

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.925

DOI: 10.18101/2304-5728-2021-3-3-13

БИФУРКАЦИИ СШИТОГО ФОКУСА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

© Ройтенберг Владимир Шлеймович

кандидат физико-математических наук, доцент

Ярославский государственный технический университет

Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр., 88

vgoitenberg@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются динамические системы на плоскости, задаваемые кусочно-гладкими векторными полями, зависящими от параметров. Рождение периодических траекторий из особой точки на линии разрыва поля при изменении параметров при разных условиях рассматривалось во многих работах. В частности, изучались бифуркации сшитого фокуса, аналогичные бифуркации Андронова — Хопфа негрубого фокуса гладкого векторного поля. Поскольку динамические системы, используемые в приложениях, часто обладают разного рода симметрией, несомненный интерес представляет изучение бифуркаций в таких системах. Мы рассматриваем кусочно-гладкое векторное поле, «сшитое» из гладких векторных полей, определенных в верхней и нижней полуплоскостях, не меняющееся при преобразовании симметрии относительно начала координат O и имеющее в начале координат сшитый фокус кратности один или два. Описаны бифуркации фазовых портретов в окрестности точки O , соответственно при типичных однопараметрических и двухпараметрических возмущениях векторного поля. В частности, указаны области параметров, для которых в окрестности O существуют предельные циклы.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле; плоскость; особая точка; сшитый фокус; бифуркационная диаграмма; периодическая траектория.

Для цитирования

Ройтенберг В. Ш. Бифуркации сшитого фокуса кусочно-гладкой динамической системы с центральной симметрией // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 3. С. 3–13.

Введение

Изучению локальных бифуркаций кусочно-гладких динамических систем на плоскости посвящено значительное число научных работ. Наибольший интерес представляют бифуркации рождения периодических траекторий из особых точек. Различные варианты бифуркаций сшитого фокуса в семействах кусочно-гладких динамических систем, зависящих от одного или двух параметров, рассматривались в [1–6]. В приложениях

часто используют дифференциальные уравнения, инвариантные относительно центральной симметрии. Поэтому естественной является задача описания бифуркаций шитого фокуса в типичных семействах кусочно-гладких систем с такой симметрией. В настоящей работе она будет решена для одно- и двухпараметрических семейств. Условия, выделяющие такие семейства, даются в явном виде через коэффициенты тейлоровских разложений компонент векторных полей семейств.

1 Условия и результаты

Пусть X^+ – C^r -векторное поле ($r \geq 5$), заданное в верхней полуплоскости $\mathbf{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$. Преобразование центральной симметрии $S : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ переводит векторное поле X^+ в векторное поле X^- , заданное в нижней полуплоскости $\mathbf{R}_-^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 0\} : \forall (x, y) \in \mathbf{R}_-^2$ $X^-(x, y) = -X^+(-x, -y)$. Векторные поля X^+ и X^- определяют кусочно-гладкое векторное поле $X = (X^+, X^-)$ на \mathbf{R}^2 [1; 3; 6]. Обозначим X_S^r множество таких векторных полей.

Будем рассматривать семейство векторных полей $X_\mu = (X_\mu^+, X_\mu^-) \in X_S^r$, зависящих от параметра $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, меняющегося в некоторой окрестности нуля в пространстве \mathbf{R}^n ($n \geq 1$). Пусть $X_\mu^+(x, y) = (P(x, y, \mu), Q(x, y, \mu))$, где P и Q – C^r -функции,

$$P(x, y, \mu) = \sum_{0 \leq m+n \leq 4} \tilde{p}_{mn}(\mu) x^m y^n + o((x^2 + y^2)^2),$$

$$Q(x, y, \mu) = \sum_{0 \leq m+n \leq 4} \tilde{q}_{mn}(\mu) x^m y^n + o((x^2 + y^2)^2).$$

Обозначим $p_{mn} := \tilde{p}_{mn}(0)$, $q_{mn} := \tilde{q}_{mn}(0)$, $p_{mn,k} := \partial \tilde{p}_{mn}(0) / \partial \mu_k$, $q_{mn,k} := \partial \tilde{q}_{mn}(0) / \partial \mu_k$ ($k = 1, \dots, n$). Будем предполагать, что

$$p_{00} < 0, \quad q_{00} = 0, \quad q_{10} > 0. \quad (1)$$

Тогда уравнение $Q(x, 0, \mu) = 0$ имеет решение $x = \xi(\mu)$, определенное в некоторой окрестности нуля в пространстве параметров, при этом

$$\xi(0) = 0, \quad \xi'_{\mu_k}(\mu) = -q_{00,k} / q_{10} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$\text{sgn } Q(x, 0, \mu) = \text{sgn}(x - \xi(\mu)); \quad (3)$$

