Научная статья

УДК 517.9
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-1-11-21

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

© Рябенко Александр Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей,
Воронежский государственный университет
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
alexr-83@yandex.ru

Аннотация. Многие физические процессы описываются задачами для эволюционных дифференциальных уравнений. При изучении таких задач большой интерес вызывает поведение их решений при большом времени, поскольку оно показывает, к чему эволюционирует процесс, описываемый задачей. Поведение решений эволюционных задач при большом времени более предпочтительно изучать асимптотическими методами, чем численными, поскольку обычно модуль разности истинного решения и численного решения оценивается сверху через величину, пропорциональную длине интервала, на котором применяется численный метод. Известно, что изучение задач для эволюционных дифференциальных уравнений можно сводить к изучению задач для дифференциальных уравнений с параметром, при этом поведение решений задач для эволюционных уравнений при большом времени будет определяться тем, как зависят решения задач с параметром от параметра.

В работе рассматривается одно однородное обыкновенное дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом и комплексным параметром, к изучению которого может быть сведен большой класс задач для эволюционных дифференциальных уравнений. В явном виде построены функции, образующие фундаментальную систему решений рассмотренного уравнения. Полученные представления позволяют прослеживать зависимость построенных функций от параметра.

Ключевые слова: параметр, дифференциальные уравнения с параметром, зависимость решений дифференциальных уравнений от параметра, построение фундаментальной системы решений дифференциального уравнения.

Для цитирования
Рябенко А. С. Построение фундаментальной системы решений одного дифференциального уравнения с параметром // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 1. С. 11–21.

Введение

Часто на сложность задач для дифференциальных уравнений влияет количество переменных, от которых зависит неизвестная функция. Разработано много методов, позволяющих осуществлять сведение одних задач для дифференциальных уравнений к другим задачам для дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит от меньшего числа переменных. Одним из таких методов является использование преобразования Лапласа. Применение преобразования Лапласа дает возможность получить большое количество значимых результатов в теории линейных дифференциальных уравнений (см., например, [1; 2]). Зачастую получить эти результаты позволяет то, что задачи для образов Лапласа решений исходных задач получаются технически более простыми, чем исходные задачи, и их решения часто можно построить в явном виде (см., например, [3; 4]).

Применение преобразования Лапласа является естественным шагом при изучении задач для эволюционных дифференциальных уравнений. При использовании преобразования Лапласа к эволюционной задаче переменная времени из эволюционной задачи «переходит» в комплексный параметр в задаче для образа Лапласа решения эволюционной задачи.

Одним из направлений качественной теории эволюционных дифференциальных уравнений является изучение поведения решений этих уравнений при большом времени (см. [5–9]). Хорошо известно, что поведение решений задач для эволюционных дифференциальных уравнений, в том числе и при большом времени, тесно связано с тем, как зависят решения задач для их образов Лапласа от параметра, в который «переходит» переменная времени. Самую простую такую связь дают предельные теоремы для преобразования Лапласа.

Если удается в явном виде получить представление решения задачи для образов Лапласа, то сразу же можно получить интегральное представление решения исходной задачи. Если это представление не очень громоздко, то, используя методы изучения асимптотик интегралов, зависящих от большого параметра, можно изучить поведение решения исходной задачи при большом времени. Такой подход позволил найти точные асимптотики при большом времени решений ряда задач (см. [10; 11]).

В случае когда решение задачи для образов Лапласа не удается построить в явном виде или удается, но оно очень громоздко, зависимость решения задачи для образов Лапласа от параметра, в который «переходит» переменная времени, можно получать при помощи оценок в некоторых функциональных пространствах. Зачастую такой подход приводит к достаточно грубым оценкам, которые позволяют определять скорость стабилизации решений задач для эволюционных уравнений при большом времени, но не позволяют получать точных асимптотик при большом времени (см. [7; 9; 12]). Для нахождения точных асимптотик при большом времени нужно получать менее грубые оценки зависимости решений задач для образов Лапласа от параметра, в который «переходит» переменная времени.

