

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2022-2-42-49

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНОМ ВАРИАНТЕ

© Срочко Владимир Андреевич

доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
srochko@math.isu.ru

© Антоник Владимир Георгиевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
vga@math.isu.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации нелинейной динамической системы на множестве дискретных управлений кусочно-постоянной структуры на неравномерной сетке точек переключения. Линейно-квадратичная аппроксимация функционала реализуется в рамках классических вариаций на основе функции Понтрягина и матричной функции Габасова. Проведена приемлемая формализация процедуры преобразований и получены явные выражения для вариаций через управляющие параметры. В результате открывается возможность применения градиентных процедур и условного метода Ньютона для численного решения исходной задачи. На основе второй вариации функционала получено нестандартное условие оптимальности, сочетающее в себе элементы классических результатов для особых управлений.

Ключевые слова: основная задача оптимального управления, параметризация управления, вариации функционала.

Для цитирования

Срочко В. А., Антоник В. Г. Линейно-квадратичная аппроксимация основной задачи оптимального управления в дискретном варианте // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 2. С. 42–49.

Введение

Данная статья примыкает по тематике к исследованиям из [1; 7; 8], где задачи оптимизации линейных динамических систем преобразуются в конечномерный формат на основе процедуры параметризации управления. В настоящее время такой подход к численному решению вариационных задач представляется вполне конкурентным и перспективным.

Рассматривается нелинейная задача оптимизации на множестве дискретных управлений кусочно-постоянной структуры на неравномерной

сетке точек переключения. Проводится формализация допустимых управлений с использованием характеристических функций участков сетки. Линейно-квадратичная аппроксимация функционала реализуется с помощью классических вариаций на основе функции Понтрягина и матричной функции Габасова. В результате получены явные выражения для вариаций через управляющие параметры. Это открывает возможность безпроблемного применения градиентных процедур и условного метода Ньютона для численного решения исходной задачи. На основе второй вариации функционала получено нестандартное условие оптимальности, сочетающее в себе элементы классических результатов Лежандра — Клебша и Габасова — Джекобсона.

1 Постановка задачи

Пусть независимая переменная $t \in [t_0, T]$ (время) и вектор-функции $u(t) \in R^r$ (управление), $x(t) \in R^n$ (состояние) связаны динамической системой

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Ограничение на управлении оформим с помощью поточечного включения

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T].$$

Целевой функционал определим в следующем формате

$$\Phi(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^T F(x(t), u(t), t) dt.$$

Внесем необходимые предположения:

– вектор-функция $f(x, u, t)$ и функция $F(x, u, t)$ непрерывны на $R^n \times R^r \times R$ вместе с производными по совокупности (x, u) до второго порядка включительно;

– множество $U \subset R^r$ является выпуклым и замкнутым;

– функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^n .

Определим множество допустимых управлений. Введем на $[t_0, T]$ сетку узлов $\{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = T\}$ с условием монотонности $t_{j-1} < t_j$, $j = \overline{1, m}$. Выделим промежутки $T_j = (t_{j-1}, t_j]$ с характеристическими функциями $\chi_j(t), t \in [t_0, T]$. Введем семейство параметров $y_{ij}, i = \overline{1, r}, j = \overline{1, m}$ и сгруппируем их векторами $y^j = (y_{1j}, \dots, y_{rj})$. Сформируем блочный вектор $y = (y^1, \dots, y^m)$ размерности (mr) (прямая сумма векторов y^1, \dots, y^m) и обозначим множество

$$Y = \{y = (y^1, \dots, y^m) : y^j \in U, j = \overline{1, m}\}.$$

Для каждого $y \in Y$ сформируем управление

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^m \chi_j(t) y^j, t \in [t_0, T].$$

Это кусочно-постоянная вектор-функция на заданной сетке ($u(t, y) = y^j, t \in T_j$) с ограничением $u(t, y) \in U, t \in (t_0, T]$ (допустимое управление).

