

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 539.3

DOI: 10.18101/2304-5728-2019-2-72-82

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ МЕЖСЛОЙНОГО ДЕФЕКТА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ СЖАТИИ КОЛЬЦА¹

© **Бохоева Любовь Александровна**

доктор технических наук, профессор,
Восточно-Сибирский университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40в
E-mail: bohoeva@yandex.ru

© **Чермошнцева Анна Сергеевна**

кандидат технических наук,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1
E-mail: asch-13@ya.ru

В работе решена задача нелинейной устойчивости тонких расслоений, расположенных вблизи внутренней поверхности сжатого кольца. Вблизи внутренней поверхности многослойное кольцо имеет один межслойный дефект типа расслоение, который теряет устойчивость хлопком при сжатии кольца. Подобное выпучивание обусловлено высокой концентрацией межслойного напряжения на фронте дефекта, далее при возрастании нагрузки область выпучивания увеличивается до критического размера. Такой вид потери устойчивости носит название «отслоение тонкого слоя». Результаты расчета получены с помощью приближенной теории пологих арок. Определена критическая нагрузка, получены аналитические выражения для прогибов на начальной стадии закритического деформирования. В системе ANSYS смоделировано кольцо, состоящее из двух тонкостенных объемных оболочек в виде колец. Представлены результаты численного расчета методом конечных элементов для сравнения с полученными аналитическими расчетами.

Ключевые слова: расслоение; дефект; кольцо; критическая нагрузка; прогиб; устойчивость; нелинейность; пологая арка; метод конечных элементов; модель.

Для цитирования:

Бохоева Л. А., Чермошнцева А. С. Определение критической нагрузки межслойного дефекта, возникающего при сжатии кольца // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 2. С. 72–82.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №18-29-18050/18.

Введение

Устойчивость конструкций с дефектами типа расслоений, в частности тонкостенного кольца, остается наиболее интересной и малоизученной из всех проблем механики деформированного твердого тела [1]. В работе рассмотрена задача о нелинейной устойчивости тонких расслоений, расположенных вблизи внутренней поверхности сжатого кольца. Задачи об устойчивости элементов конструкций с различными дефектами рассмотрены в работах [2–6].

Постановка задачи

Рассмотрим кольцо толщиной H и радиусом R под действием внешнего давления q (рис. 1). Вблизи внутренней поверхности многослойное кольцо имеет один межслойный дефект типа расслоение толщиной $h \gg H$, который теряет устойчивость хлопком при сжатии кольца. Дефект на той части кольца, где он не соприкасается с кольцом, нагружен в окружном направлении сжимающими силами P . Для решения задачи устойчивости дефекта типа расслоение в работе использована приближенная теория пологих оболочек с помощью линейризованных уравнений. Получение точного решения для данного случая не представляется возможным.

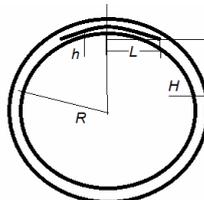


Рис. 1. Кольцо с межслойным дефектом

Материал дефектного участка изотропный. Длина дефекта мала по сравнению с длиной окружности, дефект симметричен относительно оси z . Начало координат расположено так, что на границе дефектного участка при $s = L$ значение $z = 0$. В ненагруженном состоянии дефект не отслаивается от кольца. Так как межслойный дефект соприкасается с кольцом, внутренние усилия постоянны и равны приложенной силе P , не зависят от размеров самого кольца, межслойный дефект можно рассматривать как пологую арку. Координата s изменяется по средней линии пологой арки на дефектном участке $0 \leq s \leq L$, L — длина дефектного участка и на участке $0 \leq s \leq s_1$, где дефект не соприкасается с кольцом, s_1 — точка соприкосновения дефекта с кольцом. Изгиб дефекта сопровождается возникновением внутренних нормальных и поперечных усилий N, Q и изгибающим моментом M (рис. 2). Необходимо определить пере-

мещение дефекта и условия, при котором происходит потеря устойчивости расслоения.

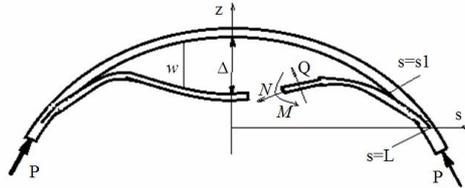


Рис. 2. Изгиб дефекта типа расслоение

Недеформированная форма кольца описывается функцией $z(s)$. В работе рассмотрен только один случай поведения дефекта — кривизна функции $z(s)$ на дефектном участке везде отрицательна.