В работе рассматривается модельное уравнение

$$v''(x,\gamma)-\gamma b^2(x)v(x,\gamma)=0\,,\ x\in[0;\infty),\tag{1}$$

где γ — произвольный комплексный параметр.

Предполагается, что $b(x)\in C\left([0;\infty)\right), 0<\varepsilon_1\le b(x)\le\varepsilon_2$ при $x\in[0;\infty)$.

Легко видеть, что при помощи преобразования Лапласа к уравнению (1) сводятся многие задачи для эволюционных уравнений, например задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

В работе строятся представления функций, образующих фундаментальную систему решений уравнения (1).

1 Построение фундаментальной системы решений

Лемма 1. Пусть a, b, c, d — произвольные константы, $v_0(x)=ax+b$,

$$v_1(x)=cx+d\,,\ v_{2k}(x)=\int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\,v_{2(k-1)}(\tau)\,d\tau dt\,,$$

$$v_{2k+1}(x)=\int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\,v_{2k-1}(\tau)\,d\tau dt\,,$$

где $k=1,2,\ldots$, тогда функция

$$v(x,\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma^k v_{2k}(x)+\gamma^{(2k+1)/2}v_{2k+1}(x))\tag{2}$$

является формальным решением уравнения (1).

Доказательство. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$v(x,\gamma)=v_0(x)+\gamma^{1/2}v_1(x)+\gamma v_2(x)+\gamma^{3/2}v_3(x)+\gamma^2 v_4(x)+$$
$$+\gamma^{5/2}v_5(x)+\gamma^3 v_6(x)+\gamma^{7/2}v_7(x)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{k/2}v_k(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma^k v_{2k}(x)+\gamma^{(2k+1)/2}v_{2k+1}(x)).$$

Подставив последнее представление в уравнение (1), получаем, что

$$\begin{gathered}v_0''(x)+\gamma^{1/2}v_1''(x)+\gamma v_2''(x)+\gamma^{3/2}v_3''(x)+\gamma^2 v_4''(x)+\gamma^{5/2}v_5''(x)+\gamma^3 v_6''(x)+\\ +\gamma^{7/2}v_7''(x)+\ldots-\gamma b^2(x)v_0(x)-\gamma^{3/2}b^2(x)v_1(x)-\gamma^2 b^2(x)v_2(x)-\\ -\gamma^{5/2}b^2(x)v_3(x)-\gamma^3 b^2(x)v_4(x)-\gamma^{7/2}b^2(x)v_5(x)-\ldots=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Приравняв в (3) к нулю коэффициенты при соответствующих степенях γ, находим, что функции $v_k(x)$, где $k=0,1,2,\ldots$, должны быть решениями следующей системы:

$$\begin{cases} v_0''(x)=0, \\ v_1''(x)=0, \\ v_2''(x)=b^2(x)v_0(x), \\ v_3''(x)=b^2(x)v_1(x), \\ v_4''(x)=b^2(x)v_2(x), \\ v_5''(x)=b^2(x)v_3(x), \\ v_6''(x)=b^2(x)v_4(x), \\ v_7''(x)=b^2(x)v_5(x), \\ \ldots \end{cases}$$

Следовательно, функции $v_k(x)$, где $k=1,\,2,\ldots$, удовлетворяют соотношениям

$$v_0''(x)=0,\; v_{2k}''(x)=b^2(x)v_{2(k-1)}(x),\; v_1''(x)=0,\; v_{2k+1}''(x)=b^2(x)v_{2k-1}(x)\,. \tag{4}$$

Из (4) следует, что при $k=1,\,2,\ldots$

$$v_0(x)=ax+b,\; v_{2k}(x)=\int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\,v_{2(k-1)}(\tau)\,d\tau dt+a_{2k}x+b_{2k},$$

$$v_1(x)=cx+d,\; v_{2k+1}(x)=\int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\,v_{2k-1}(\tau)\,d\tau dt+c_{2k+1}x+d_{2k+1},$$

где $a,\,b,\,c,\,d,\,a_{2k},\,b_{2k},\,c_{2k+1},\,d_{2k+1}$ — произвольные константы.

