Научная статья

УДК: 531.1, 515.1
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-2-85-101

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ГЕССА

© Новиков Михаил Алексеевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

Аннотация. Рассматривается вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, описываемое дифференциальными уравнениями первого порядка. Интерес к исследованию таких систем вызывает большее число первых интегралов. В консервативных автономных системах трех степеней свободы как при интегрировании, так и изучении основных динамических свойств достаточно четырех не зависящих от времени интегралов, которые могут быть как общими, так и частными. Ранее большее внимание к исследованию вызывали системы с частным интегралом Гесса, они привлекательны и в настоящее время.

В статье вторым методом Ляпунова проведено исследование устойчивости одного из стационарных движений механической системы, допускающей частный интеграл Гесса. Функция Ляпунова строится по методу Четаева связкой из первых интегралов возмущенного движения. При анализе предварительно выполнено исключение части переменных, какими являются отклонения от стационарного движения, из первых интегралов с фиксированными константами. Для квадратичного выражения исключение переменных осуществляется разложением в восходящий ряд.

Исследование положительной определенности неоднородной функции Ляпунова проведено критерием знакоопределенности многочленов многих переменных. В процессе анализа потребовалось большое количество всевозможных операций обработки символьной информации, которые выполнялись системой аналитических вычислений на персональном компьютере.

В результате проведенных вычислений формальная условная устойчивость почти всюду установлена членами до четвертого порядка включительно.

Ключевые слова: частный интеграл Гесса, устойчивость стационарного движения, связка интегралов, положительная определенность многочлена, характеристическое уравнение, условия устойчивости.

Для цитирования
Новиков М. А. Об устойчивости одного стационарного движения механической системы с частным интегралом Гесса // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 2. С. 85–101.

Введение

Издавна научный интерес вызывают механические автономные консервативные системы, описывающие вращение твердого тела вокруг неподвижной точки [1–5]. В этой задаче для трех известных случаев существования четырех общих интегралов Эйлера, Лагранжа, Ковалевской [4] хорошо изучены основные динамические свойства. К ним, в частности, относится выявление стационарных движений [6–8] и их исследование устойчивости [9–15], в том числе и на границах области устойчивости [16–17]. Наиболее успешным способом исследования устойчивости движений является второй метод Ляпунова [9], основанный на построении знакоопределенных функций.

Аналогично ставится цель возможности исследования устойчивости стационарных движений в механических системах, когда существует частный интеграл Гесса [4; 5].

1 Постановка задачи

Изучаемая механическая система описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B-C)qr - z_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C-A)rp - x_0\gamma_3 + z_0\gamma_1, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A-B)pq + x_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x_0 \neq 0 \neq z_0$; $y_0 = 0$; A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, z_0 — координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ, направленную вертикально вниз (углы Пуассона).

Для системы (1.1) известно три общих интеграла [4]:

$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = c_0 = const$ (интеграл энергии),

$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_1 = c_1 = const$ (интеграл кинетического момента),

$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ (интеграл Пуассона).

При выполнении равенства Аппельрота — Некрасова [4–5]

$$AC(x_0^2 + z_0^2) + B(Ax_0^2 + Cz_0^2) \tag{1.2}$$

возможно существование частного линейного интеграла Гесса, записанного в аналитическом виде

$$V_3 = Ax_0 p + Cz_0 r = 0. \tag{1.3}$$

Частный интеграл Гесса имеет место не только в случае $A > B > C$, $x_0 z_0 < 0$, но и при $A < B < C$, а также при значениях x_0, z_0 одинаковых знаков.

Методом Рауса — Ляпунова [8] для системы (1.1) найдены стационарные движения [17]. Проведем исследование устойчивости одного из них:

$$p_0 = \frac{-z_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(A-C)x_0z_0}}, r_0 = \frac{x_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \sqrt{\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C(A-C)x_0z_0}},$$

$$q_0 = 0, \gamma_{10} = \frac{-C\,z_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}, \gamma_{20} = 0, \gamma_{30} = \frac{A\,x_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}; \quad A > C. \quad (1.4)$$

Для упрощения вычислений подкоренных выражений в статье рассматривается случай $x_0 > 0,\ z_0 > 0$.

2 Необходимые условия устойчивости

Для полного исследования следует сформулировать необходимые условия устойчивости. Они устанавливаются корнями характеристического уравнения. Отклонения от перманентного вращения имеют вид:

$$x_1 = p - p_0,\ x_2 = q - q_0,\quad x_3 = r - r_0,$$
$$x_4 = \gamma_1 - \gamma_{10},\ x_5 = \gamma_2 - \gamma_{20},\quad x_6 = \gamma_3 - \gamma_{30}. \qquad (2.1)$$