Определены прогибы дефекта, перемещение вершины дефекта Δ в зависимости от сжимающей нагрузки P . Линеаризованные уравнения получены при следующих допущениях:

1. Изменения геометрических размеров кольца считаются пренебрежимо малыми.
2. Силы трения между дефектными участками не учитываются.
3. Связь между внутренним изгибающим моментом и поперечным изгибом при потере устойчивости описывается линейными зависимостями теории изгиба арок, основанной на гипотезе плоских сечений.
4. Ось дефектного участка без растяжения.

Решение задачи

Рассмотрим равновесия элемента арки в отклоненном состоянии от исходного (рис. 2). Выделим элемент AB и все силы, приложенные к нему. Радиальные перемещения будем считать $w = w(s)$ малыми величинами,

величины $w'(s) = \frac{dw}{ds}, w''(s) = \frac{d^2w}{ds^2}, w'''(s) = \frac{d^3w}{ds^3}$ — величинами первого

порядка малости. Касательные перемещения точек дефекта v будем считать бесконечно малыми. В соответствии с идеей линеаризованных уравнений будем учитывать только величины первого порядка малости и пренебрегать величинами высшего порядка малости. При составлении системы нелинейных дифференциальных уравнений вводим следующие допущения:

$$w = \vartheta; \sin(\vartheta) = \vartheta; \cos(\vartheta) = 1; \sin(\vartheta + d\vartheta); \cos(\vartheta + d\vartheta) = 1, \quad (1)$$

где w — прогиб по оси z , ϑ — угол поворота. В силу допущения изгибающий момент и поперечная сила связаны между собой следующими зависимостями:

$$M = EJ\vartheta'; Q = (EJ\vartheta')'; N' = \frac{dN}{ds}; \vartheta = w' = \frac{dw}{ds},$$

где EJ — изгибная жесткость. Положительное направление усилия, изгибающего момента, и перемещения представлены на рис. 2. Проектируя на ось S все силы, получим следующее уравнение

$$-N \cos(\vartheta) - Q \sin(\vartheta) - (N + dN) \cos(\vartheta + d\vartheta) + (Q + dQ) \sin(\vartheta + d\vartheta) = 0.$$

Учитывая допущения 1, получим

$$-N - Q\vartheta + N + dN + Q\vartheta + \vartheta dQ + Qd\vartheta + dQd\vartheta = 0.$$

Пренебрегаем величиной высшего порядка малости $dQd\vartheta$ и учитывая преобразование $\vartheta dQ + Qd\vartheta = (Q\vartheta)'$, получим $N' + (Q\vartheta)' = 0$. Исключая слагаемое $(Q\vartheta)' = [(EJw'')' w']'$ как содержащее произведение двух величин первого порядка малости, окончательно получим первое дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{ds} = 0. \quad (2)$$

Приравниваем к нулю проекцию всех сил на ось z и сумму всех моментов, исключив величины высших порядков малости получим два уравнения

$$\frac{d^2 M}{ds^2} - \left(\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{d^2 w}{ds^2} \right) N = 0. \quad (3)$$

Изгибающий момент в тонкой упругой арке связан соотношением упругости

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{M}{EJ}, \quad (4)$$

где EJ — изгибная жесткость арки в ее плоскости. Из уравнения (2) и требования $N = P$ при $s = s_1$, получаем $N = P$ на интервале $0 \leq s \leq s_1$. Граничные условия для уравнений (3) и (4) аналогичны граничным условиям задач изгиба. Если радиальные перемещения на торце не стеснены, то поперечная сила равна нулю $Q = (EI\vartheta') = 0$ и угол поворота равен нулю $\vartheta = 0$,

$$\text{при } s = 0, \quad \frac{dM}{ds} = 0; \frac{dw}{ds} = 0;$$

$$\text{при } s = s_1, \quad M = 0; w = 0; \quad (5)$$

Для удобства введем следующие обозначения

$$k^2 = \frac{P}{EJ}, f(s) = \frac{d^2 z}{ds^2},$$

где $z(s)$ функция от s . Функцию $f(s)$ будем считать непрерывной на участке $0 \leq s \leq s_1$. Исключив $w = w(s)$ из уравнения (3) и (4), можно получить одно уравнение с одним неизвестным

$$\frac{d^2M}{ds^2} - Pf(s) + \frac{MP}{EJ} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2M}{ds^2} + k^2M = Pf(s). \quad (6)$$

Определим решение уравнения (6) для изгибающего момента в виде

$$M = EJ \left[k \int_0^s f(\eta) \sin k(s - \eta) d\eta - \frac{k \cos ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta \right],$$

которой удовлетворяет граничным условиям (6), переменная $0 \leq \eta \leq s1$.