Положив в последних равенствах $a_{2k}=b_{2k}=c_{2k+1}=d_{2k+1}=0$, получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 2. Функция $v(x,\gamma)$, заданная равенством (2), принадлежит пространству $C^2\left(\left[0;\infty\right)\right)$.

Доказательство. Докажем, что $v(x,\gamma)\in C^2\left(\left[0;T\right]\right)$, где T — произвольное положительное число.

Из вида функций $v_0(x)$ и $v_1(x)$ следует, что существует константа $\tilde{c}$, такая, что при $x\in\left[0;T\right]$ выполнены оценки

$$\left|v_0(x)\right|\le\tilde{c},\;\; \left|v_1(x)\right|\le\tilde{c}\,. \tag{5}$$

Из вида функций $v_{2k}(x)$ и (5) следует, что при $x\in\left[0;T\right]$ выполнены оценки

$$\left|v_2(x)\right|\le\int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_0(\tau)\right|d\tau dt\le\tilde{c}\varepsilon_2^2\frac{x^2}{2!},$$

$$\left|v_4(x)\right| \le \int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_2(\tau)\right|d\tau dt \le \tilde{c}\varepsilon_2^4\frac{x^4}{4!},$$

$$\left|v_6(x)\right| \le \int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_4(\tau)\right|d\tau dt \le \tilde{c}\varepsilon_2^6\frac{x^6}{6!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x\in[0;T]$ и $k=0,1,\,2,...$

$$\left|v_{2k}(x)\right| \le \tilde{c}\varepsilon_2^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{6}$$

Из вида функций $v_{2k+1}(x)$ и (5) следует, что при $x\in[0;T]$ выполнены оценки

$$\left|v_3(x)\right| \le \int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_1(\tau)\right|d\tau dt \le \tilde{c}\varepsilon_2^2\frac{x^2}{2!},$$

$$\left|v_5(x)\right| \le \int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_3(\tau)\right|d\tau dt \le \tilde{c}\varepsilon_2^4\frac{x^4}{4!},$$

$$\left|v_7(x)\right| \le \int_0^x\int_0^t b^2(\tau)\left|v_5(\tau)\right|d\tau dt \le \tilde{c}\varepsilon_2^6\frac{x^6}{6!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x\in[0;T]$ и $k=0,1,\,2,...$

$$\left|v_{2k+1}(x)\right| \le \tilde{c}\varepsilon_2^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{7}$$

Используя (6) и (7), находим, что

$$\begin{aligned}\left|v(x,\gamma)\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\gamma\right|^k\left|v_{2k}(x)\right| + \left|\gamma\right|^{(2k+1)/2}\left|v_{2k+1}(x)\right|\right) \le \\ &\le \tilde{c}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\gamma\right|^k + \left|\gamma\right|^{(2k+1)/2}\right)\frac{\varepsilon_2^{2k}x^{2k}}{(2k)!} \le \\ &\le \tilde{c}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\gamma\right|^k + \left|\gamma\right|^{(2k+1)/2}\right)\frac{(\varepsilon_2(1+T))^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) и признака Даламбера следует, что ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[0;T]$, а функция $v(x,\gamma)$ непрерывна на отрезке $[0;T]$.