Рассмотрим задачу

$$\Phi(u) \rightarrow \min, u \in \{u(t, y), y \in Y\}. \quad (1)$$

2 Вариации функционала

Для оформления процедур варьирования определим необходимые конструкции:

– функция Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t);$$

– первая сопряженная система для вектор-функции $\psi(\cdot)$

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \psi(T) = -\varphi_x(x(T));$$

– вторая сопряженная система для матричной функции $\Psi(\cdot)$

$$\dot{\Psi} = -H_{x\psi}(\dots)\Psi - \Psi H_{\psi x}(\dots) - H_{xx}(\dots), \Psi(T) = -\varphi_{xx}(x(T))$$

с обозначением $(\dots) = (\psi, x, u, t)$.

Рассмотрим допустимое управление $u(t, y), y \in Y$ вместе с соответствующими решениями дифференциальных систем: $x(t, y), \psi(t, y), \Psi(t, y), t \in [t_0, T]$. Проведем варьирование вектора параметров: $y + \Delta y \in Y$. Приращение управления и состояния имеют вид

$$\Delta u(t, y) = u(t, y + \Delta y) - u(t, y) = \sum_{j=1}^m \chi_j(t) \Delta y^j, \quad (2)$$

$$\Delta x(t, y) = x(t, y + \Delta y) - x(t, y).$$

Введем фазовую вариацию $\delta x(t, y)$ в рамках представления

$$\Delta x(t, y) = \delta x(t, y) + o(\|\Delta y\|),$$

которое приводит к линейной системе

$$\dot{\delta x}(t, y) = f_x[t, y] \delta x(t, y) + f_u[t, y] \Delta u(t, y), \delta x(t_0, y) = 0.$$

Здесь использовано обозначение $s[t, y] = s(x(t, y), u(t, y), t)$.

Используя известные формулы приращения функционала [3; 6], получаем следующее представление

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(u(t, y)) &= \Phi(u(t, y) + \Delta u(t, y)) - \Phi(u(t, y)) = \\ &= \Delta_1 \Phi(u(t, y)) + \Delta_2 \Phi(u(t, y)) + \eta, \end{aligned}$$

в котором фигурируют первая и вторая вариации функционала

$$\begin{aligned}\Delta_1\Phi(u(t, y)) &= -\int_{t_0}^T \langle H_u[t, y], \Delta u(t, y) \rangle dt, \\ \Delta_2\Phi(u(t, y)) &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \langle \Delta u(t, y), H_{uu}[t, y] \Delta u(t, y) \rangle dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^T \langle Q(t, y) \delta x(t, y), \Delta u(t, y) \rangle dt, \\ Q(t, y) &= H_{ux}[t, y] + H_{u\psi}[t, y] \Psi(t, y).\end{aligned}$$

При этом остаточный член η характеризуется оценкой

$$|\eta| \leq C \int_{t_0}^T o(\|\Delta u(t, y)\|^2) dt.$$

Отметим, что $\eta = 0$ (аппроксимация $\Delta_1\Phi + \Delta_2\Phi$ является точной) для линейно-квадратичной задачи следующей структуры

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ \Phi(u) &= \frac{1}{2} \langle x(T), Cx(T) \rangle + \int_{t_0}^T \left[\frac{1}{2} \langle x(t), D(t)x(t) \rangle + \langle u(t), A_0(t)x(t) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle u(t), P(t)u(t) \rangle \right] dt.\end{aligned}$$

3 Параметризация вариаций функционала

С учетом формулы (2) для $\Delta u(t, y)$ первая вариация выражается следующим образом

$$\begin{aligned}\Delta_1\Phi(u(t, y)) &= -\sum_{j=1}^m \int_{T_j} \langle H_u[t, y], \Delta y^j \rangle dt = \\ &= -\sum_{j=1}^m \left\langle \int_{T_j} H_u[t, y] dt, \Delta y^j \right\rangle.\end{aligned}$$

Аналогично обрабатывается квадратичный член в формуле для второй вариации

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^T \langle \Delta u(t, y), H_{uu}[t, y] \Delta u(t, y) \rangle dt &= \sum_{j=1}^m \int_{T_j} \langle \Delta y^j, H_{uu}[t, y] \Delta y^j \rangle dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \left\langle \Delta y^j, \int_{T_j} H_{uu}[t, y] dt \Delta y^j \right\rangle.\end{aligned}$$

Для преобразования билинейного слагаемого получим явное представление фазовой вариации $\delta x(t, y)$ через Δy .