Для определения перемещения проинтегрируем уравнение (4) дважды. Проинтегрировав уравнение (4), получаем

$$\frac{dw}{ds} = \int_0^s \left[k \int_0^s f(\eta) \sin k(s - \eta) d\eta - \frac{k \cos ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta \right] ds.$$

Эффективным способом вычисления двойных интегралов является сведение их к однократным интегралам. Для вычисления двойного интеграла введем обозначение

$$I_1 = \int_0^s \left[k \int_0^s f(\eta) \sin k(s - \eta) d\eta \right] ds = k \int_0^s \left[f(\eta) \frac{1}{k} \{ -\cos k(s - \eta) \} \Big|_0^s \right] d\eta$$

$$= \int_0^s [f(\eta) \{ \cos k\eta - \cos k(s - \eta) \}] d\eta = \int_0^s [f(\eta) \{ 1 - \cos k(s - \eta) \}] d\eta$$

где $\cos k\eta = 1$.

$$I_2 = \int_0^s \frac{k \cos ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta ds = \frac{\sin ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta ds.$$

Окончательно получаем

$$\frac{dw}{ds} = \int_0^s f(\eta) \left[1 - \cos k(s - \eta) \right] d\eta - \frac{\sin ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta. \quad (7)$$

Проинтегрировав выражение (7), получим

$$w = w(0) + \int_0^s \int_0^s f(\eta) \left[1 - \cos k(s - \eta) \right] d\eta ds - \frac{\sin ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta ds.$$

Для вычисления двойного интеграла введем обозначение

$$I_3 = \int_0^s \int_0^s f(\eta) [1 - \cos k(s - \eta)] d\eta ds = \int_0^s d\eta \int_0^s f(\eta) [1 - \cos k(s - \eta)] ds =$$

$$= \int_0^s f(\eta) \left[s + \frac{\sin k(-s + \eta)}{k} \right] \Big|_0^s d\eta = \frac{1}{k} \int_0^s [ks - \sin k(s - \eta) - \sin k] d\eta,$$

где $\sin k\eta = k\eta$.

$$I_4 = \int_0^s \frac{\sin ks}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta ds = \frac{-\cos(ks)}{k \cos ks1} \Big|_0^s \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta$$

$$= \frac{1 - \cos ks}{k \cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta.$$

Окончательно получим перемещение в виде

$$w = w(0) + \frac{1}{k} \int_0^s f(\eta) [k(s - \eta) - \sin k(s - \eta)] d\eta - \frac{1 - \cos ks}{k \cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin k(s1 - \eta) d\eta \quad (8)$$

В точке, где расслоение соприкасается с кольцом $s = s1, w = 0$, из уравнения (8) получаем

$$w(0) = \frac{1}{k} \int_0^{s1} f(\eta) [k(s1 - \eta)] d\eta - \frac{1}{k} \int_0^{s1} f(\eta) \sin(s1 - \eta) d\eta - \frac{1}{k \cos(ks1)} \times$$

$$\times \int_0^{s1} f(\eta) \sin(k(s1 - \eta)) d\eta + \frac{\cos(ks1)}{k \cos(ks1)} \int_0^{s1} f(\eta) \sin(s1 - \eta) d\eta$$

Окончательно уравнение запишем в следующем виде:

$$\Delta = w(0) = \frac{1}{k \cos(ks1)} \int_0^{s1} f(\eta) \sin(k(s1 - \eta)) d\eta - \frac{1}{k} \int_0^{s1} f(\eta) [k(s1 - \eta)] d\eta \quad (9)$$

Найдем решение уравнения (7), удовлетворяющее граничным условиям при $s = s1, \frac{dw}{ds} = 0$

$$\int_0^{s1} f(\eta) [1 - \cos k(s1 - \eta)] d\eta - \frac{\sin ks1}{\cos ks1} \int_0^{s1} f(\eta) \sin(s1 - \eta) d\eta = 0$$