Докажем, что функция $v(x,\gamma)$ непрерывно дифференцируема при $x\in[0;T]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\gamma^k v'_{2k}(x) + \gamma^{(2k+1)/2}v'_{2k+1}(x)\right). \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$v_0'(x) = a,\ v_{2k}'(x) = \int_0^x b^2(\tau) v_{2(k-1)}(\tau)\, d\tau,\ v_1'(x) = c,\ v_{2k+1}'(x) = \int_0^x b^2(\tau) v_{2k-1}(\tau)\, d\tau .$$

Из вида функций $v_0'(x)$ и $v_1'(x)$ следует, что существует константа c_1, такая, что при $x \in [0;T]$ выполнены оценки

$$|v_0'(x)| \le c_1,\ \ |v_1'(x)| \le c_1 . \qquad (10)$$

Из вида функций $v_{2k}'(x)$ и (6) следует, что при $x \in [0;T]$ выполнены оценки

$$|v_2'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_0(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^2 \frac{x}{1!},$$

$$|v_4'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_2(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^4 \frac{x^3}{3!},$$

$$|v_6'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_4(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^6 \frac{x^5}{5!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x \in [0;T]$ и $k = 1, 2, ...$

$$|v_{2k}'(x)| \le \tilde{c}\varepsilon_2^{2k} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} . \qquad (11)$$

Из вида функций $v_{2k+1}'(x)$ и (7) следует, что при $x \in [0;T]$ выполнены оценки

$$|v_3'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_1(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^2 \frac{x}{1!},$$

$$|v_5'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_3(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^4 \frac{x^3}{3!},$$

$$|v_7'(x)| \le \int_0^x b^2(\tau)|v_5(\tau)|\, d\tau \le \tilde{c}\varepsilon_2^6 \frac{x^5}{5!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x \in [0;T]$ и $k = 1, 2, ...$

$$|v_{2k+1}'(x)| \le \tilde{c}\varepsilon_2^{2k} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} . \qquad (12)$$

Используя (10), (11) и (12), находим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\gamma^k v_{2k}'(x)+\gamma^{(2k+1)/2}v_{2k+1}'(x)\right|\le$$

$$\le\left|v_0'(x)\right|+\left|\gamma\right|^{1/2}\left|v_1'(x)\right|+\tilde c\sum_{k=1}^{\infty}(\left|\gamma\right|^k+\left|\gamma\right|^{(2k+1)/2})\frac{\varepsilon_2^{2k}x^{2k-1}}{(2k-1)!}\le \qquad (13)$$

$$\le c_1(1+\left|\gamma\right|^{1/2})+\tilde c\sum_{k=1}^{\infty}(\left|\gamma\right|^k+\left|\gamma\right|^{(2k+1)/2})\frac{\varepsilon_2^{2k}(1+T)^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Из (13) и признака Даламбера следует, что ряд (9) абсолютно и равномерно сходится на отрезке $\left[0;T\right]$. Следовательно, функция $v(x,\gamma)$ непрерывно дифференцируема при $x\in\left[0;T\right]$ и

$$v'(x,\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma^k v_{2k}'(x)+\gamma^{(2k+1)/2}v_{2k+1}'(x)).$$

Докажем, что функция $v(x,\gamma)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x\in\left[0;T\right]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma^k v_{2k}''(x)+\gamma^{(2k+1)/2}v_{2k+1}''(x)). \qquad (14)$$

Легко видеть, что

$$v_0''(x)=0,\ v_{2k}''(x)=b^2(x)v_{2(k-1)}(x),\ v_1''(x)=0,\ v_{2k+1}''(x)=b^2(x)v_{2k-1}(x).$$

Из вида функций $v_{2k}''(x)$ и (6) следует, что при $x\in\left[0;T\right]$ выполнены оценки

$$\left|v_2''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_0(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^2,$$

$$\left|v_4''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_2(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^4\frac{x^2}{2!},$$

$$\left|v_6''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_4(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^6\frac{x^4}{4!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x\in\left[0;T\right]$ и $k=1,2,...$

$$\left|v_{2k}''(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^{2k}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \qquad (15)$$

Из вида функций $v_{2k+1}''(x)$ и (7) следует, что при $x\in\left[0;T\right]$ выполнены оценки

$$\left|v_3''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_1(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^2,$$

$$\left|v_5''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_3(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^4\frac{x^2}{2!},$$

$$\left|v_7''(x)\right|\le b^2(x)\left|v_5(x)\right|\le\tilde c\varepsilon_2^6\frac{x^4}{4!},$$

и т. д.