Определим $(n \times r)$ матричную функцию $X_j(t, y), j = \overline{1, m}$ как решение матричной задачи Коши

$$\dot{X}_j(t, y) = f_x[t, y]X_j(t, y) + f_u[t, y]\chi_j(t), X_j(t_0, y) = 0. \quad (3)$$

Тогда справедлива формула

$$\delta x(t, y) = \sum_{j=1}^m X_j(t, y)\Delta y^j, t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

Действительно, начальное условие очевидно выполняется: $\delta x(t_0, y) = 0$. Проверим дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t, y) &= \sum_{j=1}^m f_x[t, y]X_j(t, y)\Delta y^j + \sum_{j=1}^m f_u[t, y]\chi_j(t)\Delta y^j = \\ &= f_x[t, y]\delta x(t, y) + f_u[t, y]\Delta u(t, y). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (4) доказана. Отметим, что согласно уравнению (3) $X_j(t, y) = 0, t \in (t_0, t_{j-1}], j = \overline{2, m}$. Отсюда следует, что для $t \in T_j = (t_{j-1}, t_j]$ $X_k(t, y) = 0, k > j, j = \overline{1, m}$.

Рассмотрим теперь второй интеграл в формуле для $\Delta_2\Phi(u(t, y))$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle Q(t, y)\delta x(t, y), \Delta u(t, y) \rangle dt &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_{T_j} \langle Q(t, y)X_k(t, y)\Delta y^k, \Delta y^j \rangle dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \langle \Delta y^j, \int_{T_j} Q(t, y)X_k(t, y)dt \Delta y^k \rangle \end{aligned}$$

Для $j = \overline{1, m}, k = \overline{1, j}$ введем обозначения

$$\begin{aligned} h^j(y) &= -\int_{T_j} H_u[t, y]dt, H_j(y) = -\int_{T_j} H_{uu}[t, y]dt, \\ Q_{jk}(y) &= -\int_{T_j} Q(t, y)X_k(t, y)dt. \end{aligned}$$

Отметим, что $h^j(y)$ — r -мерный вектор, $H_j(y), Q_{jk}(y)$ — $(r \times r)$ матрицы.

Представим итоговые выражения для вариаций функционала на управлении $u(t, y)$

$$\begin{aligned} \Delta_1\Phi(u(t, y)) &= \sum_{j=1}^m \langle h^j(y), \Delta y^j \rangle, \\ \Delta_2\Phi(u(t, y)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \langle \Delta y^j, H_j(y)\Delta y^j \rangle + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \langle \Delta y^j, Q_{jk}(y)\Delta y^k \rangle. \end{aligned}$$

При этом остаточный член η приращения функционала имеет порядок $o(\|\Delta y\|^2)$, где $\Delta y = (\Delta y^1, \dots, \Delta y^m)$.

В силу выпуклости множества U , описывающего ограничение на управление, допустимая процедура варьирования реализуется простейшим образом

$$\Delta y^j = \alpha(z^j - y^j), \alpha \in [0,1], z^j \in U, j = \overline{1, m}.$$

Первая вариация $\Delta_1 \Phi$ определяет градиент функционала Φ в точке $y = (y^1, \dots, y^m)$. Это блочный вектор $h(y) = (h^1(y), \dots, h^m(y))$, на основе которого конструируются стандартные градиентные методы решения задачи (1).

В совокупности обе вариации $\Delta_1 \Phi + \Delta_2 \Phi$ реализуют линейно-квадратичную аппроксимацию функционала Φ , что приводит к условному методу Ньютона [2; 5] в рамках следующей вспомогательной задачи

$$\Delta y^j = z^j - y^j, \Delta_1 \Phi + \Delta_2 \Phi \rightarrow \min, z^j \in U, j = \overline{1, m}.$$

Если \bar{z}^j — решение этой задачи, то улучшение точки y^j проводится через одномерный поиск $y_\alpha^j = y^j + \alpha(\bar{z}^j - y^j)$, $\alpha \in (0,1]$.