функция $R(x, y, \mu) := Q(x, y, \mu) / P(x, y, \mu)$ определена в некоторой окрестности нуля в пространстве переменных (x, y, μ) . Нетрудно убедиться, что

$$R(x, y, 0) = \sum_{1 \leq m+n \leq 4} r_{mn} x^m y^n + o((x^2 + y^2)^2),$$

где

$$r_{10} = \frac{q_{10}}{p_{00}}, \quad r_{01} = \frac{q_{01}}{p_{00}}, \quad r_{20} = \frac{p_{00}q_{20} - p_{10}q_{10}}{(p_{00})^2}, \quad r_{02} = \frac{p_{00}q_{02} - p_{10}q_{01}}{(p_{00})^2},$$

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \frac{p_{00}q_{11} - p_{10}q_{01} - p_{01}q_{10}}{(p_{00})^2}, \\
 r_{30} &= \frac{(p_{00})^2 q_{30} - p_{10}(p_{00}q_{20} - p_{10}q_{10}) - p_{00}p_{20}q_{10}}{(p_{00})^3}, \\
 r_{21} &= \frac{(p_{00})^2 q_{21} - p_{10}(p_{00}q_{11} - p_{10}q_{01} - p_{01}q_{10}) - p_{00}p_{20}q_{01}}{(p_{00})^3}, \\
 r_{40} &= \frac{q_{40}}{p_{00}} - p_{10} \frac{(p_{00})^2 q_{30} - p_{10}(p_{00}q_{20} - p_{10}q_{10}) - p_{00}p_{20}q_{10}}{(p_{00})^4} - \\
 &\quad - \frac{p_{20}(p_{00}q_{20} - p_{10}q_{10})}{(p_{00})^3} - \frac{p_{30}q_{10}}{(p_{00})^2}.
 \end{aligned}$$

Из [1, с. 175–177] следует, что найдется такое число $d > 0$, что при всех μ , достаточно близких к нулю, $\xi(\mu) \in (-d, d)$, равенство (3) выполняется для всех $x \in [-d, d]$, а положительная полутраектория поля X_μ^+ , начинающаяся в точке с координатами $(x, 0)$, $x \in [\xi(\mu), d]$, кончается в точке с координатами $(\sigma_+(x, \mu), 0)$,

$$\begin{aligned}
 \sigma_+(x, \mu) &= 2\xi(\mu) - x + A(\mu)(x - \xi(\mu))^2 - A^2(\mu)(x - \xi(\mu))^3 + \\
 &\quad + K(\mu)(x - \xi(\mu))^4 + s(x - \xi(\mu), \mu),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$s(\cdot, \cdot) - C^r\text{-функция в окрестности точки } (0, 0), \quad s(u, \mu) = o(u^4), \tag{5}$$

$$A(\mu) = \frac{2}{3} \left(\frac{P'_x + Q'_y}{P} - \frac{Q''_{xx}}{Q'_x} \right) (\xi(\mu), 0, \mu), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 K(0) &= \frac{10}{11} (A^3(0) + \frac{r_{11}A(0)}{5} + \\
 &\quad + \frac{2}{15} \left(\frac{r_{01}(r_{20})^2}{(r_{10})^2} - \frac{2(r_{20})^3}{(r_{10})^3} - 2r_{10}r_{02} - \frac{2r_{01}r_{30}}{r_{10}} + \frac{5r_{20}r_{30}}{(r_{10})^2} + r_{21} - \frac{3r_{40}}{r_{10}} \right).
 \end{aligned}$$

