Научная статья

УДК 517.956.4
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-1-22-36

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА-ДИФФУЗИИ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

© **Фуджита Яшима Хисао**
доктор (PhD), профессор,
Лаборатория прикладной математики и дидактики
Высшая нормальная школа Константина
Алжир, 25000, г. Константина, Али Менджели
hisaofujitayashima@yahoo.com

© **Айт Махиоут Латифа**
доктор (PhD), доцент (Maître de Conférence A),
Лаборатория нелинейных уравнений в частных производных
и истории математики
Высшая нормальная школа Куба
Алжир, 16050, г. Алжир, Старая Куба, B.P. 92
latifaaitmahiout@gmail.com

Аннотация. В этой работе доказывается сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса в целом многомерном евклидовом пространстве в случае, когда коэффицент диффузии стремится к нулю. В частности, доказано, что разность между каждым членом уравнения переноса-диффузии и соответствующим членом уравнения переноса стремится к нулю пропорционально коэффициенту диффузии. Доказательство основывается на сравнении приближенных решений для уравнений переноса-диффузии с приближенными решениями для уравнений переноса. Эти приближенные решения для уравнений переноса-диффузии построены фундаментальным решением уравнения диффузии и переносом на каждом шаге дискретизации по времени, а приближенные решения для уравнений переноса построены переносом на той же дискретизации по времени.

Ключевые слова: перенос, диффузия, система полулинейных уравнений, уравнения переноса-диффузии, уравнение переноса, коэффициент диффузии, сходимость решения, равномерная сходимость, приближенные решения, дискретизация по времени, фундаментальное решение уравнения диффузии.

Для цитирования
Фуджита Яшима Х., Айт Махиоут Л. Сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 1. С. 22–36.

Введение

Система уравнений переноса-диффузии является системой параболических уравнений и изучена многими математиками. Основные методы находятся например в [1]. В целом эти классические методы не дают удовлетворительной информации относительно поведения решения уравнений при коэффициенте диффузии, который стремится к нулю.

Решение линейного параболического уравнения можно построить также путем обратного уравнения Колмогорова [2]. Этот метод позволяет добиться стремления коэффициента диффузии к нулю, так что получается несколько хороших результатов относительно поведения решения уравнений при стремлении коэффициента диффузии к нулю [3]. Но эти результаты выражаются на языке теории вероятностей, и их не всегда легко перевести на язык математического анализа. Кроме того, для систем или при наличии нелинейного члена применение этого метода усложняется [4], [5].

В [6] (см. также [7], [8]), используя идею построения решения параболического уравнения путем стохастического уравнения, а также ядро теплопроводности вместо винеровского процесса, построено семейство приближенных решений, которые сходятся к решению уравнения переноса-диффузии. Приближенные решения определяются без использования вероятностных понятий, а их сходимость доказывается обычными средствами математического анализа.

Целью настоящей работы является доказательство сходимости решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса. Для этого рассматриваются приближенные решения для системы уравнений переноса-диффузии на определенной дискретизации времени, которые определяются введенным в [6], [7] и [8] методом, и приближенные решения для системы уравнений переноса на той же дискретизации времени. Сравнение двух семейств приближенных решений на одной и той же дискретизации времени позволяет получить хорошие оценки разности между двумя приближенными решениями. Эти оценки играют основную роль для доказательства сходимости решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса.

1 Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим систему уравнений переноса-диффузии

$$\partial_t u_i^{[\kappa]}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} v_{i,j}(t,x)\partial_{x_j} u_i^{[\kappa]}(t,x) = \kappa \mathcal{A}_i u_i^{[\kappa]}(t,x) + f_i(t,x,u^{[\kappa]}(t,x)),$$

$$t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\quad i=1,\dots,m, \tag{1}$$

и систему уравнений переноса

$$\partial_t u_i^{[0]}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} v_{i,j}(t,x)\partial_{x_j} u_i^{[0]}(t,x) = f_i(t,x,u^{[0]}(t,x)), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

$$i=1,\dots,m, \tag{2}$$

где $u^{[\kappa]} = (u_1^{[\kappa]},\dots,u_m^{[\kappa]})$ (соотв. $u^{[0]} = (u_1^{[0]},\dots,u_m^{[0]})$) — искомая векторная функция для системы (1) (соотв. (2)), $v_{i,j}$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,d)$ — заданные функции от t и x, f_i $(i=1,\dots,m)$ — заданные функции от (t,x,u), κ — положительный коэффициент и $\mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,m)$ — дифференциальные операторы, имеющие вид

$$\mathcal{A}_i = \sum_{j,k=1}^{d} \alpha_{jk}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{3}$$