По индукции можно доказать, что при $x \in [0;T]$ и $k = 1,2,...$

$$\left| v''_{2k+1}(x) \right| \le \tilde{c} \varepsilon_2^{2k} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{16}$$

Используя (15) и (16), получаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \gamma^k v''_{2k}(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v''_{2k+1}(x) \right| \le$$
$$\le \tilde{c} \sum_{k=1}^{\infty} (|\gamma|^k + |\gamma|^{(2k+1)/2}) \frac{\varepsilon_2^{2k} x^{2k-2}}{(2k-2)!} \le \tilde{c} \sum_{k=1}^{\infty} (|\gamma|^k + |\gamma|^{(2k+1)/2}) \frac{\varepsilon_2^{2k} (1+T)^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{17}$$

Из (17) и признака Даламбера следует, что ряд (14) абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[0;T]$. Следовательно, функция $v(x,\gamma)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x \in [0;T]$ и

$$v''(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k v''_{2k}(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v''_{2k+1}(x)).$$

Поскольку T — произвольное число, то $v(x,\gamma) \in C^2([0;\infty))$.

Лемма доказана.

Возьмем $v_{0,1}(x) \equiv 1,\ v_{1,1}(x) \equiv \varepsilon x$, где $\varepsilon \equiv const > 0$, и рассмотрим функцию

$$u_1(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k v_{2k,1}(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v_{2k+1,1}(x)), \tag{18}$$

где $v_{2k,1}(x) = \int_0^x \int_0^t b^2(\tau) v_{2(k-1),1}(\tau) d\tau dt,\ v_{2k+1,1}(x) = \int_0^x \int_0^t b^2(\tau) v_{2k-1,1}(\tau) d\tau dt$.

Возьмем

$$v_{0,2}(x) \equiv 1,\ v_{1,2}(x) \equiv -\varepsilon x,$$

где $\varepsilon \equiv const > 0$, и рассмотрим функцию

$$u_2(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^k v_{2k,2}(x) + \gamma^{(2k+1)/2} v_{2k+1,2}(x)), \tag{19}$$

где $v_{2k,2}(x) = \int_0^x \int_0^t b^2(\tau) v_{2(k-1),2}(\tau) d\tau dt,\ v_{2k+1,2}(x) = \int_0^x \int_0^t b^2(\tau) v_{2k-1,2}(\tau) d\tau dt$.

Легко видеть, что функция $u_1(x,\gamma)$ является «обобщением» функции $e^{\sqrt{\gamma}\varepsilon x}$, а функция $u_2(x,\gamma)$ является «обобщением» функции $e^{-\sqrt{\gamma}\varepsilon x}$ в том смысле, что при $b(x) \equiv \varepsilon$ $u_1(x,\gamma) = e^{\sqrt{\gamma}\varepsilon x}$, а $u_2(x,\gamma) = e^{-\sqrt{\gamma}\varepsilon x}$.

Лемма 3. Функции $u_1(x,\gamma)$ и $u_2(x,\gamma)$, заданные равенствами (18) и (19), при $x \in [0;\infty)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Доказательство. Из леммы 1 и леммы 2 следует, что функции $u_1(x,\gamma),\ u_2(x,\gamma) \in C^2\left(\left[0;\infty\right)\right)$ и являются решениями уравнения (1).