Матрица дифференциальных уравнений возмущенного движения запишется:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(B-C)r_0}{A} & \frac{(B-C)q_0}{A} & 0 & \frac{-z_0}{A} & 0 \\ \frac{(C-A)r_0}{B} & 0 & \frac{(C-A)p_0}{B} & \frac{z_0}{B} & 0 & \frac{-x_0}{B} \\ \frac{(A-B)q_0}{C} & \frac{(A-B)p_0}{C} & 0 & 0 & \frac{x_0}{C} & 0 \\ 0 & -\gamma_{30} & \gamma_{20} & 0 & r_0 & -q_0 \\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & -r_0 & 0 & p_0 \\ -\gamma_{20} & \gamma_{10} & 0 & q_0 & -p_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После подстановки B из равенства (1.2) и начальных значений переменных системы характеристическое уравнение матрицы D_0 будет следующим:

$$f_1(\lambda) = \det(D_0 - \lambda E) = \lambda^4(\lambda^2 + a_4) = 0, \qquad (2.2)$$

где $a_4 = \dfrac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{AC(A-C)\,(x_0^2 + z_0^2)x_0z_0\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \times$

$\times[A^2x_0^4 + 2(2A^2 - 3AC + 2C^2)x_0^2z_0^2 + C^2z_0^4]$.

Для рассматриваемых в постановке задачи предположений $A > C,\ x_0 > 0,\quad z_0 > 0$ первый множитель величины a_4 получается положительным.

Выражение в квадратных скобках положительное как сумма всех положительных слагаемых при любых положительных A, C. Уточним, что не имеется необходимых условий существования нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения, зависящих от начальных значений угловой скорости и углов Пуассона. Обычно при исследовании стационарных движений других случаев существования четвертого дополнительного интеграла условия устойчивости выражаются ограничениями на угловую скорость. Единственными ограничениями в этом случае, но уже только для системы (1.1), будут требования к моментам инерции твердого тела: $A+B>C,\ A+C>B,\quad B+C>A$.

Легко видеть, здесь первое неравенство выполняется тождественно ввиду существующего неравенства $A>C$. Очевидно, что при выполнении равенства (1.2) существует оценка: $A>B>C$. Действительно, из очевидного соотношения $C(x_0^2+z_0^2)<Ax_0^2+Cz_0^2$ при $A>C$ после умножения обеих частей неравенства на положительную величину $\dfrac{A}{Ax_0^2+Cz_0^2}$ следует $B<A$. Также из неравенства $A(x_0^2+z_0^2)>Ax_0^2+Cz_0^2$ после умножения на $\dfrac{C}{Ax_0^2+Cz_0^2}>0$ получается $B>C$. Третье условие $B+C>A$ сводится к необходимости существования неравенства:

$$C^2 z_0^2 > A\,(A-2C)x_0^2. \tag{2.3}$$

Конечно, при $C<A\le 2C$ последнее неравенство выполняется тождественно. Но при $A>2C$ необходимо дополнительно учитывать условие (2.3).

Без условия (1.2) характеристическое уравнение разлагается в произведение λ^2 и двух биквадратных уравнений. Очевидно, при условии (1.2) дополнительно образуется два нулевых корня характеристического уравнения (2.2). Можно показать, что нулевому четырехкратному корню в линейной части системы дифференциальных уравнений движения соответствуют не все простые элементарные делители. Так как все корни характеристического уравнения являются только нулевыми и чисто мнимыми, то в таком случае следует провести исследование достаточных условий устойчивости.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

3 Построение функции Ляпунова

В консервативных автономных системах знакоопределенные функции Ляпунова обычно строятся способом Четаева [9] — связкой из общеизвестных первых интегралов возмущенного движения. Для системы (1.1) связка будет составлена из трех общих и одного частного (1.3) интегралов. Частный интеграл Гесса должен сохранять постоянное значение, также остается постоянным общий интеграл Пуассона. В связи с этим будет рассматриваться условная устойчивость. Для отклонений (2.1) первые интегралы уравнений возмущенного движения запишутся:

$$V_{01} = A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 + 2(A p_0 x_1 + C r_0 x_3 + x_0 x_4 + z_0 x_6) = const,$$

$$V_{11} = A x_1 x_4 + B x_2 x_5 + C x_3 x_6 + A(\gamma_{10} x_1 + p_0 x_4) + C(\gamma_{30} x_3 + r_0 x_6) = const,$$

$$V_{21} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2(\gamma_{10} x_4 + \gamma_{30} x_6) = 0,$$

$$V_{31} = A x_0 x_1 + C z_0 x_3 = 0.$$

Как показывают примеры исследования механических систем со всеми четырьмя общими интегралами [17], наиболее успешными условия устойчивости бывают после предварительного исключения наибольшего количества переменных из первых интегралов возмущенного движения с фиксированными константами.

Из частного интеграла $V_{31} = 0$ можно исключить переменную

$$x_3 = \frac{-A x_0 x_1}{C z_0}.$$

Из другого общего интеграла $V_{21} = 0$ при учете здесь $\gamma_{30} > 0$ можно составить решение

$$x_6 = -\gamma_{30} + \sqrt{\gamma_{30}^2 - (x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10} x_4)}.$$

Иррациональное выражение можно представить в рациональном виде сходящимся рядом Маклорена по малым значениям x_4, x_5. Обозначим для краткости

$$k = \frac{x_4^2 + x_5^2 + 2\gamma_{10} x_4}{\gamma_{30}^2},$$

и тогда разложение запишется

$$x_6 = -\gamma_{30}\left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{8} + \frac{k^3}{16} + \frac{5k^4}{128} + \frac{7k^5}{256} + \frac{21k^6}{1024} + \cdots\right).$$

Учет пятого и шестого порядков в разложении x_6 объясняется тем, что в [16; 17] устойчивость установлена членами до упомянутых порядков.

