Краткое сообщение

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-2-42-48

МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НАЧАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

© Срочко Владимир Андреевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский государственный университет
Россия, 664000, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
srochko@math.isu.ru

Аннотация. Рассматривается линейная система с управляющими параметрами в правой части и неопределенным начальным возмущением. Целевая функция формулируется как положительная линейная комбинация квадратичных слагаемых на множестве фазовых траекторий. Ставится минимаксная задача в соответствии с принципом гарантированного результата. Проведена регуляризация задачи: получены явные условия на параметры линейной комбинации, которые обеспечивают целевой функции вогнуто-выпуклую структуру. Это свойство открывает возможность эффективного численного решения минимаксной задачи.

Ключевые слова: линейная управляемая система, начальное возмущение, минимаксная задача, параметрическая регуляризация.

Для цитирования

Срочко В. А. Минимаксная задача параметрической оптимизации линейной системы с начальным возмущением // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 2. С. 42–48.

Введение

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи (ЛКЗ — линейная система, квадратичный функционал) занимают приоритетное место в силу сохраняющейся актуальности как в теоретическом, так и в прикладном отношениях. Спектр возможных постановок и результатов в этой области достаточно широк.

В данной работе продолжается направление и технология решения ЛКЗ, представленная в публикациях [1, 5]. Отметим основные характеристики рассматриваемой задачи:

– линейная система с управляющими параметрами в правой части и неконтролируемым начальным воздействием;

– целевая функция как линейная свертка квадратичных слагаемых с положительными параметрами;

– минимаксная задача (минимум по управлению, максимум по начальному воздействию) в соответствии с принципом гарантированного результата [4].

В результате анализа проведена параметрическая регуляризация поставленной задачи: получены явные условия на параметры линейной комбинации (линейные неравенства), которые обеспечивают целевой функции вогнуто-выпуклую структуру (вогнутость по возмущению, выпуклость по управлению). Такое благоприятное свойство открывает возможность эффективного численного решения минимаксной задачи (соответствующие задачи на максимум и минимум являются выпуклыми).

1 Постановка задачи

Пусть два векторных параметра $u \in R^r$, $v \in R^n$ объединены для $t \in [t_0, t_1]$ линейной системой:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u, \qquad x(t_0) = v \tag{1}$$

с непрерывными матричными функциями $A(t)$, $B(t)$ и ограничениями $u \in U$, $v \in V$ относительно выпуклых компактных множеств.

Рассмотрим решение $x(t, v, u)$ системы (1), соответствующее начальному воздействию v и управлению u.

Определим матричные функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ размеров $(n \times n)$ и $(n \times r)$ дифференциальными уравнениями:

$$\dot{F}_1 = A(t)F_1, \qquad F_1(t_0) = E,$$
$$\dot{F}_2 = A(t)F_2 + B(t), \qquad F_2(t_0) = \mathrm{O},$$

где E — единичная матрица, О — нулевая матрица.

Тогда фазовая траектория $x(t, v, u)$ выражается по формуле Коши:

$$x(t, v, u) = F_1(t)v + F_2(t)u, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

На множестве траекторий $x[t] = x(t, v, u)$, $v \in V$, $u \in U$ определим целевую функцию:

$$\varphi(v,u) = \frac{1}{2}\alpha < x[t_1], \mathrm{P}\,x[t_1] > +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\beta < x[t], Q(t)x[t] > +\gamma < x[t], D(t)u >\right)dt$$

с положительными параметрами (весовыми коэффициентами) α, β, γ.

Здесь матрицы квадратичных форм Р, $Q(t)$ симметричны, матричные функции $Q(t)$, $D(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ непрерывны.

Поставим минимаксную задачу:

$$\min_{u \in U}\ \max_{v \in V} \phi(v,u). \tag{3}$$

Выделим функцию максимума:

$$\psi(u) = \max_{v \in V} \phi(v,u) \tag{4}$$

и представим задачу (3) в традиционной форме:

$$\psi(u) \to \min, \qquad u \in U. \tag{5}$$

Задача (3) соответствует правилу гарантированного результата [4]: минимизировать функцию $\psi(u)$, которая с позиции управляющей стороны u формализует наихудшую реализацию неконтролируемого воздействия v в рамках целевого критерия $\varphi(v,u)$.

Подчеркнем, что матрицы P, $Q(t)$ в выражении для $\varphi(v,u)$ являются, вообще говоря, знаконеопределенными. Тем не менее выделим случай знакоопределенности противоположного характера: $\mathrm{P} \le 0$, $Q(t) \ge 0$ или наоборот.