Из (6) и (2) получаем

$$A(0) = \frac{2}{3} \left(\frac{p_{10} + q_{01}}{p_{00}} - \frac{q_{20}}{q_{10}} \right),$$

$$\begin{aligned}
 A'_{\mu_k}(0) &= \frac{2}{3} \frac{((p_{10,k} + q_{01,k})q_{10} - (2p_{20} + q_{11})q_{00,k})p_{00} - (p_{10} + q_{01})(p_{00,k}q_{10} - p_{10}q_{00,k})}{q_{10}(p_{00})^2} - \\
 &\quad - \frac{2}{3} \frac{(q_{20,k}q_{10} - 3q_{30}q_{00,k})q_{10} - q_{20}(q_{10,k}q_{10} - 2q_{20}q_{00,k})}{(q_{10})^3}, \quad k = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $n=1$, выполняются условия (1), $A(0) > 0$, $\xi'(0) > 0$. Тогда существует окрестность U точки O и число $\delta > 0$ такие, что для векторных полей X_μ , $|\mu| < \delta$, в U справедливы утверждения:

При $\mu=0$ поле X_μ имеет единственную особую точку O , все остальные траектории ω -предельны к O и выходят из U при убывании времени (рис. 1б).

При $-\delta < \mu < 0$ поле X_μ имеет три грубые особые точки $O_\mu^\pm = (\pm\xi(\mu), 0)$ и O , а также грубую устойчивую периодическую траекторию $\Gamma(\mu)$. Остальные траектории ω -предельны к $\Gamma(\mu)$, за исключением двух, кончающихся при возрастании времени в точках O_μ^\pm . Траектории в области G , ограниченной $\Gamma(\mu)$, за исключением двух, кончающихся при убывании времени в точках O_μ^\pm , α -предельны к O ; траектории, начинающиеся в $U \setminus \bar{G}$, выходят из U при убывании времени (рис. 1а).

При $0 < \mu < \delta$ поле X_μ имеет особые точки $O_\mu^\pm = (\pm\xi(\mu), 0)$ и O . Остальные траектории ω -предельны к O , кроме двух, кончающихся при возрастании времени в точках O_μ^\pm , и выходят при убывании времени из U , за исключением двух, кончающихся в точках O_μ^\pm (рис. 1в).

Замечание 1. К случаю, рассмотренному в теореме 1, сводятся случаи $A_0 < 0$ – переходом к семейству $-X_\mu$ (на рис. 1 надо обратить стрелки на траекториях), случай $\xi'(0) < 0$ – заменой параметра $\mu \mapsto -\mu$.

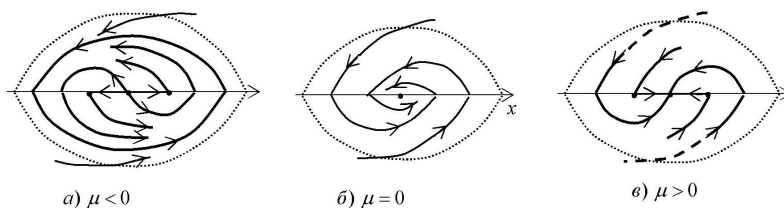


Рис. 1. К теореме 1. Перестройки фазовых портретов

Теорема 2. Пусть $n=2$, выполняются условия (1), $A(0) = 0$, $K(0) > 0$, $\xi'_{\mu_1}(0)A'_{\mu_2}(0) - \xi'_{\mu_2}(0)A'_{\mu_1}(0) \neq 0$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T \rightarrow \mu = (\mu_1, \mu_2)$ – отображение, обратное отображению $\mu \mapsto (\varepsilon_1 = -A(\mu), \varepsilon_2 = \xi(\mu))$ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$. Тогда существуют окрестность U точки O , число $\delta > 0$ и разбиение области $(-\delta, \delta)^2$ изменения параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, $B_1 = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b(\varepsilon_1)\}$, где $b : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta)$, $b \in C^1$, $b(+0) = b'(+0) = 0$,

$B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, и множества E_k , $k=1,2,3$, являющиеся связными компонентами $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^3 B_k$, граница которых содержит B_k и B_{k+1} (здесь $B_4 := B_1$) (рис. 2), такие, что для векторных полей $X_{T(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ справедливы следующие утверждения:

При $\varepsilon \in B_0$ и $\varepsilon \in B_3$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U устойчивый сшитый фокус O . Все остальные траектории ω -предельны к O и выходят из U при убывании времени (рис 2).

При $\varepsilon \in B_1$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U неустойчивый сшитый фокус O и устойчивую грубую периодическую траекторию. Остальные траектории ω -предельны к периодической траектории и либо α -предельны к O , либо выходят из U при убывании времени (рис 2).

При $\varepsilon \in E_1$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U три грубые особые точки $O_\varepsilon^\pm = (\pm\varepsilon_2, 0)$ и устойчивый узел O , и две грубые периодические траектории, устойчивую и неустойчивую. Поведение остальных траекторий изображено на рис 2.