Кроме того, из равенства (1.2) выразим $B = \dfrac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{A x_0^2 + C z_0^2}$, так как только при этом условии существует интеграл Гесса. Исключение позволит значительно упростить вид и анализ символьных выражений. В связке из первых интегралов $K(x,\alpha)=\alpha_0 V_{01}+\alpha_1 V_{11}$ линейные слагаемые по отклонениям обратятся в нуль при значениях:

$$\alpha_0=\sqrt{AC(A-C)x_0 z_0}; \quad \alpha_1=2\sqrt{A x_0^2+C z_0^2}\,\sqrt[4]{A^2 x_0^2+C^2 z_0^2}.$$

При этих значениях α_0,α_1 связку интегралов обозначим $K_1(x)$.

Наибольший интерес в $K_1(x)$ представляет квадратичная часть, равная

$$K_1^{(2)}=\frac{A(A x_0^2+C z_0^2)}{z_0}\sqrt{\frac{A(A-C)x_0}{C z_0}}\,x_1^2+2(A-C)\sqrt{A x_0^2+C z_0^2}\,\sqrt[4]{A^2 x_0^2+C^2 z_0^2}\,\times$$

$$\times\, x_1 x_5+\frac{AC(x_0^2+z_0^2)}{A x_0^2+C z_0^2}\sqrt{AC(A-C)x_0 z_0}\,x_2^2+2AC\frac{x_0^2+z_0^2}{\sqrt{A x_0^2+C z_0^2}}\times$$

$$\times\sqrt[4]{A^2 x_0^2+C^2 z_0^2}\,x_2 x_4+\ (x_0^2+z_0^2)\sqrt{\frac{AC(A^2 x_0^2+C^2 z_0^2)}{(A-C)x_0 z_0}}\,x_4^2+$$

$$+\frac{(x_0^2+z_0^2)(A^2 x_0^2+C^2 z_0^2)}{A x_0^2}\sqrt{\frac{C(A x_0^2+C z_0^2)}{(A-C)x_0 z_0}}\,x_5^2.$$

В вычислительном процессе, связанном с подстановками, преобразованиями символьных выражений, факторизацией для разложения на множители и упрощения символьных выражений, требуется большое количество различных операций. Особую сложность в рассматриваемой задаче вызывают подкоренные выражения второй и четвертой степени. Для обработки всюду применяется система аналитических вычислений «Mathematica» на персональных компьютерах. Особенность ее использования состоит в том, что иррациональные выражения четной степени не учитывают абсолютную величину, поэтому под знаком корня накапливаются достаточно большие символьные выражения, которые часто интерпретируются мнимыми единицами. Поэтому в статье применяется упрощенный анализ проверки знака символьных выражений, используя только положительные величины x_0, z_0.

В квадратичной форме $K_1^{(2)}(x)$ по переменным x_1, x_5 можно выделить отдельную часть $W_1(x)=m_1 x_1^2+2m_2 x_1 x_5+m_3 x_5^2$, где обозначено:

$$m_1=\frac{A(A x_0^2+C z_0^2)}{z_0}\sqrt{\frac{A(A-C)x_0}{C z_0}};$$

$$m_2=(A-C)\sqrt{A x_0^2+C z_0^2}\,\sqrt[4]{A^2 x_0^2+C^2 z_0^2};$$

$$m_3 = \frac{(x_0^2 + z_0^2)(A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2)}{A x_0^2} \sqrt{\frac{C(A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2)}{(A-C) x_0 z_0}} \ .$$

Здесь $m_1 m_3 - m_2^2 = \dfrac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}{x_0^2 z_0^2} > 0; \quad m_1 + m_3 > 0$.

Квадратичная часть $K_1^{(2)}(x)$ по переменным x_2, x_4 составляет полный квадрат: $\dfrac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\sqrt{AC(A-C)x_0 z_0} \times$

$$\times \left[x_2 + \sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2} \sqrt{\frac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{AC(A-C)x_0 z_0}}\, x_4 \right]^2 .$$

В целом квадратичная часть $K_1^{(2)}(x)$ знакопостоянна, и к дальнейшему анализу нужно привлечь слагаемые $K_1(x)$ выше второго порядка. Для этого применим следующий критерий знакоопределенности неоднородных полиномов.