В заключение приведем условия оптимальности управления $u(t, y)$ в задаче (1), связанные с вариациями $\Delta_1 \Phi, \Delta_2 \Phi$. Основное неравенство для первой вариации $\Delta_1 \Phi(u(t, y)) \geq 0$ приводит к серии градиентных условий

$$\langle h^j(y), z - y^j \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle \int_{T_j} H_u[t, y] dt, z - y^j \rangle \leq 0, z \in U, j = \overline{1, m}.$$

Это дискретный аналог дифференциального принципа максимума в теории оптимального управления.

Для перехода на уровень второй вариации выделим особый случай, когда для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ выполняется условие $h^s(y) = 0$. Полагая $\Delta y^j = 0, j \neq s, \Delta y^s = z - y^s, z \in U$, получаем $\Delta_1 \Phi(u(t, y)) = 0$. Тогда имеет место условие неотрицательности второй вариации

$$\Delta_2 \Phi(u(t, y)) = \frac{1}{2} \langle \Delta y^s, H_s(y) \Delta y^s \rangle + \langle \Delta y^s, Q_{ss}(y) \Delta y^s \rangle \geq 0.$$

Раскрывая обозначения, приходим к итоговому соотношению

$$\langle z - y^s, \int_{T_s} \{ H_{uu}[t, y] + (H_{ux}[t, y] + H_{u\psi}[t, y] \Psi(t, y)) X_s(t, y) \} dt (z - y^s) \rangle \leq 0.$$

Это условие оптимальности второго порядка, которое содержит информацию от условий Лежандра — Клебша и Габасова — Джекобсона, но не повторяет их [4].

В оригинальном формате указанные условия в рассматриваемой задаче несправедливы, поскольку они порождаются игольчатой вариацией, которая на множестве дискретных управлений недопустима.

Заключение

Для основной задачи оптимизации нелинейной динамической системы проведена параметризация многомерного управления в классе кусочно-постоянных вектор-функций на заданной сетке возможных точек переключения. Дальнейшее развитие этого направления связано с применением кусочно-линейных аппроксимаций вместе с наглядной формализацией преобразований.

Литература

1. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, вып. 1. С. 180–188. Текст: непосредственный.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с. Текст: непосредственный.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Москва: Либроком, 2011. 272 с. Текст: непосредственный.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. Москва: Наука, 1973. 256 с. Текст: непосредственный.
5. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. Москва: Физматлит, 2005. 304 с. Текст: непосредственный.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с. Текст: непосредственный.
7. Срочко В. А., Аксеньюшкина Е. В., Антоник В. Г. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 3. С. 19–31. Текст: непосредственный.
8. Срочко В. А., Аксеньюшкина Е. В., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия ИГУ. Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 01.06.2022; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 08.09.2022.

LINEAR-QUADRATIC APPROXIMATION OF THE MAIN OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN A DISCRETE VARIANT

Vladimir A. Srochko

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor,
Irkutsk State University,
1, K. Marx st., Irkutsk 664003, Russia
srochko@math.isu.ru

Vladimir G. Antonik

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Irkutsk State University,
1, K. Marx st., Irkutsk 664003, Russia
vga@math.isu.ru

Abstract. The problem of optimization of a nonlinear dynamical system on a set of discrete controls of a piecewise constant structure is considered. The linear-quadratic approximation of the functional is implemented within the framework of classical variations based on the Pontryagin function and the Gabasov matrix function. The formalization of the transformation procedure has been carried out. Explicit expressions for variations with respect to control parameters have been obtained. As a result, it is possible to use gradient procedures and Newton method for the numerical solution of the problem. Non-standard optimality condition based on the second variation of the functional is obtained. It combines elements of classical results for special controls. On the basis of the second variation of the functional, a non-standard optimality condition is obtained, which combines elements of classical results for singular controls.

Keywords: the main optimal control problem, parameterization of a control, variations of the functional.

For citation

Srochko V. A., Antonik V. G. Linear-Quadratic Approximation of the Main Optimal Control Problem in a Discrete Variant // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 2. P. 42–49.

The article was submitted 01.06.2022; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 08.09.2022.