ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.95
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-1-3-10

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ КОШИ — РИМАНА

© Зейналов Рамин Мубариз оглы
доктор философии по математике,
ведущий научный сотрудник,
Институт систем управления
Министерства науки и образования Азербайджанской Республики
Азербайджан, AZ1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68
raminz.math@gmail.com

Аннотация. Многие задачи математической физики для дифференциальных уравнений с частными производными выражаются уравнением Лапласа эллиптического типа, которые рассматриваются в основном в виде задач с локальными краевыми условиями Дирихле, Неймана и третьего типа, носителями которых является вся граница, так как в каждом случае для такого уравнения второго порядка эти условия являются достаточными. Однако, поскольку уравнение Коши — Римана является эллиптическим уравнением первого порядка, краевая задача может не иметь решения при любом из указанных выше условий. Поэтому для преодоления этого противоречия граничное условие, являющееся носителем всего граничного условия, задается нелокально. В связи с этим данная работа посвящена исследованию решения одной граничной задачи с нелокальными граничными условиями для уравнения с главной частью эллиптического типа первого порядка. Целью исследования являлось сведение задачи к соответствующей задаче для интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: уравнение Коши — Римана, задача Стеклова, задача Дирихле, нелокальные условия, необходимые условия, сингулярность, регуляризация, фундаментальное решение, собственные значения, собственные функции, фредгольмовость.

Для цитирования
Зейналов Р. М. Исследование одной граничной задачи для интегро-дифференциального уравнения с главной частью Коши — Римана // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 1. С. 3–10.

Введение

Как известно, различные прямые и обратные задачи для уравнений Коши — Римана и Лапласа были рассмотрены в работах [1–9]. Здесь будем рассматривать задачу Стеклова для интегро-дифференциального уравнения первого порядка с общими линейными граничными условиями.

Исходя из фундаментального решения уравнения с главной частью Коши — Римана строятся основные соотношения. Из этого основного соотношения отделяются необходимые условия, которые содержат сингулярности. Регуляризируя эти сингулярности своеобразным методом, получаем регулярные соотношения, которые совместно с заданными граничными условиями позволяют свести поставленную задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

1 Постановка задачи

В ограниченной области $D \subset R^2$ рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + a(x)u(x) + \int_D K(x,\eta)u(\eta)d\eta = 0,\ x \in D, \tag{1}$$

$$u(x_1,\gamma_2(x_1)) + \alpha(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1)) = \lambda\int_{a_1}^{b_1}[\beta_1(x_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1)) + \\ + \beta_2(x_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))]d\eta_1,\ x_1 \in [a_1,b_1], \tag{2}$$

где D — ограниченная и выпуклая по направлению x_2 область, $\lambda \in C$ — параметр.

Если область D спроектировать на ось x_1 параллельно оси x_2, то граница $\Gamma = \partial D$ разбивается на части Γ_1 и Γ_2, уравнения которых при $x_1 \in [a_1,b_1]$ имеют вид: $x_2 = \gamma_1(x_1)$ и $x_2 = \gamma_2(x_1)$.

Известно, что фундаментальное решение уравнения Коши — Римана имеет вид [10]:

$$U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}. \tag{3}$$

2 Основное соотношение

Умножим уравнение (1) на фундаментальное решение (3). После интегрирования полученного соотношения по области D получим:

$$\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)dx + i\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)dx + \int_D a(x)u(x)U(x-\xi)dx + \\ + \int_D U(x-\xi)dx\int_D K(x,\eta)u(\eta)d\eta = 0. \tag{4}$$

К первым двум слагаемым в левой части (4) применим формулу Остроградского — Гаусса. Тогда получим:

$$\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)\cos(\nu,x_2)dx - \int_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx + i\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)\cos(\nu,x_1)dx - \\ - i\int_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx + \int_D a(x)u(x)U(x-\xi)dx + \int_D u(\eta)d\eta\int_D U(x-\xi)K(x,\eta)dx = 0,$$

или

$$\int_\Gamma u(x)U(x-\xi)[\cos(\nu,x_2)+i\cos(\nu,x_1)]dx+\int_D u(\eta)d\eta\left[a(\eta)U(\eta-\xi)+\int_D U(x-\xi)K(x,\eta)dx\right]=$$
$$=\int_D u(x)\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]dx=\int_D u(x)\delta(x-\xi)dx=\begin{cases}u(\xi),\ \xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi),\ \xi\in\Gamma,\end{cases} \tag{5}$$

где ν — внешняя нормаль к границе Γ области D.