где $\alpha_{jk}^{(i)}$, $j,k=1,\dots,d$, — постоянные вещественные коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{jk}^{(i)} = \alpha_{kj}^{(i)} \qquad \text{при любых}\ \ j,k=1,\dots,d, \tag{4}$$

$$\sum_{j,k=1}^{d} \alpha_{jk}^{(i)}\xi_j\xi_k \geq 0 \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{5}$$

То есть $\mathcal{A}_i$ — эллиптический оператор, но не обязательно строго эллиптический. Функции $v_{i,j}(t,x)$ и $f_i(t,x,u)$ одинаковы в уравнении (1) и в уравнении (2).

Для системы (1) и для системы (2) зададим начальное условие

$$u^{[\kappa]}(0,x) = u^{[0]}(0,x) = u_0(x) = (u_{0,1}(x),\cdots,u_{0,m}(x)). \tag{6}$$

Обозначим через $C_b(\mathbb{R}^d)$ (соотв. $C_b(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m)$) класс ограниченных непрерывных на $\mathbb{R}^d$ (соотв. на $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$) функций и через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d))$ (соотв. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m))$) класс непрерывных на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ (соотв. $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$) функций, которые ограничены на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ (соотв. на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$) для каждого $\tau>0$. Введем также обозначения

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{d}\alpha_j,$$

$$D_{x,u}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}\partial u_1^{\alpha_{d+1}}\dots\partial u_m^{\alpha_{d+m}}}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{d+m}\alpha_j.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема A. *Предположим, что для любого* $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, d$

$$D_x^\alpha v_{i,j}(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 3, \tag{7}$$

$$\partial_t D_x^\alpha v_{i,j}(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 2, \tag{8}$$

$$\frac{f_i(t,x,u)}{1+|u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)), \tag{9}$$

$$D_{x,u}^\alpha f_i(t,x,u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)) \qquad \text{при} \ \ 1 \leq |\alpha| \leq 3, \tag{10}$$

$$\partial_t D_{x,u}^\alpha f_i(t,x,u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 2, \tag{11}$$

$$D_x^\alpha u_{0,i}(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \qquad \text{при} \ \ |\alpha| \leq 3. \tag{12}$$

Тогда решение $u^{[\kappa]} = (u_1^{[\kappa]}(t,x), \dots, u_m^{[\kappa]}(t,x))$ *системы уравнений* (1) *с начальным условием* (6) *и решение* $u^{[0]}(t,x) = (u_1^{[0]}(t,x), \dots, u_m^{[0]}(t,x))$ *системы уравнений* (2) *с начальным условием* (6) *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\sup_{i \in \{1,\cdots,m\},\ (t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa]}(t,x) - u_i^{[0]}(t,x)| \leq K_{0,\tau}\kappa, \tag{13}$$

$$\sup_{i \in \{1,\cdots,m\},\ (t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial}{\partial t} u_i^{[\kappa]}(t,x) - \frac{\partial}{\partial t} u_i^{[0]}(t,x) \Big| \leq K_{1,\tau}\kappa, \tag{14}$$

$$\sup_{i \in \{1,\cdots,m\},\ j \in \{1,\cdots,d\},\ (t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{[\kappa]}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{[0]}(t,x) \Big| \leq K_{2,\tau}\kappa, \tag{15}$$

$$\sup_{i \in \{1,\cdots,m\},\ j,j' \in \{1,\cdots,d\},\ (t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{j'}} u_i^{[\kappa]}(t,x) \Big| \leq K_{3,\tau}, \tag{16}$$

где τ *— произвольное положительное число, а* $K_{0,\tau}$, $K_{1,\tau}$, $K_{2,\tau}$, $K_{3,\tau}$ *— постоянные, которые зависят только от* v, f, u_0, τ *(т. е. не зависят от* κ*).*

Это означает, что для каждого $\tau > 0$ решение

$$u^{[\kappa]} = (u_1^{[\kappa]}(t,x), \cdots, u_m^{[\kappa]}(t,x))$$

системы (1) сходится равномерно на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ к решению

$$u^{[0]}(t,x) = (u_1^{[0]}(t,x), \cdots, u_m^{[0]}(t,x))$$

системы (2), а каждый член уравнений (1) сходится равномерно на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ к соответствующему члену уравнений (2), т. е. $\partial_t u_i^{[\kappa]}(t,x)$ сходится к $\partial_t u_i^{[0]}(t,x)$, $\kappa \mathcal{A}_i u_i^{[\kappa]}$ сходится к нулю и $f_i(t,x,u^{[\kappa]}(t,x))$ сходится к

$$f_i(t,x,u^{[0]}(t,x)),$$

кроме того, их разность пропорциональна κ. Отметим, что сходимость $f_i(t,x,u^{[\kappa]}(t,x))$ к $f_i(t,x,u^{[0]}(t,x))$ следует из (13) и (10).