4 О знакоопределенности многочленов

Ввиду возникновения неоднородных функций Ляпунова приведем способ исследования знакоопределенности многочленов вида:

$$F(x) = F_{2m}(x_1, \cdots, x_n) + F_*(x_1, \cdots x_{n+l}) \ , \tag{4.1}$$

где целые $n, l, m \geq 1$; $x \in R^{n+l}$, $F_{2m}(x_1, \cdots, x_n)$ — положительно определенная по своим переменным форма низшего $2m$ порядка (знакопостоянная в R^{n+l}), $F_*(x)$ — многочлен, состоящий из членов степени выше $2m$. Знакоопределенность (4.1) эквивалентна отсутствию вещественных решений уравнения $F(x) = 0$ в окрестности начала координат. Такие решения можно искать среди параметрических ветвей [19; 20]:

$$\begin{gathered} x_i = \sum_{|g|=L}^{\infty} a_{ig}\, t^g \ (i = 1, 2, \cdots, n),\, a_{ig} \in R; L > M; x_{n+1} = \delta_1 t_1^M, \cdots, x_{n+l} = \delta_l t_l^M ; \\ t^g = t_1^{g_1} \times t_2^{g_2} \times \cdots \times t_l^{g_l} ; \quad |g| = g_1 + g_2 + \cdots g_l, \quad g_j \geq o, \quad (j = 1, 2, \cdots, l), \end{gathered} \tag{4.2}$$

где мультииндексы g_j полагаются целыми неотрицательными; $\delta_j = -1$ выбирается только для четных M при $x_{n+j} < 0$, и $\delta_j = +1$ в остальных случаях; а целочисленные положительные значения L и M подбираются в процессе построения решений $F(x) = 0$.

В результате подстановки (4.2) в (4.1) получается ряд

$$F(x(t)) = A_Q(a_{ig}, M, L, t) + \cdots$$

где $A_Q(a_{ig}, M, L, t)$ обозначает форму наименьшего порядка Q относительно в общем случае многомерного параметра t и представляет выражение, содержащее коэффициенты формы (4.1) и параметризации (4.2);

многоточием обозначены члены более высокого порядка по l – мерному параметру t.

Начальное значение M можно полагать равным наименьшему общему кратному чисел: $1,2,\cdots,2m$. Начальное значение L можно полагать равным $M+1$, а далее оно находится из условия:

$$A_Q(a_{ig};M;L-1;t)\equiv 0$$

при $a_{ig}=0,\ (M+1\le |g|\le L-1),\quad i=1,2,\cdots,n;$

$$A_Q(a_{ig};M;L;t)\ne 0$$

при $a_{ig}=0,\ (M+1\le |g|\le L),\quad i=1,2,\cdots,n$.

Значения Q,L,M можно уточнить, сокращая на их наибольший общий делитель. Имеет место

Теорема 1. Представим Q/M несократимой дробью q/p, и тогда в случае если

1° *а*) $q=2\gamma+1$ (γ – целое) или

б) $q=2\gamma$ и $A_Q(a_{ig};M;L;t)$ — знакопеременная форма при некоторых вещественных a_{ig}, то $F(x)$ знакопеременна;

2°. $q=2\gamma$ и $A_Q(a_{ig};M;L;t)$ — положительно определенная форма по $t_1,t_2,\cdots,t_l$ при всех $a_{ig}\in R$, то $F(x)$ положительно определена;

3°. $q=2\gamma$ и $A_Q(a_{ig};M;L;t)$ — знакопостоянная форма при всех $a_{ig}\in R$, то $F(x)$ может быть знакоопределенной или знакопеременной на членах более высокого, чем Q, порядка, что устанавливается привлечением членов порядка выше L в разложении (4.2).

В приложениях анализ значительно упрощается при понижении степени M. Для выбора параметризации тогда справедлива

Теорема 2. При анализе знакоопределенности многочлена (4.1) при значении $m=1$ в разложении (4.2) можно полагать

$$M=1,\quad \delta_j=1\quad (j=1,\cdots,l).$$

Пример применения приведенных теорем продемонстрирован в [17].

5 О знакоопределенности связки интегралов

Вначале квадратичную форму $K_1^{(2)}(x)$ следует привести к полным квадратам. Для матрицы $D_1=\begin{pmatrix} m_1 & m_2\\ m_2 & m_3\end{pmatrix}$ составим характеристическое уравнение

$$f(\lambda)=\det(D_1-\lambda E_2)=\lambda^2+c_1\lambda+c_0=0, \tag{5.1}$$

где

$$c_1 = -\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{z_0}\sqrt{\frac{A(A-C)x_0}{C z_0}} - \frac{(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}{A z_0^2} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{(A-C)x_0 z_0}}, \qquad c_0 = \frac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)^3}{x_0^2 z_0^2}\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2} > 0\,.$$

Ввиду $c_1 < 0, c_0 > 0$ уравнение (5.1) имеет корни λ_1, λ_2 с вещественными положительными частями. Дискриминант этого уравнения получается в виде:

$$c_1^2 - 4c_0 = [Cz_0(x_0^2 + z_0^2)\sqrt{(Ax_0^2 + Cz_0^2)^3} - A^3(A-C)x_0^3(Ax_0^2 + Cz_0^2)]^2 +$$

$$+ 4A^3C(A-C)\, x_0^5 x_0^2 \sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\ ,$$

и он является положительным. Следовательно, корни λ_1, λ_2 вещественны и положительны.

Для приведения к полным квадратам квадратичной части $K_1^{(2)}(x)$ составим линейную замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = m_2(y_1 + y_2), \\ x_2 = y_3 - m_0 y_4, \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = u_{21}y_1 + u_{22}y_2, \end{cases} \tag{5.2}$$

где $u_{2i} = \lambda_i - m_1$, $\quad m_0 = \sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\sqrt{\dfrac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{AC(A-C)x_0 z_0}}$.