При $\varepsilon \in B_2$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U три грубые особые точки – $O_\varepsilon^\pm = (\pm\varepsilon_2, 0)$, устойчивый узел O и единственную периодическую траекторию – двойной цикл. Поведение остальных траекторий изображено на рис. 2.

При $\varepsilon \in E_2$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U три грубые особые точки – $O_\varepsilon^\pm = (\pm\varepsilon_2, 0)$ и устойчивый узел O . Поведение остальных траекторий изображено на рис. 2.

При $\varepsilon \in B_3$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U устойчивый сшитый фокус O . Все остальные траектории ω -предельны к O и выходят из U при убывании времени (рис. 2).

При $\varepsilon \in E_3$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет в U три грубые особые точки – $O_\varepsilon^\pm = (\pm\varepsilon_2, 0)$, неустойчивый узел O и грубую устойчивую периодическую траекторию. Поведение остальных траекторий изображено на рис 2.

Замечание 2. Случай $K(0) < 0$ сводится к рассмотренному случаю переходом к семейству $-X_\mu$ (на рис. 2 следует изменить направление на траекториях на противоположное).

Замечание 3. Из теорем 1, 2 и работ [1; 4; 5] видно, что бифуркационные диаграммы типичных одно- и двухпараметрических деформаций векторного поля с сшитым фокусом в пространстве плоских C^r -векторных полей с центральной симметрией такие же, что и в пространстве всех плоских C^r -векторных полей.

Доказательство теоремы 2 приведено в п. 2. Более простое доказательство теоремы 1 мы опустим.

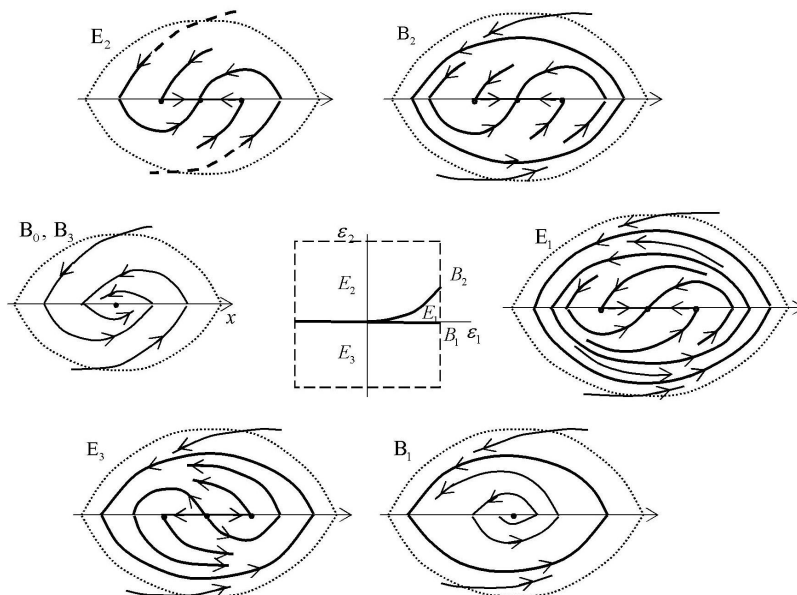


Рис. 2. К теореме 2. Бифуркационная диаграмма

2 Доказательство теоремы 2

Пусть $\sigma(x, \varepsilon) := \sigma_+(x, T(\varepsilon))$. Из (4) и определения $T(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma(x, \varepsilon) = & 2\varepsilon_2 - x - \varepsilon_1(x - \varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1^2(x - \varepsilon_2)^3 + \\ & + K(T(\varepsilon))(x - \varepsilon_2)^4 + s(x - \varepsilon_2, T(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (7)$$

где s удовлетворяет условиям (5).

Выберем такое $\delta_1 \in (0, d)$, что $\sigma(x, \varepsilon)$ определена при $\varepsilon \in [-\delta_1, \delta_1]^2$, $x \in [-d, d]$. Тогда траектория поля $X_{T(\varepsilon)}^-$, начинающаяся в точке $x \in [-d, -\varepsilon_2)$, кончается в точке $(-\sigma(-x, \varepsilon), 0)$. Поэтому функция $f_\varepsilon(x) := -\sigma(-\sigma(x, \varepsilon), \varepsilon)$ является функцией последования по траекториям поля $X_{T(\varepsilon)}$. Она определена при тех значениях $x \in (\varepsilon_2, d]$, для которых $\sigma(x, \varepsilon) \in [-d, -\varepsilon_2)$. Введем также функцию $\Delta(x, \varepsilon) := \sigma(x, \varepsilon) + x$. Ее роль объясняется в следующей очевидной лемме.