2 Определение приближенных решений

Чтобы определить приближенные решения для системы (1), рассмотрим сначала фундаментальное решение уравнения $\partial_t\varphi - \kappa\mathcal{A}_i\varphi = 0$. Так как коэффициенты $\alpha_{jk}^{(i)}$ постоянны, согласно условию (5) существует такое подпространство $M^{(i)}$ пространства $\mathbb{R}^d$, что

$$M^{(i)} = \{\, A_i x \,:\, x \in \mathbb{R}^d \,\}, \qquad A_i = (\alpha_{jk}^{(i)})_{j,k=1,\dots,d},$$

а на $M^{(i)}$ оператор $\mathcal{A}_i$ является строго эллиптическим. Введем такую систему координат $(\xi_1, \dots, \xi_d)$, что

$$M^{(i)} = \{\, (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \,:\, \xi_{q+1} = \ldots = \xi_d = 0 \,\}, \qquad q = \dim(M^{(i)}).$$

Тогда сужение оператора $\mathcal{A}_i$ на $M^{(i)}$ можно представлять в виде

$$\mathcal{A}_i\big|_{M^{(i)}} \equiv \mathcal{B}_{i,q} = \sum_{j,k=1}^{q} \beta_{jk}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial\xi_k}, \tag{17}$$

и имеет место

$$\sum_{j,k=1}^{d} \beta_{jk}^{(i)} \eta_j \eta_k > 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^q,\ \eta \neq 0.$$

Фундаментальным решением уравнения

$$\partial_t\varphi - \kappa\mathcal{B}_{i,q}\varphi = 0 \qquad \text{в } M^{(i)}$$

является

$$\widetilde{\Theta}_{\kappa,i}^{(q)}(t,\xi) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{\frac{d}{2}} (\det B_{i,q})^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{4\kappa t} \sum_{j,j'=1}^{q} \omega_{i,jk} \xi_j \xi_k \Big), \tag{18}$$

где $B_{i,q} = (\beta_{jk}^{(i)})_{j,k=1,\dots,q}$, а $\omega_{i,jk}$ — элементы обратной матрицы $B_{i,q}^{-1}$ (см. [1], глава IV, § 11). Легко видеть, что фундаментальным решением уравнения

$$\partial_t\varphi - \kappa\mathcal{A}_i\varphi = 0$$

в $\mathbb{R}^d$ в координатах $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ является

$$\widetilde{\Theta}_{\kappa,i}(t,\xi) = \widetilde{\Theta}_{\kappa,i}^{(q)}(t,\xi)\delta(\xi_{q+1})\ldots\delta(\xi_d), \tag{19}$$

где $\delta(\xi_j)$ — δ-функция Дирака.

Так как ξ_j представляет собой линейную комбинацию $x_1, \dots, x_d$, подставляя $\xi_j = \xi_j(x) = c_1x_1 + \ldots + c_dx_d$ в выражение $\widetilde{\Theta}_{\kappa,i}(t,\xi)$ (см. (19), (18)), получим выражение функции $\widetilde{\Theta}_{\kappa,i}$ в координатах $(x_1, \dots, x_d)$

$$\Theta_{\kappa,i}(t,x) = \widetilde{\Theta}_{\kappa,i}(t,\xi(x)). \tag{20}$$

Из свойств функции $\widetilde{\Theta}_{\kappa,i}^{(q)}(t,\xi)$ и δ-функции Дирака следует непосредственно, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i}(t,x)dx = 1 \qquad \forall t > 0, \tag{21}$$

$$\Theta_{\kappa,i}(t+s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i}(t,y)\Theta_{\kappa,i}(s,x-y)dy \qquad \forall t,s > 0. \tag{22}$$

Теперь введем семейство дискретизаций по времени. Определим

$$\delta_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1,2,\dots,$$

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n.$$

Для каждого $n = 1,2,\cdots$ рассмотрим соответствующую шагу δ_n функцию

$$\Theta_{\kappa,i,n}(x) = \Theta_{\kappa,i}(\delta_n,x). \tag{23}$$

Кроме соотношений (21) (для $t = \delta_n$) и (22) (для $t = s = \delta_{n+1}$, $t+s = \delta_n$) имеют место еще соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(x)x_j dx = 0, \qquad j = 1,\dots,d, \tag{24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(x)x_j x_k dx = 2\delta_n\kappa\alpha_{jk}^{(i)}, \qquad j,k = 1,\dots,d \tag{25}$$

(для доказательства соотношений (24) и (25) в случае $q = d$ см. [7], а в случае $q < d$ нетрудно их выводить из соотношений в случае $q = d$ и свойства δ-функции Дирака).