Обозначим $K_1(x(y)) = K_2(y)$, и квадратичная часть $K_2^{(2)}(y)$ при такой подстановке примет вид:

$$K_2^{(2)}(y) = \frac{(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\left\{\frac{(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)^2}{A^2 x_0^2\sqrt{AC(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)x_0 z_0}} \times\right.$$

$$\times\left[\lambda_1^2 - 2\lambda_1\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)^3}{(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)z_0}\sqrt{\frac{A(A-C)x_0}{C z_0}} \div \frac{A^3(A-C)x_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)^4}{Cz_0^3(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}\right]\times$$

$$\times y_1^2 + \frac{(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)^2}{A x_0^2\sqrt{AC(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)x_0 z_0}} \times$$

$$\times\left[\lambda_2^2 - 2\lambda_2\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)^3}{(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)z_0}\sqrt{\frac{A(A-C)x_0}{C z_0}} + \frac{A^3(A-C)x_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)^4}{Cz_0^3(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}\right]\times$$

$$\left.\times y_2^2 + \frac{AC(A-C)x_0 z_0}{(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)}\sqrt{\frac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{AC(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)}}\, y_3^2\ \right\}.$$

Для применения составленных ранее теорем нужно считать $m=1,\ n=3,\ l=1$. По теореме 2 полагаем $M=1, L=2$ и составим параметрическую подстановку:

$$y_1 = a_{12}\,t^2 + a_{13}\,t^3 + \cdots;\ y_2 = a_{22}\,t^2 + a_{23}\,t^3 + \cdots;\ y_3 = a_{32}\,t^2 + a_{33}\,t^3 + \cdots;\ y_4 = t\,,$$
$$a_{ij} \in R \quad (i = 1,2,3;\ j = 2,3)\,. \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в выражение $K_2^{(2)}(y)$, получим многочлен от a_{ij}. Здесь наименьшее значение Q получается равным четырем, и соответствующий многочлен $A_Q(a_{ij}, M, L, t)$ примет вид:

$$A_4(a_{ij},1,2,t) = \frac{t^4}{4A\,x_0^2}\sqrt{\frac{C}{A(A-C)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)\,x_0\,z_0}}\ K_3(a_{ij},\lambda)\,.$$

Исключая положительный множитель, интерес представляет выражение

$$K_3(a_{ij},\lambda) = R_{12}M_{12}(\lambda_1)\,a_{12}^2 + R_{11}M_{11}(\lambda_1)\,a_{12} + R_{22}\,M_{22}(\lambda_2)\,a_{22}^2 + R_{21}M_{21}(\lambda_2)\,a_{22} +$$
$$+R_{32}\,a_{32}^2 + R_{42}\,,$$

где $R_{12} = R_{22} = 4(A^2z_0^2 + C^2z_0^2)^2;\ R_{11} = R_{21} = 4Cz_0\sqrt{(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)^3}$;

$$R_{42} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)^2\,;\ M_{i2}(\lambda_i) = \lambda_i^2 - 2\lambda_i\,\frac{A(Ax_2^2 + Cz_2^2)^3}{(x_0^2 + z_0^2)\,(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)\,z_0}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{A(A-C)\,x_0}{C\,z_0}} + \frac{A^3(A-C)x_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)^4}{C\,z_0^3\,(x_0^2 + z_0^2)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)};\ R_{32} = \frac{4A^3C(A-C)x_0^3z_0}{Ax_0^2 + Cz_0^2}\times$$
$$\times\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\,;\ M_{i1}(\lambda_i) = \lambda_i - \frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C\,z_0\,(x_0^2 + z_0^2)}\sqrt{\frac{A(A-C)\,x_0}{C\,z_0}}\,.$$

Для анализа значений каждого из слагаемых $K_3(a_{ij},\lambda_k)$ удобнее ввести условное обозначение

$$\lambda_3 = \frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2}{C\,z_0\,(x_0^2 + z_0^2)}\sqrt{\frac{A(A-C)\,x_0}{C\,z_0}}\,.$$

В дальнейшем возникнет необходимость проверки условия принадлежности значения λ_3 интервалу корней уравнения (5.1). Так как значения λ_1 и λ_2 численно не определены, то будем оценивать принадлежность λ_3 интервалу $I_0 = (\lambda_1;\lambda_2)$ с использованием свойств алгебраического многочлена $f(\lambda) = 0$. Кроме того, особый интерес представляет знак функции $\phi(\lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3$, которая также характеризует значение λ_3 по отношению к интервалу I_0. Вычисления получают

$$f(\lambda_3) = \frac{A(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2}{C^3\,z_0^2\,(x_0^2 + z_0^2)}F_0\,,$$

где $F_0 = A^2 (A-C) x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2) - C^2 z_0 (x_0^2 + z_0^2)^2 \sqrt{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2}$.