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью тригонометрических функций разности двух углов. Находим

$$\int_0^{s1} f(\eta) [1 - \cos k(ks1) \cos(k\eta) - \sin(ks1) \sin(k\eta) - \frac{\sin(ks1)}{\cos(ks1)} \sin(ks1) \cos(k\eta) +$$

$$+ \frac{\sin(ks1)}{\cos(ks1)} \cos(ks1) \cos(k\eta)] d\eta = \frac{1}{\cos(ks1)} \int_0^{s1} f(\eta) [\cos(ks1) - \cos(k\eta)] d\eta.$$

Получим выражение

$$\frac{1}{\cos(ks1)} \int_0^{s1} f(\eta) [\cos(ks1) - \cos(k\eta)] d\eta = 0.$$

Рассмотрев отличное от тождественного нуля решение, приходим к уравнению

$$\int_0^{s1} f(\eta)[\cos(k s1) - \cos(k \eta)] d\eta = 0. \tag{10}$$

Поведение межслойного дефекта, имеющего отрицательную кривизну, аналогично поведению пологих арок, у которых $f(s) = -\frac{1}{R}$. Решая уравнение (10), получаем

$$\int_0^{s1} \left(-\frac{1}{R}\right)[\cos(k s1) - \cos(k \eta)] d\eta = \left(-\frac{1}{R}\right) \frac{1}{k} [(k s1) \cos(k s1) - \sin(k s1)] = 0.$$

Рассмотрим решение, отличное от тождественного нуля, получаем характеристическое уравнение:

$$(k s1) \cos(k s1) - \sin(k s1) = 0.$$

Решив это трансцендентное уравнение с помощью системы MathCad (рис. 3), найдем собственные значения.

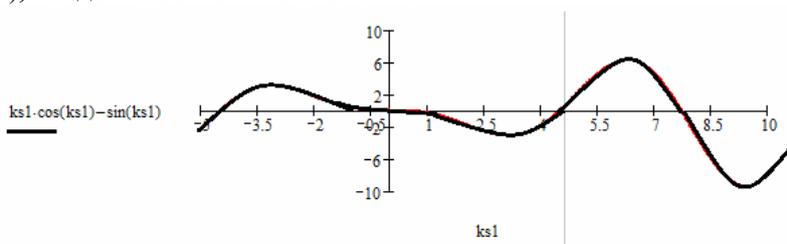


Рис. 3. Нахождение корней уравнения

Наименьшее (первое) собственное значение $ks1 = 4,493$ дает критическое значение сжимающей силы. На рис. 4 представлена зависимость параметра нагрузки от величины $s1$, где отслоившейся слой соприкасается с кольцом. Зависимость представлена в безразмерном виде $\sqrt{PL^2/EJ}$ от $s1/L$.

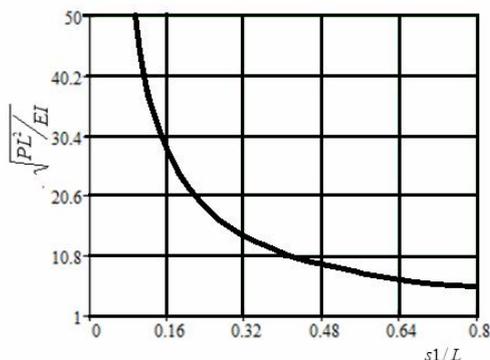


Рис. 4. Зависимость сжимающей силы от величины $s1$

Решив уравнение (9), найдем зависимость прогиба в центре дефекта от
 величины сжимающей нагрузки при $f(s) = -\frac{1}{R}$ и $ks1 = 4,493$

$$\Delta = \frac{1}{k^2 R \cos(ks1)} \left\{ [\cos(ks1) - 1] - \frac{1}{2} s1^2 k^2 \right\} = \frac{14,83}{k^2 R}.$$

На рис. 5 представлена зависимость прогиба в центре дефекта от вели-
 чины сжимающей нагрузки в безразмерном виде $\sqrt{PL^2/EJ}$ от $R\Delta/L^2$.