Определим приближенные решения

$$u^{[\kappa,n]}(t,x) = (u_1^{[\kappa,n]}(t,x),\dots,u_m^{[\kappa,n]}(t,x))$$

соотношениями

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_0^{[n]},x) = u_{0,i}(x), \tag{26}$$

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y)u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)-y)dy+$$
$$+\delta_n f_i(t_{k-1}^{[n]},x,u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)), \qquad k = 1,2,\dots, \tag{27}$$

$$u_i^{[\kappa,n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]}-t}{\delta_n}u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t-t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n}u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x)$$
$$\text{при } \ t_{k-1}^{[n]} \le t \le t_k^{[n]}. \tag{28}$$

Для системы (2), используя ту же дискретизацию по времени и то же начальное условие, определим приближенные решения $u^{[0,n]}(t,x) = (u_1^{[0,n]}(t,x),\cdots,u_m^{[0,n]}(t,x))$ для уравнений (2) соотношениями

$$u_i^{[0,n]}(t_0^{[n]},x) = u_{0,i}(x), \tag{29}$$

$$u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]},x) = u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]},x)) + \delta_n f_i(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)),$$
$$k = 1, 2, \cdots, \qquad (30)$$

$$u_i^{[0,n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)$$
$$\text{при } \ t_{k-1}^{[n]} \le t \le t_k^{[n]}. \qquad (31)$$

3 Оценки приближенных решений и их сходимость для каждой системы

Для сходимости приближенных решений $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ к решению уравнений (1) и для доказательства теоремы A нам понадобятся оценки приближенных решений $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ для уравнений (1) и их производных. Они доказываются аналогично оценкам, полученным в [6], [7]. Но нам нужно показать, что эти оценки не зависят от κ. Кроме того, следует обратить внимание на то, что у нас есть система.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существуют независимые от κ и от n возрастающие функции $\Lambda_0(\cdot)$, $\Lambda_1(\cdot)$, $\Lambda_2(\cdot)$ и $\Lambda_3(\cdot)$ такие, что для любого $\tau > 0$ имеются*

$$\sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, x\in\mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa,n]}(t,x)| \le \Lambda_0(\tau) \qquad \forall t \in [0,\tau], \qquad (32)$$

$$\sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, j\in\{1,\cdots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{[\kappa,n]}(t,x)\Big| \le \Lambda_1(\tau) \qquad \forall t \in [0,\tau], \qquad (33)$$

$$\sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, j,j'\in\{1,\cdots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{j'}} u_i^{[\kappa,n]}(t,x)\Big| \le \Lambda_2(\tau) \qquad \forall t \in [0,\tau], \qquad (34)$$

$$\sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, j,j',j''\in\{1,\cdots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_{j'} \partial x_{j''}} u_i^{[\kappa,n]}(t,x)\Big| \le \Lambda_3(\tau) \qquad \forall t \in [0,\tau]. \qquad (35)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим $\tau_+ = \tau + \delta_1$,

$$A_k^{[0,n]} = \sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, x\in\mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x)|, \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \le \frac{\tau_+}{\delta_n},$$

$$C_f = \sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, (t,x,u)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m} \frac{|f_i(t,x,u)|}{1+|u|}.$$

В силу (21) имеем

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]},x) - y)dy\Big| \le A_{k-1}^{[0,n]},$$

а в силу (9)

$$|f_i(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))| \leq C_f(1 + A_{k-1}^{[0,n]}).$$

Следовательно, из (27) получим

$$A_k^{[0,n]} \leq (1 + \delta_n C_f)A_{k-1}^{[0,n]} + \delta_n C_f.$$

Отсюда с учетом соотношения $t_k^{[n]} = k\delta_n$ следует

$$A_k^{[0,n]} \leq A_0^{[0,n]}(1 + \delta_n C_f)^k + \delta_n C_f \sum_{j=1}^{k}(1 + \delta_n C_f)^{k-j} \leq$$

$$\leq A_0^{[0,n]} e^{t_k^{[n]} C_f} + e^{t_k^{[n]} C_f} - 1 \qquad (36)$$

для $t_k^{[n]} \leq \tau_+$. Учитывая, что $A_0^{[0,n]} = \sup_{i\in\{1,\dots,m\},\, x\in\mathbb{R}^2} |u_{0,i}(x)|$ не зависит ни от κ ни от n, из определения (28) и неравенства (36) выведем существование независимой от κ и от n функции $\Lambda_0(t)$, удовлетворяющей неравенству (32).