Лемма. 1) В точках x из области определения функции f_ε

$$\operatorname{sgn}(f_\varepsilon(x) - x) = -\operatorname{sgn} \Delta(x, \varepsilon);$$

2) $f_\varepsilon(x_*) = x_*$, $(f_\varepsilon)'(x_*) < 1$ (соотв. $(f_\varepsilon)'(x_*) > 1$) тогда и только тогда, когда $\Delta(x_*, \varepsilon) = 0$, $\Delta'_x(x_*, \varepsilon) > 0$ (соотв. $\Delta'_x(x_*, \varepsilon) < 0$);

3) $f_\varepsilon(x_*) = x_*$, $(f_\varepsilon)'(x_*) = 1$, $(f_\varepsilon)''(x_*) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(x_*, \varepsilon) = \Delta'_x(x_*, \varepsilon) = 0$, $\Delta''_{xx}(x_*, \varepsilon) \neq 0$.

Из (7) и (5) получаем

$$\Delta'_x(x, \varepsilon) = -\varepsilon_1(x - \varepsilon_2)[2 + 3\varepsilon_1^2(x - \varepsilon_2)] + 4K(T(\varepsilon))(x - \varepsilon_2)^3 + l(x, \varepsilon)(x - \varepsilon_2)^4. \quad (8)$$

где l – ограниченная функция. Из (7), (8) и условия $K(0) > 0$ следует, что найдется сколь угодно малое число $\bar{x} > 0$ такое, что $\Delta(\bar{x}, 0) > 0$, $\Delta'_x(\bar{x}, 0) > 0$. При достаточно малом $\delta = \delta(\bar{x}) \in (0, \delta_1)$, $\delta < \bar{x}$, будем иметь

$$\Delta(\bar{x}, \varepsilon) > 0, \quad \Delta'_x(\bar{x}, \varepsilon) > 0 \quad \text{при всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2, \quad (9)$$

Кроме того, из (7), (5) и условия $K(0) > 0$ получаем, что \bar{x} и соответственно δ можно выбрать столь малыми, что

$$\Delta'_{\varepsilon_2}(x, \varepsilon) \geq 1/2 \quad \text{при всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2, \quad x \in (\varepsilon_2, \bar{x}]. \quad (10)$$

Поскольку $f_0(x) = x - 2K(0)x^4 + o(x^4)$, то \bar{x} и δ можно считать такими, что

$$f_0(x) < x \quad \text{при всех } x \in (0, \bar{x}]. \quad (11)$$

Ввиду (11) мы можем аналогично [8, п. 3.14] построить простую замкнутую кривую γ , состоящую из гладких дуг $\gamma_+ \subset \mathbf{R}_+^2$ и $\gamma_- \subset \mathbf{R}_-^2$ с общими концами в точках $(f_0(\bar{x}), 0)$ и $(\frac{1}{2}(\sigma(\bar{x}, 0) + \sigma(f_0(\bar{x}), 0)), 0)$, таких, что векторные поля, соответственно X_0^+ и X_0^- им трансверсальны и направлены в их точках внутрь области U , ограниченной γ . Вследствие (11) все траектории поля X_0 , начинающиеся в U , ω -предельны к точке O и выходят из U при убывании времени. Считая δ выбранным достаточно малым, получим, что при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ траектории векторных полей $X_{T(\varepsilon)}$ в точках γ входят в U , а векторные поля X^\pm не имеют в U особых точек.