Также вычислим $\phi(\lambda_3) = A(x_0^2 + z_0^2) x_0^2 z_0 \sqrt{A(A-C) x_0 z_0}\, F_1$,

где

$$F_1 = C^2 x_0 (x_0^2 + z_0^2)^2 (A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2) \sqrt{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2} -$$
$$- A^3 (A-C) x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2)[(2A-C)x_0^2 + Cz_0^2].$$

С точностью до положительных множителей знаки $f(\lambda_3)$ и $\phi(\lambda_3)$ совпадают соответственно со знаками выражений F_0 и F_1. Так при $\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2$ будет выполняться $F_0 > 0, F_1 > 0$; при $\lambda_3 \in I_0$ имеет место только $F_0 < 0$, и для $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ выполняются неравенства: $F_0 > 0, F_1 < 0$.

6 Параметрический анализ устойчивости

Последовательно проведем анализ составляющих слагаемых $K_3(a_{ij}, \lambda)$. Дискриминанты квадратных выражений $M_{i2}(\lambda_i)$ относительно $\lambda_i \ (i = 1, 2)$ получаются равными и имеют следующее выражение

$$d_1 = -\frac{A(A-C)^3 x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2)^4}{C z_0 (x_0^2 + z_0^2)^2 (A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2)} < 0 .$$

Следовательно, при всех вещественных λ_1, λ_2 квадратные многочлены $M_{i2}(\lambda_i)$ положительны. Линейные по λ_1, λ_2 слагаемые $M_{i1}(\lambda_i)$ принимают знак в зависимости от значений $(\lambda_i - \lambda_3)$. При анализе рассмотрим три возможные ситуации:

I. $\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2$,
II. $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$,
III. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Первая ситуация выражается системой неравенств: $F_0 > 0, F_1 > 0$. Выражая из этих неравенств величину $\sqrt{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2}$, можно составить для этой ситуации неравенство:

$$k_1 = \frac{A^3 (A-C) x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2)[(2A-C)x_0^2 + Cz_0^2]}{C^2 z_0 (x_0^2 + z_0^2)^2 (A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2)} <$$
$$< \frac{A^2 (A-C) x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C^2 z_0 (x_0^2 + z_0^2)^2} = k_0 .$$

Легко показать

$$k_0 - k_1 = -\frac{A^3 (A-C) x_0^3 (Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C^2 z_0 (x_0^2 + z_0^2)(A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2)} < 0 . \tag{6.1}$$

Ввиду того, что левая граница неравенства превышает правую, то первая ситуация недопустима.

Во второй ситуации значение $f(\lambda_3)$ должно быть отрицательным, а величина $\phi(\lambda_3)$ может быть произвольной. Линейное слагаемое, содержащее a_{12} в $K_3(a_{ij},\lambda)$, получается отрицательным, а все остальные слагаемые положительны. В этом случае слагаемые с a_{12} следует свернуть в полный квадрат. В результате запишется

$$K_3(a_{ij},\lambda) = R_{12}\, M_{12}(\lambda_1)\, [a_{12} + \frac{R_{11}\, M_{11}(\lambda_1)}{2R_{12}M_{12}(\lambda_1)}]^2 + R_{22}M_{22}(\lambda_2)\, a_{22}^2 +$$

$$+R_{21}M_{21}(\lambda_2)\, a_{22} + R_{32}\, a_{32}^2 + S_0,$$

где $S_0 = R_{42} - \dfrac{R_{11}^2\, M_{11}^2(\lambda_1)}{4R_{12}M_{12}(\lambda_1)} = Q_1\left[\lambda_1 - \dfrac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{(x_0^2 + z_0^2)\, z_0}\sqrt{\dfrac{A(A-C)\, x_0}{C\, z_0}}\right]^2 \geq 0$,

и Q_1 — некоторая положительная величина. При этом следует проверить возможность обращения в нуль величины S_0. Для этого обозначим

$$\lambda_4 = \frac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)^2}{z_0\,(x_0^2 + z_0^2)}\sqrt{\frac{A(A-C)\, x_0}{C\, z_0}},$$

и для установления его отношения к интервалу I_0 найдем численное значение $f(\lambda_4)$. В результате вычислений получается

$$f(\lambda_4) = \frac{(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A^2 C\, x_0^3\, z_0\,(x_0^2 + z_0^2)^2} \times \times [C^2 z_0\,(x_0^2 + z_0^2) - A^2\,(A-C)\, x_0^3\,(Ax_0^2 + Cz_0^2)].$$

Сопоставляя последнее с выражение F_0, можно записать

$$f(\lambda_4) = -\frac{(A-C)(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A^2\, C\, x_0^3\, z_0\,(x_0^2 + z_0^2)^2} F_0.$$

В рассматриваемом здесь случае $F_0 < 0$, откуда следует $f(\lambda_4) > 0$, что приводит к условию $\lambda_4 \notin I_0$. В этом случае $S_0 > 0$, и всюду при $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$ выполняется $K_3(a_{ij},\lambda) > 0$. По теореме 1 тогда заключаем о знакоопределенности $K_2(y)$, откуда по теореме Ляпунова [9] следует устойчивость стационарного движения (1.4).