Что касается неравенств (33), (34) и (35), дифференцируя по x_j или по x_j и $x_{j'}$ или по x_j, $x_{j'}$ и $x_{j''}$ две части (27) и используя условия (7), (10) и (12) и соотношение (21), установим для

$$A_k^{[1,n]} = \sup_{i\in\{1,\dots,m\},\, j\in\{1,\dots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)\Big|,$$

$$A_k^{[2,n]} = \sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, j,j'\in\{1,\dots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{j'}} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)\Big|,$$

$$A_k^{[3,n]} = \sup_{i\in\{1,\cdots,m\},\, j,j',j''\in\{1,\dots,d\},\, x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_{j'} \partial x_{j''}} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)\Big|,$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \leq \frac{\tau+\delta_1}{\delta_n}$, неравенства

$$A_k^{[1,n]} \leq (1 + \delta_n C_1(\tau))A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C_1(\tau_+), \qquad (37)$$

$$A_k^{[2,n]} \leq (1 + \delta_n C_2(\tau))A_{k-1}^{[2,n]} + \delta_n C_2(\tau)\big(1 + \Lambda_1(\tau_+)^2\big), \qquad (38)$$

$$A_k^{[3,n]} \leq (1+\delta_n C_3(\tau))A_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n C_3(\tau)\big(1+\Lambda_2(\tau_+)(1+\Lambda_1(\tau_+))+\Lambda_1(\tau_+)^3\big), \quad (39)$$

где $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ и $C_3(\tau)$ — постоянные, которые зависят от τ, и не зависят ни от n ни от κ. Неравенства (37), (38) и (39) будут доказаны аналогично работам [6] и [7]. Из (37), (38) и (39) следуют неравенства (33), (34) и (35). □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда для каждого* $\tau > 0$ *приближенные решения* $u^{[\kappa,n]}(t,x) = (u_1^{[\kappa,n]}(t,x),\ldots,u_m^{[\kappa,n]}(t,x))$, *определенные соотношениями* (26)–(28), *и их производные первого и второго порядка по* x *сходятся равномерно на* $[0,\tau]\times\mathbb{R}^n$ *к векторной функции* $u^{[\kappa]}(t,x) = (u_1^{[\kappa]}(t,x),\ldots,u_m^{[\kappa]}(t,x))$ *и их производным первого и второго порядка по* x, *а предельная векторная функция* $u^{[\kappa]}(t,x)$ *удовлетворяет системе* (1).

Лемма 2 доказывается аналогично работам [6] и [7]. Для этого доказательства переход от одного уравнения к системе уравнений не вызывает сложностей. Отметим, что соотношение (22) (с $t = s = \delta_{n+1}$, $t+s = \delta_n$) позволяет удобно оценить разность $u_i^{[\kappa,n+1]}(t,x) - u_i^{[\kappa,n]}(t,x)$, а для предельного перехода играют важную роль свойства (24) и (25) функции $\Theta_{\kappa,i,n}(x)$.

Что касается сходимости приближенных решений $u^{[0,n]}(t,x)$ к решению $u^{[0]}(t,x)$ системы (2), можно доказать ее обычным рассуждением о приближении дифференциальных уравнений дискретизацией по времени. Итак, имеем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда для каждого* $\tau > 0$ *приближенные решения* $u^{[0,n]}(t,x) = (u_1^{[0,n]}(t,x),\ldots,u_m^{[0,n]}(t,x))$, *определенные соотношениями* (29)–(31), *и их производные первого порядка по* x *сходятся равномерно на* $[0,\tau]\times\mathbb{R}^n$ *к векторной функции* $u^{[0]}(t,x) = (u_1^{[0]}(t,x),\ldots,u_m^{[0]}(t,x))$ *и их производным, удовлетворяющим системе* (2).