Найдем особые точки векторных полей X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$. Поскольку (3) справедливо при всех $x \in [-d, d]$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, точки $O_\varepsilon^\pm := (\pm\varepsilon_2, 0)$ являются особыми; при $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2 < 0$) отрезок $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$ оси x между ними – устойчивая (неустойчивая) линейная особенность в терминологии книги [1]. Если точка $(x, 0) \in [O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$, то, считая δ достаточно малым, получаем, что

$$-1/2 < Q(x, 0, \varepsilon) + Q(-x, 0, \varepsilon) < 0 \quad \text{при } \varepsilon_2 > 0, \quad (12)$$

$$0 < Q(x, 0, \varepsilon) + Q(-x, 0, \varepsilon) < 1/2 \quad \text{при } \varepsilon_2 < 0, \quad (13)$$

в выпуклой оболочке векторов $X_{T(\varepsilon)}^-(x, 0)$ и $X_{T(\varepsilon)}^+(x, 0)$ существует единственный вектор $X_\varepsilon^0(x, 0) = (P_0(x, \varepsilon), 0)$,

$$P_0(x, \varepsilon) = \frac{P(x, 0, \varepsilon)Q(-x, 0, \varepsilon) - P(-x, 0, \varepsilon)Q(x, 0, \varepsilon)}{Q(x, 0, \varepsilon) + Q(-x, 0, \varepsilon)},$$

касательный к $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$. Дуги траекторий поля X_ε^0 на $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$ являются и дугами траекторий поля $X_{T(\varepsilon)}$. Так как

$$(P_0)'_x(0, \varepsilon) = [-P(0, 0, \varepsilon)Q'_x(0, 0, \varepsilon) + P'_x(0, 0, \varepsilon)Q(0, 0, \varepsilon)]/2Q(0, 0, \varepsilon),$$

то с учетом (1), (12) и (13) можно считать, что $(P_0)'_x(0, \varepsilon) < P(0)Q'_x(0) < 0$ при $\varepsilon_2 > 0$ и $(P_0)'_x(0, \varepsilon) > -P(0)Q'_x(0) > 0$ при $\varepsilon_2 < 0$. Поскольку $P_0(0, \varepsilon) = 0$, то δ можно предполагать столь малым, что O – единственная особая точка поля X_ε^0 , устойчивая (неустойчивая) при $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2 < 0$). Для поля $X_{T(\varepsilon)}$ точка O – грубая особая точка – устойчивый (неустойчивый) узел.

При $\varepsilon_2 = 0$ $\Delta(x, \varepsilon) = -\varepsilon_1 x^2 + o(x^2)$. Если $x > 0$ достаточно мало, то $\text{sgn} \Delta(x, \varepsilon) = -\text{sgn} \varepsilon_1$. Вследствие пункта 1) леммы при $\varepsilon_1 < 0$ ($\varepsilon_1 > 0$) $f_\varepsilon(x) < x$ ($f_\varepsilon(x) > x$), и потому O – устойчивый (неустойчивый) сшитый фокус.

Из выбора окрестности U и поведения траекторий поля X_ε^0 следует, что любая траектория поля $X_{T(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, отличная от особой точки, пересекает отрезок $J_\varepsilon := [|\varepsilon_2|, \bar{x}] \times \{0\}$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$. Тогда $\Delta'_x(\varepsilon_2, \varepsilon) = 0$, $\Delta''_{xx}(\varepsilon_2, \varepsilon) = -2\varepsilon_1 < 0$. Отсюда и из (9) следует, что $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ имеет точку минимума $m(\varepsilon) \in (\varepsilon_2, \bar{x})$. Покажем, что \bar{x} и δ можно считать выбранными так, $m(\varepsilon)$ – единственная критическая точка на (ε_2, \bar{x}) и она невырожденная.

Пусть u – критическая точка функции $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ на (ε_2, \bar{x}) , то есть $\Delta'_x(u, \varepsilon) = 0$. Считая \bar{x} и δ достаточно малыми, отсюда и из (8) имеем

$$\varepsilon_1/(3K(0)) \leq (u - \varepsilon_2)^2 \leq 2\varepsilon_1/(3K(0)). \quad (14)$$

Из равенства

$$\Delta''_{xx}(u, \varepsilon) = -2\varepsilon_1 - 6\varepsilon_1^2(u - \varepsilon_2) + 12K(T(\varepsilon))(u - \varepsilon_2)^2 + s''_{xx}(u - \varepsilon_2, T(\varepsilon))$$

при достаточно малых \bar{x} и δ получим оценку

$$\Delta''_{xx}(u, \varepsilon) \geq -2\varepsilon_1 - 6\varepsilon_1^2(u - \varepsilon_2) + 11K(0)(u - \varepsilon_2)^2. \quad (15)$$

Из (14) и (15) имеем, считая $6\delta^2\bar{x} < 5/3$,

$$\Delta''_{xx}(u, \varepsilon) \geq -2\varepsilon_1 - 6\delta^2\bar{x}\varepsilon_1 + 11\varepsilon_1/3 = \varepsilon_1(5/3 - 6\delta^2\bar{x}) > 0.$$