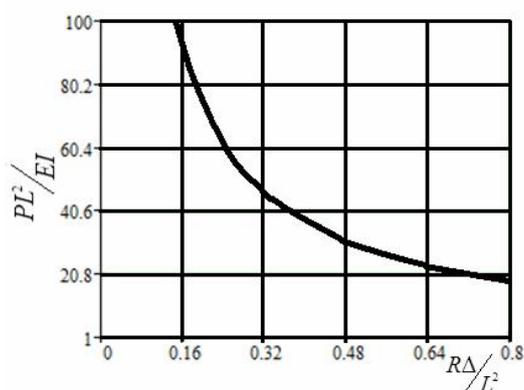


Рис. 5. Зависимость прогиба в центре дефекта
 от величины сжимающей нагрузки

В системе ANSYS было смоделировано кольцо, состоящее из двух
 тонкостенных объёмных оболочек в виде колец при помощи геометриче-
 ских примитивов (рис. 6). Представлены результаты численного расчета
 методом конечных элементов (рис. 7, 8).

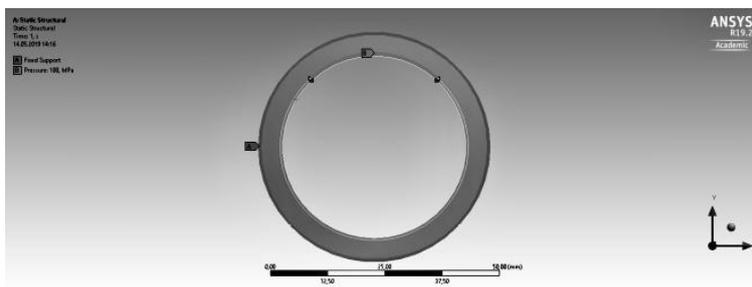


Рис. 6. Модель кольца с дефектом в системе ANSYS

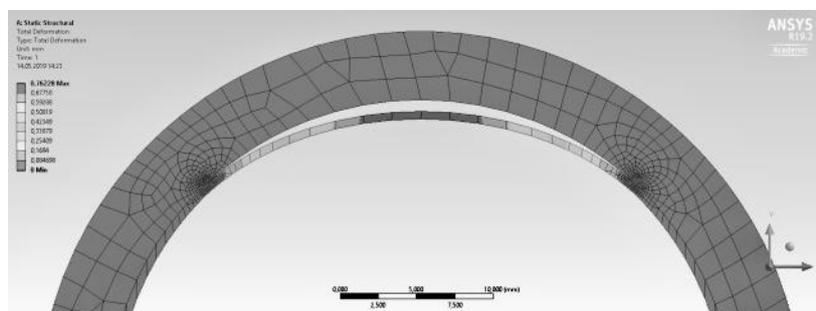


Рис. 7. Деформированное состояние кольца с дефектом (мм)

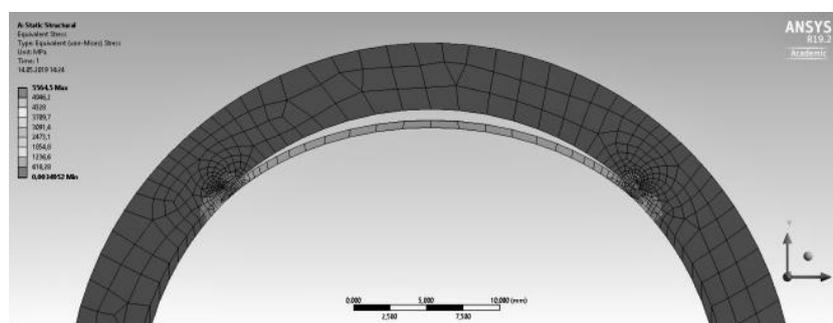


Рис. 8. Напряженное состояние кольца с дефектом (МПа)

В таблице представлены результаты аналитических и численных значений критической нагрузки дефектов, расположенных под $\varphi=75^0$. Диаметр образца составляет 90 мм, 50 мм, материал — сталь. Полученные результаты показали хорошую сходимость между аналитическими и численными значениями.

Таблица
Результаты аналитических и численных значений критической нагрузки дефектов

d (мм)	$P_{кр}$ (кН) (аналит.)	$P_{кр}$ (кН) (числен.)
90	21,9	21,5
50	23,6	23,1

Заключение

При потере устойчивости поведение тонких круговых отслоений становится качественно другим по сравнению с поведением стержней и пластин. Построена уточненная математическая модель, позволяющая прогнозировать потерю устойчивости тонкостенных элементов конструкций, на примере колец с дефектами из слоистых изотропных материалов, основанная на уравнениях теории пологих тонкостенных арок. Определены верхняя критическая нагрузка, прогиб в центре дефекта от величины сжимающей нагрузки. В теории устойчивости оболочек применяют понятия верхней и нижней критических нагрузок. Для определения нижней критической нагрузки следует обратиться к нелинейной теории оболочек.

