j=k+1}^{i} h\sum_{l=0}^{k} \gamma_l g_{j-l} = h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} g_l, \qquad (6)$$

где $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, t)$ — интерполяционный полином степени k, зависящий от параметров (g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), ..., (g_i, t_i), $j = k+1,...,i$.

Для $k = 1,2$ приведем значения коэффициентов $\omega_{i+1,l}$, которые являются линейными комбинациями β_l и γ_l:

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & & & & & \\ 3 & 3 & & & & \\ 3 & 2 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}; \quad \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Здесь при $k = 1$ первый нулевой столбец опущен, так как при приближенном вычислении интегралов для нечетных значений k коэффициент $\omega_{i+1,0} = 0$ [10; 20].

Формула (6) носит название явной квадратурной формулы Адамса. Методы численного решения ИУВ I рода, основанные на (6), с учетом обозначений

$$A_{i+1} = A(t_{i+1}),\quad K_{i+1,l} = K(t_{i+1}, t_l),\quad f_{i+1} = f(t_{i+1}),\quad x_{i+1} \approx x(t_{i+1})$$

имеют вид:

$$h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1},\ i = k,...,N-1. \qquad (7)$$

Вернемся к исходной задаче. Для численного решения (1) предлагается применять методы, основанные на явной квадратурной формуле Адамса, поскольку данные методы устойчивы для ИУВ I рода [10]. Но их непосредственное применение приводит к проблемам решения вырожденной СЛАУ:

$$A_{i+1}x_{i+1} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ \ i = k,\dots,N-1.$$

Приведем модификацию методов Адамса [4]. Будем вычислять первое слагаемое как значение интерполяционного полинома степени k $L_{k+1}^{i}(x_{i-k}, x_{i-k+1},\dots,x_i,t)$ в точке $t = t_{i+1}$.

С учетом вышесказанного предлагаемые методы будут иметь вид:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ i = k,\dots,N-1. \quad (8)$$

Например, одно- и двухшаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1}(2x_i - x_{i-1}) + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

$$A_{i+1}(3x_i - 3x_{i-1} + x_{i-2}) + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}.$$

Приведем результаты численных расчетов предложенными методами на нескольких тестовых ИАУ.

Пример 4. Данная система

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 & 0 \\ e^{-2s} & e^{t+s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2s}(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t(t+1) + te^{-t} + t^2e^{2t} \\ 2te^t + (t^2-1)e^{-t} + t^3e^{2t} + 1 \\ \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix},\ t \in [0,1]$$

удовлетворяет всем условиям утверждения 1 и имеет точное решение:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}^T.$$

В таблице 2 приведены погрешности вычисления по евклидовой норме err и порядок метода p, определенный по формуле

$$p = \log_2 \frac{err_h}{err_{h/2}}.$$

Таблица 2

h	Одношаговый метод		Двухшаговый метод	
	err	*p*	*err*	*p*
0.2	0.7363	1.95	0.20987	2.62
0.1	0.1903	1.94	0.034186	2.92
0.05	0.0497	1.96	0.00452	2.89
0.025	0.0128	2	0.00061	2.93

Пример 5. [6] Система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad d \neq 1,\ t \in [0,1].$$

имеет единственное решение:

$$x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - \dfrac{1}{1-d}\left(f_1(t) - f_2'(t)\right) \\ \dfrac{1}{1-d}\left(f_1'(t) - f_2''(t)\right) \end{pmatrix}$$

при любых $f_1(t) \in C^1, f_2(t) \in C^2$, таких, что $f_2(0) = 0, f_1(0) = f_2'(0)$.

Результаты численных экспериментов при $d = 5, f_1(t) = 1 - e^t, f_2(t) = t^2$ приведены в таблице 3.

Таблица 3

h	Одношаговый метод		Двухшаговый метод	
	err	*p*	*err*	*p*
0.2	0.10523	1.86	0.01667	2.76
0.1	0.02893	1.93	0.002459	2.69
0.05	0.00757	1.96	0.00038	1.97
0.025	0.00194	1.06	0.000097	2.01

Результаты численных расчетов показывают, что предложенные методы являются сходящимися. Обладают порядком точности k .

Заключение

В работе получены достаточные условия, при выполнении которых существует единственное непрерывное решение интегро-алгебраических уравнений индекса два. Разработаны численные методы решения на основе экстраполяции главной части и модификации явной квадратурной формулы типа Адамса. Эффективность данных алгоритмов подтверждена на ряде тестовых задач.