Таким образом, любая критическая точка функции $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ на (ε_2, \bar{x}) является невырожденным минимумом. Следовательно, $m(\varepsilon)$ – единственная критическая точка, $m(\cdot) \in C^1$ и

$$\text{sgn} \Delta'_x(x, \varepsilon) = \text{sgn}(x - m(\varepsilon)) \text{ для } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta), x \in (\varepsilon_2, \bar{x}). \quad (16)$$

Пусть $h(\varepsilon) := \Delta(m(\varepsilon), \varepsilon)$. Из равенства $\Delta(\varepsilon_2, \varepsilon) = \varepsilon_2$, (16) и (9) следует, что

$$h(\varepsilon_1, 0) < 0 \quad \text{при всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta). \quad (17)$$

При $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $x \in (\varepsilon_2, \bar{x})$

$$\Delta(x, \varepsilon) = \varepsilon_2(2 - (x - \varepsilon_2)^2 - \varepsilon_2(x - \varepsilon_2)^3) + K(T(\varepsilon))(x - \varepsilon_2)^4 + s(x - \varepsilon_2, T(\varepsilon)).$$

Следовательно, \bar{x} и δ можно считать выбранными так, что $\Delta(x, \varepsilon) > 0$ при всех $x \in (\varepsilon_2, \bar{x})$. Поэтому и

$$h(\varepsilon) > 0 \quad \text{при всех } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \in (0, \delta). \quad (18)$$

Из (10) и (16) получаем, что $h'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$.

Отсюда из (17) и (18) следует, что существует такая C^1 -функция $b: (0, \delta) \rightarrow (0, \delta)$, что $b(+0) = 0$,

$$\text{sgn } \Delta(m(\varepsilon), \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - b(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta). \quad (19)$$

Так как $b'(\varepsilon_1) = -h'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) / h'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=b(\varepsilon_1)}$, то с учетом (16) имеем

$$b'(\varepsilon_1) = - \frac{\Delta'_{\varepsilon_1}(x, \varepsilon)}{\Delta'_{\varepsilon_2}(x, \varepsilon)} \Big|_{x=m(\varepsilon), \varepsilon_2=b(\varepsilon_1)}. \quad (20)$$

Из (7) получаем $\Delta'_{\varepsilon_1}(x, \varepsilon) = -(x - \varepsilon_2)^2 - 2\varepsilon_1(x - \varepsilon_2)^3 + p(x, \varepsilon)(x - \varepsilon_2)^4$, где $p(x, \varepsilon)$ – ограниченная функция. Отсюда и из оценки (14) при $u = m(\varepsilon)$ следует, что числитель в (20) стремится к нулю при $\varepsilon_1 \rightarrow +0$. Учитывая (10), из (20) получаем $b'(+0) = 0$.

Из равенства $\Delta(\varepsilon_2, \varepsilon) = \varepsilon_2$, (9), (16) и (19) и леммы получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in E_1 = (0, \delta) \times \{0\}$ и $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0)$ функция $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ имеет на (ε_2, \bar{x}) единственный нуль $x_1(\varepsilon) \in (m(\varepsilon), \bar{x})$, $\Delta'_x(x_1(\varepsilon), \varepsilon) > 0$. Дугу J_ε пересекают единственная периодическая траектория поля $X_{T(\varepsilon)}$ – устойчивый грубый предельный цикл, проходящий через точку $(x_1(\varepsilon), 0)$.

При $\varepsilon \in E_1$, где $E_1 := \{\varepsilon : 0 < \varepsilon_2 < b(\varepsilon_1), 0 < \varepsilon_1 < \delta\}$, функция $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ имеет на (ε_2, \bar{x}) два нуля $x_2(\varepsilon) < x_1(\varepsilon)$, в которых $\Delta'_x(x_2(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, $\Delta'_x(x_1(\varepsilon), \varepsilon) > 0$. Дугу J_ε пересекают ровно две периодические траектории поля $X_{T(\varepsilon)}$ – неустойчивый и устойчивый грубые предельные циклы, проходящие соответственно через точки $(x_2(\varepsilon), 0)$ и $(x_1(\varepsilon), 0)$.