Литература

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 311 с.
2. Бохоева Л. А., Бочектуева Е. Б. Моделирование и расчет устойчивости тонких отслоений в сферической оболочке // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2018. № 2. С. 77–84.
3. Stability and process of destruction of compressed plate of layered composite materials with defects / L. A. Bokhоеva [et al.] // Innovative Technologies in Engineering: Proc. VII Int. Sci. Practical Conf. Tomsk, 2016. P. 12077.
4. Бохоева Л. А., Дамдинов Т. А. Определение критических нагрузок энергетическим методом с учетом деформаций сдвига // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2006. № 1. С. 3–7.
5. Бохоева Л. А., Пнев А. Г., Чермошенцева А. С. Испытание на прочность кольцевых образцов из слоистых композиционных материалов с межслойными дефектами // Вестник Бурятского государственного университета. 2011. № 9. С. 230–236.
6. Бохоева Л. А. Исследование устойчивости пластин из слоистых композиционных материалов с дефектами типа сквозное отслоение // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2007. № 2. С. 7–16.

DETERMINATION OF CRITICAL LOAD OF INTERLAYER DEFECT ARISING FROM RING COMPRESSION

Lyubov A. Bokhоеva

Dr. Sci. (Engineering), Professor,
East-Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670033, Russia
E-mail: bohоеva@yandex.ru

Anna S. Chermoshentseva

Cand. Sci. (Engineering),

Bauman Moscow State Technical University

5 / bldg. 1, 2nd Baumanskaya St., Moscow 105005, Russia

E-mail: asch-13@ya.ru

The article presents a solution to the problem of nonlinear stability of thin delaminations located near the inner surface of a compressed ring. Near the inner surface the multilayer ring has one interlayer defect of the delamination type. This defect loses stability when the ring is compressed. Such a deformation is caused by a high concentration of interlayer stress at the front of the defect. As the load is increased the buckled area increases to a critical size. This kind of loss of stability is called “delamination of thin layer”. We have obtained the calculation results using the approximate theory of shallow arcs, and determined the critical load. The analytical expressions are obtained for deflections at the initial stage of supercritical deformation. We have modeled a ring consisting of two thin volumetric shells in the form of rings in the ANSYS system. The results of numerical calculation by the finite element method are presented for comparison with the obtained analytical calculations.

Keywords: delamination; defect; ring; critical load; deflection; stability; nonlinearity; shallow arc; finite element method; model.

References

1. Alfutov N. A. *Osnovy rascheta na ustoichivost uprugikh sistem* [Calculation Bases for Stability of Elastic Systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1991. 311 p.
2. Bokhoeva L. A., Bohektueva E. B. Modelirovanie i raschet ustoichivosti tonkikh otsloenii v sfericheskoi obolochke [Modeling and Calculation of Stability of Thin Delaminations in a Spherical Shell]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika*. 2018. No. 2. Pp.77–84. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-2-83-90.
3. Bokhoeva L. A., Rogov V. E., Chermoshentseva A. S., Lobanov D. V. Stability and Process of Destruction of Compressed Plate of Layered Composite Materials with Defects. *Innovative Technologies in Engineering*. Proc. VII Int. Sci. Practical Conf. Tomsk, 2016. Pp. 12077. DOI: <https://doi.org/10.2991/avent-18.2018.10>.
4. Bokhoeva L. A., Damdinov T. A. Opredelenie kriticheskikh nagruzok energeticheskim metodom s uchedom deformatsii sdviga [Determination of Critical Loads by the Energy Method Taking into Account Deformation Shift]. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni A. N. Tupoleva*. 2006. No. 1. Pp. 3–7.
5. Bokhoeva L. A., Pnev A. G., Chermoshentseva A. S. Ispytanie na prochnost koltsevykh obraztsov iz sloistykh kompozitsionnykh materialov s mezhsloinymi defektami [Tests for Strength of Ring Samples from Layered Composite Materials with Interlayer Defects]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2011. No. 9. Pp. 230–236.
6. Bokhoeva L. A. Issledovanie ustoichivosti plastin iz sloistykh kompozitsionnykh materialov s defektami tipa skvoznoe otsloenie [Stability Study of Plates from Layered Composite Materials with Defects of the Through Delamination Type]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*. 2007. No. 2. Pp. 7–16.