Поскольку производные второго порядка не входят в уравнения системы (2), можно доказать утверждение леммы 3 при несколько более слабых условиях. Но ради простоты изложения формулируем лемму при условиях теоремы A.

4 Доказательство теоремы A

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы A. Чтобы доказать неравенства (13), рассмотрим разность $u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)$, которая согласно (27) и (30) выражается в виде

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]},x) = D_1 + D_2 + D_3, \tag{40}$$

где

$$D_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y)\times$$
$$\times \left[u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]},x) - y) - u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]},x))\right]dy, \tag{41}$$

$$D_2 = u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)) - u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)), \tag{42}$$

$$D_3 = \delta_n \big[f_i(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - f_i(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) \big]. \tag{43}$$

Согласно формуле Тейлора имеем

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - y) - u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)) =$$

$$= -y \cdot \nabla_\xi u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)\Big|_{\xi = x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)} +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{j,j'=1}^d y_j y_{j'} \frac{\partial^2 u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_{j'}}\Big|_{\xi = x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - sy} (1-s) ds.$$

В силу (24) имеем

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) y \cdot \nabla_\xi u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)\Big|_{\xi = x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)} dy = 0.$$

С другой стороны, в силу (25) существует независимая от κ и от n постоянная $C_1^{(i)}$ такая, что

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) \int_0^1 \sum_{j,j'=1}^d y_j y_{j'} \frac{\partial^2 u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_{j'}}\Big|_{\xi = x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - sy} (1-s) ds dy \Big| \leq$$

$$\leq \delta_n \kappa C_1^{(i)} \sum_{j,j'=1}^d \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial^2 u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_{j'}} \Big|.$$

Следовательно, с учетом соотношения (34) получим

$$|D_1| \leq \delta_n \kappa C_1^{(i)} \Lambda_2(\tau). \tag{44}$$

Что касается D_2 и D_3, легко видеть, что если положим

$$B_k^{[0]} = \sup_{i \in \{1,\cdots,m\},\, x \in \mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]}, x)|,$$

получим

$$|D_2| \leq B_{k-1}^{[0]}, \qquad |D_3| \leq \delta_n C_2^{(i)} B_{k-1}^{[0]}, \tag{45}$$

где $C_2^{(i)}$ — независимая от κ и от n постоянная (см. (10)).

Положив $C_1 = \sup_{i \in \{1,\ldots,m\}} C_1^{(i)}$ и $C_2 = \sup_{i \in \{1,\ldots,m\}} C_2^{(i)}$, из (40), (44) и (45) выведем

$$|u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]}, x)| \leq |D_1| + |D_2| + |D_3| \leq$$

$$\leq B_{k-1}^{[0]} + \delta_n C_2 B_{k-1}^{[0]} + \delta_n \kappa C_1 \Lambda_2(\tau),$$

откуда с учетом определения $B_k^{[0]}$

$$B_k^{[0]} \leq (1 + \delta_n C_2) B_{k-1}^{[0]} + \delta_n \kappa C_1 \Lambda_2(\tau). \tag{46}$$

Так как согласно (26) и (29)

$$B_0^{[0]} = \sup_{i \in \{1,\ldots,m\},\ x \in \mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa,n]}(0,x) - u_i^{[0,n]}(0,x)| = 0,$$

из (46) следует

$$B_k^{[0]} \leq \delta_n \kappa C_1 \Lambda_2(\tau) \sum_{j=1}^{k} (1 + \delta_n C_2)^{k-j}. \tag{47}$$

Используя неравенство

$$\delta_n \sum_{j=1}^{k} (1 + \delta_n C_2)^{k-j} \leq \int_0^{k\delta_n} e^{C_2 t} dt,$$

из (47) получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u_i^{[\kappa,n]}(t,x) - u_i^{[0,n]}(t,x)| \leq \kappa C_1 \Lambda_2(\tau_+) \frac{1}{C_2} e^{C_2 \tau} \qquad \text{для} \ \ 0 \leq t \leq \tau. \tag{48}$$

Поскольку $u_i^{[\kappa,n]}(t,x)$ и $u_i^{[0,n]}(t,x)$ сходятся соответственно к $u_i^{[\kappa]}(t,x)$ и к $u_i^{[0]}(t,x)$ равномерно на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$, из (48) следует (13) с одной постоянной $K_{0,\tau}$, которая зависит от τ, но не зависит ни от κ ни от n.