Воспользовавшись (18) и (19), находим, что

$$u_1(0,\gamma)=1,\ u_1'(0,\gamma)=\varepsilon\sqrt{\gamma},\ u_2(0,\gamma)=1,\ u_2'(0,\gamma)=-\varepsilon\sqrt{\gamma}. \qquad (20)$$

Из (20) и равенства Лиувилля следует, что при $x\in\left[0;\infty\right)$

$$W(x,\gamma)=\begin{vmatrix} u_1(x,\gamma) & u_2(x,\gamma) \\ u_1'(x,\gamma) & u_2'(x,\gamma)\end{vmatrix}=W(0,\gamma)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon\sqrt{\gamma} & -\varepsilon\sqrt{\gamma}\end{vmatrix}=-2\varepsilon\sqrt{\gamma}\neq 0.$$

Таким образом, функции $u_1(x,\gamma)$ и $u_2(x,\gamma)$ линейно независимы на $\left[0;\infty\right)$ и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Лемма доказана.

Заключение

В виде рядов по параметру были получены явные представления для функций, образующих фундаментальную систему решений уравнения, рассмотренного в работе. Полученные представления позволяют в явном виде строить и изучать качественные свойства решений задач с параметром, порожденных большим классом задач для эволюционных дифференциальных уравнений, а также строить в явном виде и изучать качественные свойства решений эволюционных задач из этого класса.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18, вып. 2. С. 243–248.

2. Агронович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметрами и параболические задачи общего вида // Успехи математических наук. 1964. Т. 19, вып. 3 (117). С. 53–161.

3. Горшков А. В. Стабилизация одномерного уравнения теплопроводности на полуограниченном стержне // Успехи математических наук. 2001. Т. 56, вып. 2 (338). С. 213–214.

4. Першин И. В. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 268–272.

5. Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О. О стабилизации параболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 4. С. 210–217.

6. Денисов В. Н., Репников В. Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 1. С. 20–41.

7. Рябенко А. С. Оценка при $t\to\infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2007. № 1. С. 95–99.

8. Денисов В. Н. О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с младшими коэффициентами // Доклады Академии наук. 2010. Т. 433, № 4. С. 452–454.

9. Рябенко А. С., Карпова Ю. Ю. Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2011. № 1. С. 168–174.

10. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2003. 300 с.

11. Глушко А. В., Рябенко А. С. О малых одномерных акустических колебаниях стратифицированной жидкости в полупространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2008. № 1. С. 226–231.

12. Рябенко А. С. Оценка компонентов решения задачи, описывающей колебания в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2008. № 6. С. 185–192.

Статья поступила в редакцию 28.12.2022; одобрена после рецензирования 10.03.2023; принята к публикации 13.03.2023.

BUILDING A FUNDAMENTAL SOLUTION SYSTEM ONE DIFFERENTIAL EQUATION WITH A PARAMETER

Aleksandr S. Ryabenko
Cand. Sci. (Mathematics and Physics), A/Prof,
Department of Partial Differential Equations and Probability Theory
Voronezh State University
1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russia

Abstract. Many physical processes are described by problems for evolutionary differential equations. When studying such problems, the behavior of their solutions over a long time is of great interest, since it shows what the process described by the problem evolves to. It is more preferable to study the behavior of solutions to evolutionary problems with long time using asymptotic methods than numerical ones, since usually the modulus of the difference between the true solution and the numerical solution is estimated from above by a value proportional to the length of the interval on which the numerical method is applied. It is known that the study of problems for evolutionary differential equations can be reduced to the study of problems for differential equations with a parameter, while the behavior of solutions to problems for evolutionary equations for a long time will be determined by how the solutions of problems with a parameter depend on the parameter.

The paper considers one homogeneous ordinary differential equation with a variable coefficient and a complex parameter, to the study of which a large class of problems for evolutionary differential equations can be reduced. The functions forming the fundamental system of solutions of the considered equation are explicitly constructed. The obtained representations allow us to trace the dependence of the constructed functions on the parameter.

Keywords: parameter, differential equations with parameter, dependence of the solution of differential equations on the parameter, construction of a fundamental system of solutions of a differential equation.

For citation

Ryabenko A. S. Building a Fundamental Solution System One Differential Equation with a Parameter // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 1. P. 11–21.

The article was submitted 28.12.2022; approved after reviewing 10.03.2023; accepted for publication 13.03.2023.