В дальнейшем планируется качественное исследование более сложного класса задач и построение методов их численного решения.

Литература

1. Апарцин А. С., Бакушинский А. Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Иркутский государственный университет, 1972. Вып. 1. С. 248–258.

2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1999. 193 с.

3. Ботороева М. Н., Булатов М. В. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2017. № 20. С. 3–16. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.20.3.

4. Будникова О. С., Булатов М. В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 829–839. DOI: 10/1134/S0965542512050041.

5. Будникова О. С. О модифицированных многошаговых методах для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса два // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 45–54.

6. Булатов М. В. О преобразовании вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 22–30.

7. Булатов М. В., Чистякова Е. В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1665–1673. DOI: 10.1134/S0965542511090065.

8. Булатов М. В., Будникова О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2015. № 13. С. 3–15.

9. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.

10. Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис. … канд. физ. мат. наук. Иркутск, 1985. 215 с.

11. Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

12. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.

13.Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Unversity Press. Cambridge, 2004. 612 p.

14. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential algebraic equations of higher order // Differential Equations. 2008. Vol. 44. P. 1353–1360.

15. Bulatov M. V., Lima P. M. Two-dimensional integral-algebraic systems: Analysis and computational methods // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2011. Vol. 236, № 2. P. 132–140. DOI: 10.1016/j.cam.2011.06.001.

16. Bulatov M. V., Lima P. M., Wienmüller E. B. Existence and Uniqueness of Solutions to Weakly Singular Integral-Algebraic and Integro-Differential Equations // Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12, № 2. P. 308–321. DOI: 10.2478/s11533-013-0334-5.

17. Gear C. W. Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1990. Vol. 27, № 6. P. 1527–1534.

18. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 // Applied Numerical Mathematics. 2011. Vol. 61, № 1. P. 131–148. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.08.009.

19. Kauthen J. P. The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by pollinomial spline collocation methods // Mathematics of Computation. 2000. Vol. 236. P. 1503–1514.

20. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia, 1985. 227 p. DOI: 10.1137/1.9781611970852.

21. Pishbin S. Ghoreishi F., Hadizadeh M. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: the numerical treatments // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2013. Vol. 245, № 1. P. 121–132. DOI: 10.1016/j.cam.2012.12.012.

22. Pishbin S. Numerical solution and structural analysis of two-dimensional integral-algebraic equations // Numerical Algorithms. 2016. Vol. 73, № 2. P. 305–322. DOI: 10.1007/s11075-016-0096-9.

MULTISTEP METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL ALGEBRAIC EQUATIONS OF INDEX-2

Olga S. Budnikova
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Irkutsk State University
6 Nizhnyaya Naberezhnaya St., Irkutsk 664011, Russia
E-mail: osbud@mail.ru

Mariya N. Botoroeva
Senior Lecturer,
Irkutsk State University
6 Nizhnyaya Naberezhnaya St., Irkutsk 664011, Russia
E-mail: masha888888@mail.ru

Many processes in various eco-biological and physical systems are described by interconnected Volterra integral equations of the first and the second kinds. Such equations may be written as a system with an identically singular principal part, in other words, in the form of integral algebraic equation. The article studies the class of linear integral algebraic equations, for which the sufficient conditions for existence of a unique continuous solution are formulated in terms of matrix polynomials. The fundamental difference between the problems under consideration and the Volterra integral equations of the first and the second kinds is noted. There are few works on the qualitative theory of integral algebraic equations, and numerical methods for their solution are underdeveloped. Many methods for numerical solution of Volterra integral equations are not applicable or lead to divergent processes. We have proposed one- and two-step methods based on modifications of Adams–Bashforth and Adams–Moulton formulas for the selected class of problems. The results of numerical experiments confirm the efficiency of the algorithms.

Keywords: multistep methods; integral algebraic equations; quadrature rule; approximation; index; matrix polynomial.

References

1. Apartsin A. S., Bakushinskii A. B. Priblizhennoe reshenie integralnykh uravnenii Volterra I roda metodom kvadratur [Approximate Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by Quadrature Methods]. *Differentsialnyie i integralnyie uravneniya.* 1972. V. 1. Pp. 248–258.

2. Apartsin A. S. *Neklassicheskie uravneniya Volterra I roda: teoriya i chis-lennye metody* [Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind: Theory and Numerical Methods]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1999. 193 p.

3. Botoroeva M. N., Bulatov M. V. Prilozheniya i metody chislennogo resheniya odnogo klassa integro-algebraicheskikh uravnenii s peremennymi predelami integrirovaniya [Applications and Methods for Numerical Solution of a Particular Class of Integral Algebraic Equations with Variable Limits of Integration]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2017. No. 20. Pp. 3–16. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.20.3.