Теперь перейдем к доказательству (15). Введем вспомогательное обозначение

$$w_{i,j,k}^{[1,n]}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) \qquad (i = 1,\ldots,m, \ \ j = 1,\ldots,d). \tag{49}$$

Тогда, дифференцируя две части (27) и (30), имеем

$$\partial_{x_j} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_j} u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]}, x) = E_1 + E_2 + E_3, \tag{50}$$

где

$$E_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) \big[w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - y) - w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)) \big] dy +$$

$$+ \delta_n \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) \sum_{j'=1}^{d} \big[w_{i,j',k-1}^{[1,n]}(x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x)) - w_{i,j',k-1}^{[1,n]}(x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - y) \big] \times$$

$$\times\partial_{x_j} v_{i,j'}(t_k^{[n]},x)dy,$$

$$E_2=\left[\partial_{\xi_j}u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)-\partial_{\xi_j}u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)\right]\Big|_{\xi=x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)}+$$

$$+\delta_n\sum_{j'=1}^{d}\left[\partial_{\xi_{j'}}u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)-\partial_{\xi_{j'}}u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)\right]\Big|_{\xi=x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)}\partial_{x_j}v_{i,j'}(t_k^{[n]},x),$$

$$E_3=\delta_n\Big[\partial_{x_j}f_i(t_{k-1}^{[n]},x,u)\Big|_{u=u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}-\partial_{x_j}f_i(t_{k-1}^{[n]},x,u)\Big|_{u=u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}+$$

$$+\sum_{i'=1}^{m}\Big(\partial_{u_{i'}}f_i(t_{k-1}^{[n]},x,u)\Big|_{u=u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}\partial_{x_j}u_{i'}^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)$$

$$-\partial_{u_{i'}}f_i(t_{k-1}^{[n]},x,u)\Big|_{u=u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}\partial_{x_j}u_{u_{i'}}^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)\Big)\Big].$$

Аналогично оценке D_1, используя формулу Тейлора

$$w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)-y)-w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x))=$$

$$=-y\cdot\nabla_\xi w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(\xi)\Big|_{\xi=x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)}+$$

$$+\int_0^1\sum_{j',j''=1}^{d}y_{j'}y_{j''}\frac{\partial^2 w_{i,j,k-1}^{[1,n]}(\xi)}{\partial\xi_{j'}\partial\xi_{j''}}\Big|_{\xi=x-\delta_n v_i(t_k^{[n]},x)-sy}(1-s)ds$$

и также соотношения (24) и (25), из выражения E_1 выведем, что

$$|E_1|\leq\delta_n\kappa(1+\delta_n C_3)\Lambda_3(\tau),\tag{51}$$

где C_3 — независимая от κ и от n постоянная.

Что касается E_2 и E_3, несмотря на то, что их выражение немного сложно, используя также (48), нетрудно получить

$$|E_2+E_3|\leq\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\partial_{\xi_j}u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)-\partial_{\xi_j}u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)|+$$

$$+\delta_n\Big[C_4\sum_{j'=1}^{d}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\partial_{\xi_{j'}}u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)-\partial_{\xi_{j'}}u_i^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\xi)|+$$

$$+C_5\Big[(1+\Lambda_1(\tau_+))\kappa\Lambda_2(\tau_+)\frac{1}{C_2}e^{C_2\tau}+$$

$$+\sum_{i'=1}^{m}|\partial_{x_j}u_{i'}^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)-\partial_{x_j}u_{i'}^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)|\Big]\Big], \qquad (52)$$

где C_4 и C_5 — независимые от κ и от n постоянные.

Если положим

$$B_k^{[1]}=\sup_{i\in\{1,\dots,m\},\,j\in\{1,\dots,d\},\,x\in\mathbb{R}^d}|\partial_{x_j}u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x)-\partial_{x_j}u_i^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)|,$$

из (51) и (52) вытекает

$$B_k^{[1]}\le(1+\delta_nC_6)B_{k-1}^{[1]}+\delta_n\kappa(C_6\Lambda_3(\tau_+)+\Gamma_1(\tau,\Lambda_1(\tau_+),\Lambda_2(\tau_+))),$$

где C_6 — независимая от κ и от n постоянная, а $\Gamma_1(\tau,\Lambda_1,\Lambda_2)$ — функция, которая возрастает по τ, по Λ_1 и по Λ_2 и не зависит ни от κ ни от n.

Следовательно, с учетом соотношения $B_0^{[1]}=0$,

$$B_k^{[1]}\le\delta_n\kappa(C_6\Lambda_3(\tau_+)+\Gamma_1(\tau,\Lambda_1(\tau_+),\Lambda_2(\tau_+)))\sum_{j=1}^{k}(1+\delta_nC_6)^{k-j}. \qquad (53)$$

Аналогично доказательству (13) из (53) получим (15).