Как видно из (5), это основное соотношение состоит из двух частей: первая часть является произвольным решением уравнения (1), а вторая часть — необходимым условием. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть задана ограниченная, выпуклая по направлению x_2 плоская область D, где граница Γ является линией Ляпунова, $a(x),\ K(x,\eta),\ \alpha(x_1),\ \beta_1(x_1,\eta_1),\ \beta_2(x_1,\eta_1)$ — известные непрерывные функции своих аргументов и $\lambda\in C$ — параметр, тогда каждое решение уравнения (1) удовлетворяет основному соотношению (5).

3 Определение необходимого условия

Основное соотношение (5) представим в следующем виде:

$$\frac{1}{2}u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}[-\cos(x_1,\tau)+i\sin(x_1,\tau)]\frac{dx_1}{\cos(x_1,\tau)}+ \tag{6}$$
$$+\ldots$$

$$\frac{1}{2}u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot[\cos(x_1,\tau)-i\sin(x_1,\tau)]\frac{dx_1}{\cos(x_1,\tau)}+\ldots \tag{7}$$

где τ — касательное направление на границе Γ в направлении по возрастанию аргумента x_1, $(\ldots)$ обозначена сумма несингулярных слагаемых.

Используя формулы конечного приращения Лагранжа, необходимые условия (6) и (7) представим в виде:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{(x_1-\xi_1)[(\gamma_1'(\sigma_1(x_1,\xi_1))+i]}[1-i\gamma_1'(x_1)]dx_1+\ldots \tag{8}$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{(x_1-\xi_1)[(\gamma_2'(\sigma_2(x_1,\xi_1))+i]}\cdot[1-i\gamma_2'(x_1)]dx_1+\ldots \tag{9}$$

4 Выделение сингулярности

В каждом выражении из необходимых условий (8) и (9) содержаться сингулярные слагаемые. Для выделения сингулярности в этих выражениях производим следующие вычислительные преобразования:

$$\frac{1-i\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}=\frac{1-i\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}+i-i=-i+\frac{1-i\gamma_k'(x_1)+i\gamma_k'(\sigma_k)-1}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}=$$
$$=-i+i\frac{\gamma_k'(\sigma_k)-\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i},\quad k=1,2 \tag{10}$$

т. к. $\sigma_k(x_1,\xi_1)$ находится между x_1 и ξ_1, то, учитывая (10) в (8) и (9), находим:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots \tag{11}$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots \tag{12}$$

5 Регуляризация

Учитывая граничное условие (2), исходя из необходимых условий (11) и (12), создадим следующую линейную комбинацию:

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))-\alpha(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-$$
$$-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left[(\alpha(\xi_1)-\alpha(x_1))+\alpha(x_1)\right]\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots=$$
$$=-\frac{\lambda i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_1(x_1,\eta_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{\lambda i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))d\eta_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_2(x_1,\eta_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+.. \tag{13}$$

Таким образом, утверждаем следующую теорему.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 и если $\alpha(x_1)$ принадлежит некоторому классу Гельдера, тогда выражение (13) является регулярным.

6 Фредгольмовость

Предположим, что

$$\alpha(x_1)\neq 0. \tag{14}$$

Рассматривая регулярное выражение (13) с учетом граничного условия (2) при $x_1=\xi_1$, получим:

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left[\beta_1(\xi_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))+[\beta_2(\xi_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))\right]d\eta_1-$$

$$-\frac{\lambda i}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_1(x_1,\eta_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{\lambda i}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))d\eta_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_2(x_1,\eta_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))\frac{\alpha(\xi_1)-\alpha(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{i\alpha(\xi_1)}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left[1-i\gamma_1'(x_1)\right]dx_1-$$

$$-\frac{\alpha(\xi_1)}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left[1-i\gamma_2'(x_1)\right]dx_1+ \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_D u(\eta)d\eta\left[\frac{1}{\eta_2-\gamma_2(\xi_1)+i(\eta_1-\xi_1)}+\int_D\frac{K(x,\eta)dx}{x_2-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\right]-$$

$$-\frac{\alpha(\xi_1)}{2\pi}\int_D u(\eta)d\eta\left[\frac{1}{\eta_2-\gamma_1(\xi_1)+i(\eta_1-\xi_1)}+\int_D\frac{K(x,\eta)dx}{x_2-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\right],\ \xi_1\in[a_1,b_1],$$

и

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{\lambda}{2\pi\alpha(\xi_1)}\int_{a_1}^{b_1}\left[\beta_1(\xi_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))+[\beta_2(\xi_1,\eta_1)u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))\right]d\eta_1+$$

$$+\frac{\lambda i}{2\pi\alpha(\xi)}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_1(\eta_1))d\eta_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_1(x_1,\eta_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{\lambda i}{2\pi\alpha(\xi)}\int_{a_1}^{b_1}u(\eta_1,\gamma_2(\eta_1))d\eta_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{\beta_2(x_1,\eta_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{i}{2\pi\alpha(\xi)}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))\frac{\alpha(\xi_1)-\alpha(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{2\pi\alpha(\xi)}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{1}{2\pi\alpha(\xi)}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left[1-i\gamma_1'(x_1)\right]dx_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left[1-i\gamma_2'(x_1)\right]dx_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha(\xi)}\int_D u(\eta)d\eta\left[\frac{1}{\eta_2-\gamma_2(\xi_1)+i(\eta_1-\xi_1)}+\int_D\frac{K(x,\eta)dx}{x_2-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_D u(\eta)d\eta\left[\frac{1}{\eta_2-\gamma_1(\xi_1)+i(\eta_1-\xi_1)}+\int_D\frac{K(x,\eta)dx}{x_2-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\right],\ \xi_1\in[a_1,b_1], \tag{16}$$

Объединяя полученные уравнения (15) и (16) с первым выражением из основного соотношения (5), будем иметь:

$$u(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1(x_1)-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}[1-i\gamma_1'(x_1)]dx_1+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2(x_1)-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}\cdot$$
$$\cdot[1-i\gamma_2'(x_1)]dx_1+\frac{1}{2\pi}\int_D u(\eta)d\eta\left[\frac{1}{\eta_2-\xi_2+i(\eta_1-\xi_1)}+\int_D\frac{K(x,\eta)dx}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}\right],\ \xi\in D. \tag{17}$$

Таким образом, устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 3. При условиях теоремы 2, если имеет место условие (14), тогда в задаче (1)–(2) имеет место фредгольмовость.

Мы показали, что при условиях теоремы 3 граничная задача (1)-(2) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром.

Замечание 1. Решая систему (15), (16), для любого $\lambda\in C$ определяем $u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))$ и $u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))$ через интеграл по области D, который содержит $u(\eta)$.

Подставляя найденные $u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))$ и $u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))$ в уравнение (17) относительно $u(\xi)$ при $\xi\in D$, получаем однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с регулярным ядром, зависящее от параметра $\lambda\in C$.

Замечание 2. Собственные значения и собственные функции определяются из полученного интегрального уравнения относительно $u(\xi)$, $\xi\in D$.

Заключение

Как известно, для многомерного дифференциального уравнения в отличие от обыкновенного дифференциального уравнения число граничных условий совпадает с половиной порядка рассматриваемого уравнения. Поэтому как в курсах уравнений математической физики, так и в курсах уравнений с частными производными граничные задачи рассматриваются в основном для уравнений четного порядка, для уравнения Лапласа с одним из граничных условий Дирихле или Неймана или же Пуанкаре, для бигармонического уравнения (4-го порядка с двумя граничными условиями). Уравнение Коши — Римана является уравнением эллиптического типа первого порядка. Н. Бегер для уравнения Коши — Римана рассматривает задачу Дирихле. Это некорректная задача. Поэтому он предполагает, что данные задачи Дирихле удовлетворяют полученным в работе необходимым условиям. Нами показано, что одно нелокальное граничное условие достаточно для уравнения Коши — Римана. Представленный подход к решению исследуемой задачи может дать обоснованный толчок к получению решений граничных задач, имеющих соответствующую постановку.