4. Budnikova O. S., Bulatov M. V. Chislennoe reshenie integro-algebraicheskikh uravnenii mnogoshagovymi metodami [Numerical Solution of Integral Algebraic Equations by Multistep Methods]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2012. V. 52. No. 5. Pp. 691–701. DOI: 10/1134/S0965542512050041.

5. Budnikova O. S. O modifitsirovannykh mnogoshagovykh metodakh dlya chislennogo resheniya lineinykh integro-algebraicheskikh uravnenii indeksa dva [On Modified Multistep Methods for Numerical Solution of Linear Integral Algebraic Equations of Index-2]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 2014. V. 16. No. 1. Pp. 45–54.

6. Bulatov M. V. O preobrazovanii vyrozhdennykh sistem integralnykh uravnenii tipa Volterra [Transformation of Singular Systems of Volterra-Type Integral Equations]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 2000. V. 5. No. 4. Pp. 22–30.

7. Bulatov M. V., Chistyakova E. V. Ob odnom semeistve vyrozhdennykh integrodifferentsialnykh uravnenii [On a Certain Family of Singular Integro-Differential Equations]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2011. V. 51. No. 9. Pp. 1558–1566. DOI: 10.1134/S0965542511090065.

8. Bulatov M. V., Budnikova O. S. Chislennoe reshenie integro-algebraicheskikh uravnenii so slaboi osobennostyu v yadre k-shagovymi metodami [Numerical Solution of Integral Algebraic Equations with Weakly Singular Kernels by k-step Methods]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika.* 2015. No. 13. Pp. 3–15.

9. Glushkov V. M., Ivanov V. V., Yanenko V. M. *Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem* [Modeling of Evolutionary Systems]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 350 p.

10. Ten Men Yan. *Priblizhennoe reshenie lineinykh integralnykh uravnenii Volterra I roda. Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Approximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind. Cand. math. and phys. sci. diss.]. Irkutsk, 1985. 215 p.

11. Chistyakov V. F. Chistyakov V. F. O singulyarnykh sistemakh obyknovennykh differentsialnykh uravnenii i ikh integralnykh analogakh [On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and Their Integral Analogues]. *Funktsii Lyapunova i ikh primeneniya.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1987. Pp. 231–239.

12. *Algebro-differentsialnye operatory s konechnomernym yadrom* [Algebraic Differential Operators with Finite-Dimensional Kernel]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1996. 280 p.

13. Brunner H. *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations.* Cambridge: Unversity Press, 2004. 612 p.

14. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential Algebraic Equations of Higher Order. *Differential Equations.* 2008. V. 44. Pp. 1353–1360.

15.Bulatov M. V., Lima P. M. Two-Dimensional Integral-Algebraic Systems: Analysis and Computational Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2011. V. 236. No. 2. Pp. 132–140. DOI: 10.1016/j.cam.2011.06.001.

16. Bulatov M. V., Lima P. M., Wienmüller E. B. Existence and Uniqueness of Solutions to Weakly Singular Integral-Algebraic and Integro-Differential Equations. *Central European Journal of Mathematics.* 2014. V. 12. No. 2. Pp. 308–321. DOI: 10.2478/s11533-013-0334-5.

17. Gear C. W. Differential-Algebraic Equations, Indices, and Integral Algebraic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1990. V. 27. No. 6. Pp. 1527–1534.

18. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2. *Applied Numerical Mathematics.* 2011. V. 61. No. 1. Pp. 131–148. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.08.009.

19. Kauthen J. P. The Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Index-1 by Pollinomial Spline Collocation Methods. *Mathematics of Computation.* 2000. V. 236. Pp. 1503–1514.

20. Linz P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.* Philadelphia: SIAM, 1985. 227 p. DOI: 10.1137/1.9781611970852.

21. Pishbin S. Ghoreishi F., Hadizadeh M. The Semi-Explicit Volterra Integral Algebraic Equations with Weakly Singular Kernel: The Numerical Treatments. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2013. V. 245. No. 1. Pp. 121–132. DOI: 10.1016/j.cam.2012.12.012.

22. Pishbin S. Numerical Solution and Structural Analysis of Two-Dimensional Integral-Algebraic Equations. *Numerical Algorithms.* 2016. V. 73. No. 2. Pp. 305–322. DOI: 10.1007/s11075-016-0096-9.