В третьем случае при $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ должны выполняться условия: $F_0 > 0, F_1 < 0$. Учитывая (6.1), отсюда следует $\sqrt{A^2 x_0^2 + C^2 z_0^2} < k_0$. Здесь в выражении $K_3(a_{ij},\lambda)$ имеется два отрицательных слагаемых: $M_{11}(\lambda_1)$, $M_{21}(\lambda_2)$. В этом случае отдельно сгруппируем в полные квадраты слагаемые с a_{12} и a_{22}:

$$K_3(a_{ij},\lambda)=R_{12}\,M_{12}(\lambda_1)\left[a_{12}+\frac{R_{11}M_{11}(\lambda_1)}{2R_{12}M_{12}(\lambda_1)}\right]^2+$$

$$R_{22}\,M_{22}(\lambda_2)\left[a_{22}+\frac{R_{21}M_{21}(\lambda_2)}{2R_{22}M_{22}(\lambda_2)}\right]^2+\;R_{32}\,a_{32}^2+S_1\,,$$

где $S_1=R_{42}-\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{R_{11}^2M_{11}^2(\lambda_1)}{R_{12}M_{12}(\lambda_1)}+\dfrac{R_{21}^2M_{21}^2(\lambda_2)}{R_{22}M_{22}(\lambda_2)}\right]$.

По теореме Виета из уравнения (5.1): $\lambda_1+\lambda_2=-c_1;\,\lambda_1\,\lambda_2=c_0$ значение S_1 получается равным нулю. В этом случае $K_3(a_{ij},\lambda)\ge 0$, и по теореме 1 следует продолжить анализ знакоопределенности $K_2(y(t))$ членами пятого и шестого порядков, привлекая в (5.3) слагаемые по t третьего и более высших порядков.

Без затруднений удалось установить обращение в нуль членов пятого порядка $K_2(y(t))$ при выполнении условий:

$$a_{12}=-\frac{R_{11}M_{11}(\lambda_1)}{2R_{12}M_{12}(\lambda_1)},\quad a_{22}=-\frac{R_{21}M_{21}(\lambda_2)}{2R_{22}M_{22}(\lambda_2)},\quad a_{32}=0\,. \tag{6.2}$$

К сожалению, анализ знакоопределенности членов шестого порядка оказался неосуществим ввиду недостатка оперативной памяти на имеющихся персональных компьютерах.

Но и по полученным результатам можно прийти к определенному заключению. Явных условий нарушения необходимых условий устойчивости не имеется ввиду существования только нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения (2.2). Условие (6.2) можно считать начальными значениями для построения кривых вида (5.3) к уравнению $K(x,\alpha)=0$, при которых $K_2(y)$ положительно постоянна до членов четвертого порядка включительно.

В терминологии [21] это обстоятельство окончательно формулирует

Теорема 3. Перманентное вращение (1.4) условно устойчиво для большинства начальных данных, за исключением множества (6.2).

В знакопостоянной функции $K_3(a_{ij},\lambda)$ в переменных y_1,y_2,y_3,y_4 существуют вещественные решения $y_1(y_4),\ y_2(y_4),\,y_3(y_4)$, представляемые параметрическими кривыми вида (5.3). Набор таких решений при начальных значениях (6.2) можно записать

$$(y_1^{(1)},y_2^{(1)},y_3^{(1)},y_4^{(1)})\,.$$

Согласно подстановке (5.2) им однозначно соответствуют решения $(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_4^{(1)},x_5^{(1)})$. Из соотношений $V_{31}(x)=0,\ V_{21}(x)=0$ найдутся $x_3^{(1)},x_6^{(1)}$. Сформированные отклонения $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_6^{(1)})$ составляют множество значений $P(x^{(1)})$, для которых связка интегралов $K(x,\alpha)$ положительно постоянна в разложении до членов четвертого порядка. Можно утверждать, что перманентное вращение (1.4) условно устойчиво для большинства начальных данных при построении вещественных решений (5.3), за исключением множества $P(x^{(1)})$.

Система аналитических вычислений в исследуемой задаче осуществляла различные операции и преобразования с подкоренными выражениями. Поэтому для упрощения вычислений и достоверности извлечения из квадратного корня изначально полагались положительные значения: $A > C, x_0 > 0, z_0 > 0$. Для отрицательных значений x_0, z_0 можно повторить арифметические выкладки, предварительно переходя к положительным величинам $x_{10} = -x_1, z_{10} = -z_1$. Точно так же при $x_0 > 0, z_0 < 0$ или $x_0 < 0, z_0 > 0$ следует величину с отрицательными значениями обозначить как положительную с обратным знаком. Аналогично при $A < C$ можно выполнить предварительную замену: $A_1 = C,\ C_1 = A$, и затем проводить исследование устойчивости системы (1.1) в терминах A_1, C_1, x_0, z_0.

Заключение

Как видно из статьи, получение достаточных условий устойчивости стационарного движения (1.4) требует большого количества вычислений, в основном связанных с символьными операциями: алгебраической суммой, подстановками при замене переменных, факторизацией выражений, разложением в ряды Маклорена.

Следует отметить, что при исследовании достаточных условий устойчивости стационарных движений (1.4) проведено упрощение символьных выражений: исключение величины B из равенства (1.2); уменьшение количества переменных интегралом Гесса в возмущенном движении; меньшение числа переменных интегралом Пуассона, разложением в ряд Маклорена. Для полного числа переменных без исключения ранее упомянутых величин не имелось возможности установления знакоопределенности связки интегралов. Только при наибольшем числе исключенных величин из интегралов с фиксированными константами удалось получить более предпочтительный результат.