Литература

1. Begehr H. R. Boundary value problem for the Cauchy-Riemann operator // Complex var. theory appl. 2005. V. 50. P. 1125–1136.

2. Four boundary value problems for the Cauchy–Riemann equation in a quarter plane, in More Progress in Analysis, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress / Abdymanapov S., Begehr H., Harutyunyan G., Tungatarov A.; eds. H. Begehr and F. Nicolosi (World Scientific, Singapore, 2009). Catania, 2005. P. 1137–1147.

3. Aliyev N. A., Abbasova A. H. The New Approach to Boundary Problems for Equation Cauchy-Riemann // Abstracts of International Conference on Modern problem of Applied Mathematics and Information Technologies. Tashkent, 2009. P. 28.

4. Алиев Н. А., Масталиев В. Ю., Зейналов Р. М. Об одной граничной задаче уравнения Коши — Римана // Научные труды, фундаментальные науки. Министерство образования Азербайджана, АТУ. Баку, 2013. Т. XII, № 1. С. 67–71.

5. Зейналов Р. М., Алиев Н. А. Определение спектра краевой задачи // Известия НАН Азербайджана. Сер. физико-технических и математических наук. 2019. № 39 (1). С. 170–177.

6. Алиев Н. А., Зейналов Р. М. Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши — Римана при граничном условии, содержащем глобальный член // Известия Национальный академии наук Азербайджана. Серия физико-технических и математических наук. 2010. № 30 (3). С. 75–80.

7. Зейналов Р. М., Алиев Н. А. Задача Зарембы — Стеклова для уравнения Коши — Римана // Вестник ДГУ. 2015. Т. 30, вып. 6. С. 74–79.

8. Зейналов Р. М. Задача Стеклова для уравнения Лапласа с линейными граничными условиями, содержащими интегралы // Вестник ОмГУ. 2016. № 2 (80). С. 6–11.

9. Саджадманеш М., Джаханшахи М., Алиев Н. Обратная задача типа Тихонова — Лаврентьева, включающая уравнение Коши — Римана // Азербайджанский математический журнал. 2013. № 3(1). С. 104–110.

10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Мир, 1981. 512 с.

Статья поступила в редакцию 24.02.2023; одобрена после рецензирования 10.03.2023; принята к публикации 13.03.2023.

STUDYING ONE BOUNDARY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH CAUCHY-RIEMANN PRINCIPAL PART

Ramin M. Zeynalov
PhD (mathematics), leading researcher,
Institute of Control Systems of the Ministry
of Science and Education of the Republic of Azerbaijan
68 B. Vahabzade st., Baku AZ1141, Azerbaijan

Abstract. Many problems of mathematical physics for partial differential equations are expressed by the Laplace equation of elliptic type, which are considered mainly in the form of problems with local boundary conditions of Dirichlet, Neumann and the third type, which are supported by the entire boundary. Since, in each case, for such a second-order equation, these conditions are sufficient. However, since the Cauchy-Riemann equation is a first-order elliptic equation, the boundary value problem may not have a solution under any of the above conditions.

Therefore, to overcome this contradiction, the boundary condition, which is the carrier of the entire boundary condition, is specified non locally. In this regard, this work is devoted to the study of the solution of a boundary value problem with nonlocal boundary conditions for an equation with a first-order elliptic principal part. The aim of the study was to reduce the problem to the corresponding problem for the Fredholm integral equation of the second kind.

Keywords: Cauchy-Riemann equation, Steklov problem, Dirichlet problem, nonlocal conditions, necessary conditions, singularity, regularization, fundamental solution, eigenvalues, eigenfunctions, Fredholm property.

For citation

Zeynalov R. M. Studying One Boundary Problem for Integro-Differential Equation With Cauchy-Riemann Principal Part // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 1. P. 3–10.

The article was submitted 24.02.2023; approved after reviewing 10.03.2023; accepted for publication 13.03.2023.