Неравенство (16) есть не что иное, как неравенство (34).

Что касается неравенства (14), так как $u^{[\kappa]}(t,x)$ и $u^{[0]}(t,x)$ удовлетворяют уравнениям (1) и (2), то имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i^{[\kappa]}(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}u_i^{[0]}(t,x)=$$

$$=-v_i(t,x)\cdot(\nabla u_i^{[\kappa]}(t,x)-\nabla u_i^{[\kappa]}(t,x))+$$

$$+\kappa\mathcal{A}_iu_i^{[\kappa]}(t,x)+f_i(t,x,u^{[\kappa]}(t,x))-f_i(t,x,u^{[0]}(t,x)).$$

Отсюда с учетом (13), (15) и (16) следует (14).

Теорема доказана. □

Заключение

В данной работе при условии адекватной гладкости данных доказана сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса в случае, когда коэффициент диффузии стремится к нулю, причем получена пропорциональная коэффициенту диффузии оценка разности членов в уравнениях переноса-диффузии и членов уравнениях переноса. Получение этих результатов основано на использовании приближенных решений уравнении переноса-диффузии, введенных в [6] и [7]. Этот подход позволил лучше оценить разность решения системы уравнений переноса-диффузии и решения системы уравнений переноса. В известной литературе, основанной главным образом на теории стохастических уравнений (в частности [3]), такой оценки не найдено.

Так как в [8] метод приближенных решений, введенный в [6] и [7], обобщен на случай, когда уравнения рассматриваются в полуплоскости, у нас есть хорошая перспектива изучения возможной сходимости решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса в полуплоскости или в полупространстве. Более того, можно было бы изучить аналогичную задачу в случае непостоянного коэффициента диффузии. Но для этой проблемы нам понадобятся существенно новые методики.

Литература

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1977. 568 с.
3. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems (Grundlehren der mathematischen Wissenchafften, 260), 3rd Ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. xxviii + 458 p.
4. Pardoux É., Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasi-linear SPDEs // Prob. Theory Rel. Fields. 1994. Vol. 98. P. 209–227.
5. Pardoux É., Veretennikov A. Yu. Averaging of backward stochastic differential equations, with applications to semi-linear PDE's // Stochastics Stochastics Rep. 1997. Vol. 60. P. 255–270.
6. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // Ann. Math. Afr. 2020. Vol. 8. P. 53–73.
7. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // Ann. Math. Afr. 2021. Vol. 9. P. 89–108.
8. Аоуаоуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258. doi.org/10.14498/vsgtu1881.

Статья поступила в редакцию 27.01.2023; одобрена после рецензирования 10.03.2023; принята к публикации 13.03.2023.

CONVERGENCE OF SOLUTION OF TRANSPORT-DIFFUSION SYSTEM TO THAT OF TRANSPORT SYSTEM

Hisao Fujita Yashima
PhD, Professor,
Laboratory of applied mathematics and didactic
École Normale Supérieure de Constantine
Ali Mendjeli, Constantine 25000, Algeria

Latifa Ait Mahiout
PhD, Maître de Conférence A,
Laboratory of nonlinear partial differential equations
and history of mathematics
École Normale Supérieure de Kouba
Vieux Kouba, B.P. 92, Algiers 16050, Algeria

Abstract. In this paper we prove the convergence of the solution of transport-diffusion equation system to the solution of transport equation system in the whole d-dimentional Euclidean space when the diffusion coefficient tends to 0. In particular, it is proved that the difference between each term of transport-diffusion equation and the corresponding term of transport equation tends to 0 proportionally to the coefficient of diffusion. The proof is based on the comparison of approximate solutions for transport-diffusion equation with those for transport equation. These approximate solutions for transport-diffusion equation are constructed by the fundamental solution of diffusion equation and by translation on each step of time discretization, while the approximate solutions for transport equation are constructed by translation on the same time discretization.

Keywords: transport, diffusion, semilinear equation system, transport-diffusion equation, transport equation, coefficient of diffusion, convergence of solution, uniform convergence, approximate solutions, time discretization, fundamental solution of diffusion equation.

For citation
Fujita Yashima H., Ait Mahiout L. Convergence of Solution of Transport-Diffusion System to That of Transport System. Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 1. Pp. 22–36.

The article was submitted 27.01.2023; approved after reviewing 10.03.2023; accepted for publication 13.03.2023.