Обычно в исследовании достаточных условий для области устойчивости имеется возможность построения знакопостоянной квадратичной формы функцией Ляпунова при некоторых условиях на геометрические и динамические параметры системы (1.1) и значений угловой скорости. В исследуемой задаче квадратичная форма оказалась знакопостоянной без каких-либо ограничений на угловую скорость, также не имеется ограничений на угловую скорость и углы Пуассона при установлении необходимых условий устойчивости.

Следует подчеркнуть, что устойчивость исследуемого перманентного вращения была установлена членами до четвертого порядка малости отклонений. Хотя достаточными условиями ввиду громоздких выражений не удалось полностью показать устойчивость, необходимые условия устойчивости не выявили дополнительных требований для выполнения этого свойства. В отличие от положения равновесия достигнута, хотя и формальная, условная устойчивость перманентного вращения (1.4) при значениях z_0 любого знака.

Литература

1. Аппель П. Теоретическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 487 с. Текст: непосредственный.

2. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1999. 584 с. Текст: непосредственный.

3. Парс Л. А. Аналитическая динамика. Москва: Наука, 1971. 635 с. Текст: непосредственный.

4. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва, 2002. 287 с. Текст: непосредственный.

5. Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник: Петербург, 1895. Т. 18, вып. 2. С. 162–274. Текст: непосредственный.

6. Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. London.: McMillan, 1877. 108 p.

7. Routh E. J. The advanced part of a treatiseon the dynamics of a system of rigid bodies. London.: McMillan, 1884. 343 p.

8. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Москва: Изд -во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319. Текст: непосредственный.

9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263. Текст: непосредственный.

10. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Москва: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с. Текст: непосредственный.

11. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в Ньютоновом поле сил // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 749–758. Текст: непосредственный.

12. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // Прикладная математика и механика, 1954. Т. 18, вып. 4. С. 457–458. Текст: непосредственный.

13. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 51–66. Текст: непосредственный.

14. Румянцев В. В. К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 3. С. 339–345. Текст: непосредственный.

15. Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской // Механика твёрдого тела. Киев: Наукова думка, 1972. Вып. 4. С. 48–51. Текст: непосредственный.

16. Румянцев В. В. Сравнение трёх методов построения функций Ляпунова // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 916–921. Текст: непосредственный.

17. Новиков М. А. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг неподвижной точки в задаче Бруна // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 5. С. 261–265. Текст: непосредственный.

18. Новиков М. А. О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. №. 3. С. 28–37. Текст: непосредственный.

19. Уокер Р. Алгебраические кривые. Москва: Изд-во иностр. лит., 1952. 236 с. Текст: непосредственный.

20. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1979. 255 с. Текст: непосредственный.

21. Маркеев А. П. Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли) // Доклады Академии наук. 2002. Т. 387, № 3. С. 338–342. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 12.05.2022; одобрена после рецензирования 15.06.2022; принята к публикации 08.09.2022.

ON STABILITY OF ONE STEADY-STATE MOTION OF A MECHANICAL SYSTEM WITH THE HESS PARTIAL INTEGRAL

Mikhail A. Novickov
Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS)
134 Lermontov str. Irkutsk 664033, Russia
nma@icc.ru

Abstract. Rotation of a rigid body about a fixed point, which is described by first-order differential equations, is considered. A large number of the first integrals are of interest from the viewpoint of investigation of mechanical systems. As far as conservative autonomous systems characterized by three degrees of freedom are concerned, both under integration and investigation of the principal dynamic properties, it is sufficient to have four integrals independent of time, which may be both general and partial. Systems with the Hess partial integral attracted great attention from the viewpoint of such an investigation earlier, and still these systems attract attention at present..

In the present paper, investigation of stability of one type of steady-state motions of a mechanical system assuming the Hess partial integral with the aid of Lyapunov's second method was conducted. The Lyapunov function is constructed according the Chetayev's method by the bundle of first integrals of perturbed motion. In the process of analysis, removing of some part of the variables was preliminarily fulfilled. These variable represent deviations from the steady-state motions, from the first integrals with fixed constants. As regards the quadratic expression, removing the variables is conducted by expanding in uprising series.

Investigation of positive definiteness of the non-homogeneous Lyapunov function was conducted according to the criterion of sign-definiteness of polynomials of many variables. In the aspect of analysis, necessitated was a large number of various operations bound up with symbolic information processing, which were executed by the system of analytical computations installed on the personal computer.

As a result of the computations conducted, revealed was formal conventional stability for the terms up to the forth order inclusively.

Keywords: Hess partial integral, stability of steady-state motion, bundle of integrals, positive definiteness of polynomial, characteristic equation, conditions of stability.

For citation

Novickov M. A. On Stability of One Steady-State Motion of a Mechanical System With the Hess Partial Integral // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 2. P. 85–101.

The article was submitted 12.05.2022; approved after reviewing 15.06.2022; accepted for publication 08.09.2022.