При $\varepsilon \in B_2$, где $B_2 := \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b(\varepsilon_1), 0 < \varepsilon_1 < \delta\}$, функция $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ имеет на (ε_2, \bar{x}) единственный нуль $m(\varepsilon)$, в котором $\Delta'_x(m(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $\Delta''_{xx}(m(\varepsilon), \varepsilon) > 0$. Дугу J_ε пересекает единственная периодическая траектория поля $X_{T(\varepsilon)}$ – двойной цикл.

При $b(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ не имеет периодических траекторий.

Пусть теперь $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta)$. Из (8) следует, что δ можно считать столь малым, что $\Delta'_x(x, \varepsilon) > 0$ для всех $x \in (\varepsilon_2, \bar{x})$. Отсюда, из равенства $\Delta(\varepsilon_2, \varepsilon) = \varepsilon_2$, (9) и леммы получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, 0)$ функция $\Delta(\cdot, \varepsilon)$ имеет на (ε_2, \bar{x}) единственный нуль, а дугу J_ε пересекает единственная периодическая траектория – устойчивый грубый предельный цикл.

При $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (0, \delta)$ и $\varepsilon \in B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}$ $\Delta(x, \varepsilon) > 0$ для всех $x \in (\varepsilon_2, \bar{x})$, а поле $X_{T(\varepsilon)}$ не имеет периодических траекторий.

Таким образом, при всех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ поле $X_{T(\varepsilon)}$ имеет особые точки и периодические траектории, описанные в формулировке теоремы. Поведение остальных траекторий ими определяется однозначно.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Заключение

В работе описаны бифуркации рождения периодических траекторий из сшитого фокуса центрально симметричного кусочно-гладкого векторного поля при одно- и двухпараметрических возмущениях общего положения в пространстве векторных полей с такой симметрией. Условия общего положения выписаны в явном виде через коэффициенты разложений компонент векторных полей по степеням фазовых переменных и параметров. Результаты могут быть полезны для нахождения автоколебаний в релейных системах автоматического управления.

Литература

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с. Текст: непосредственный.
2. Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems. Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13. No. 8. Pp. 2157–2188. Текст: непосредственный.
3. Piecewise Smooth Dynamical Systems / di Bernardo M., Budd Ch. J., Caprney A.R., Kowalczyk P. Appl. Math. Sci. V. 163. London: Springer-Verlag. 2008. 483 p. Текст: непосредственный.
4. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems. J. Differential Equations. 2011. Vol. 250. No. 4. Pp. 1967–2023. Текст: непосредственный.
5. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях сшитого фокуса // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-28: сборник трудов XXVIII международной научной конференции. Саратов, 2015. Т. 1. С. 27–31. Текст: непосредственный.
6. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. Текст: непосредственный.
7. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 15.09.2021; одобрена после рецензирования 15.10.2021; принята к публикации 29.10.2021.

BIFURCATIONS OF A SEWN FOCUS OF A PIECEWISE SMOOTH
DYNAMICAL SYSTEM WITH CENTRAL SYMMETRY

Vladimir Sh. Roitenberg

Cand. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor
Yaroslavl State Technical University
88 Moskovskij Prospekt, Yaroslavl, 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. In this paper, we study planar dynamical systems, given by piecewise smooth vector fields depending on parameters. The generation of periodic trajectories from a singular point on the field discontinuity line when changing parameters under different conditions has been considered in many works. In particular, the bifurcations of the sewn (fused) focus, analogous to the Andronov-Hopf bifurcation of the composed focus of a smooth vector field, were studied. Since dynamical systems used in applications often possess various kinds of symmetry, the study of bifurcations in such systems is of undoubted interest. We consider a piecewise smooth vector field "sewn" from smooth vector fields defined in the upper and lower half-planes, which does not change under the symmetry transformation for the origin of coordinates O and has a sewn focus of multiplicity one or two at the origin of coordinates. We describe bifurcations of phase portraits in a neighborhood of the point O , respectively, under generic one-parameter and two-parameter perturbations of the vector field. In particular, the domains of parameters for which limit cycles exist in a neighborhood of O are indicated.

Keywords: piecewise smooth vector field; plane; singular point; sewn focus; bifurcation diagram; periodic trajectory.

For citation

Roitenberg V. Sh. Bifurcations of a Sewn Focus of a Piecewise Smooth Dynamical System With Central Symmetry // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2021. N. 3. Pp. 3–13.

The article was submitted 15.09.2021; approved after reviewing 15.10.2021; accepted for publication 29.10.2021.