Остается отметить, что в этих ситуациях глобальное решение задачи (3) носит в настоящее время проблематичный характер.

2 Параметрическая регуляризация задачи

Используя формулу (2) для $x(t,v,u)$, представим явное выражение функции $\varphi(v,u)$. После подстановок и несложных преобразований получаем следующую структуру:

$$\varphi(v,u) = \frac{1}{2} < v, (\alpha \mathrm{P}_{11} + \beta Q_{11}) v > +$$

$$+ \frac{1}{2} < u, (\alpha \mathrm{P}_{22} + \beta Q_{22} + \gamma D_2) u > + < v, (\alpha \mathrm{P}_{12} + \beta Q_{12} + \gamma D_1) u > .$$

Здесь введены матричные обозначения

$$\mathrm{P}_{ij} = F_i(t_1)^T \mathrm{P} F_j(t_1), \quad Q_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} F_i(t)^T Q(t) F_j(t) dt, \quad i,j = 1,2, \quad i \le j;$$

$$D_1 = \int_{t_0}^{t_1} F_1(t)^T D(t) dt,$$

$$D_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_2(t)^T D(t) + D(t)^T F_2(t) \right] dt.$$

Отметим свойство симметричности:

$$\mathrm{P}_{ii}^T = \mathrm{P}_{ii}, \quad Q_{ii}^T = Q_{ii}, \qquad i = 1,2; \qquad D_2^T = D_2.$$

Выделим матрицы вторых частных производных:

$$\frac{\partial^2 \varphi(v,u)}{\partial v^2} = \alpha \mathrm{P}_{11} + \beta Q_{11}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi(v,u)}{\partial u^2} = \alpha \mathrm{P}_{22} + \beta Q_{22} + \gamma D_2.$$

В рамках задачи (3) обеспечим для функции $\varphi(v,u)$ свойство вогнутости по v и выпуклости по u с помощью параметров α, β, γ. Соответствующие условия представим через экстремальные собственные значения $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ возникающих матриц. При этом будем использовать известные представления через отношение Релея:

$$\lambda_{\max}(A) = \max_{v \neq 0} \frac{< v, Av >}{< v, v >}, \qquad \lambda_{\min}(B) = \min_{u \neq 0} \frac{< u, Bu >}{< u, u >}. \tag{6}$$

Свойство вогнутости функции $\varphi(v,u)$ по v эквивалентно спектральному неравенству:

$$\lambda_{\max}(\alpha \mathrm{P}_{11} + \beta Q_{11}) \leq 0.$$

С учетом представления (6) получаем (максимум суммы не больше суммы максимумов):

$$\lambda_{\max}(\alpha \mathrm{P}_{11} + \beta Q_{11}) \leq \alpha\lambda_{\max}(\mathrm{P}_{11}) + \beta\lambda_{\max}(Q_{11}).$$

Это приводит к достаточному условию вогнутости (линейное неравенство):

$$\alpha\lambda_{\max}(\mathrm{P}_{11}) + \beta\lambda_{\max}(Q_{11}) \leq 0. \tag{7}$$

Аналогично, выпуклость функции $\varphi(v,u)$ по u соответствует неравенству:

$$\lambda_{\min}(\alpha \mathrm{P}_{22} + \beta Q_{22} + \gamma D_2) \geq 0.$$

С учетом выражения (6) и свойства операции *min* получаем оценку снизу

$$\lambda_{\min}(\alpha \mathrm{P}_{22} + \beta Q_{22} + \gamma D_2) \leq \alpha\lambda_{\min}(\mathrm{P}_{22}) + \beta\lambda_{\min}(Q_{22}) + \gamma\lambda_{\min}(D_2)$$

вместе с достаточным условием выпуклости

$$\alpha\lambda_{\min}(\mathrm{P}_{22}) + \beta\lambda_{\min}(Q_{22}) + \gamma\lambda_{\min}(D_2) \geq 0. \tag{8}$$

Таким образом, линейные неравенства (7), (8) вместе с условием положительности параметров α, β, γ обеспечивают целевой функции $\varphi(v,u)$ вогнуто-выпуклую структуру, что является существенно благоприятным фактором в рамках минимаксной задачи (3).

Отметим, что строгие неравенства в (7), (8) обеспечивают вогнуто-выпуклое свойство в строгом смысле.

В заключение проведем характеризацию минимаксной задачи (3) после ее регуляризации. В этом случае составляющие задачи (4), (5) являются выпуклыми: максимум вогнутой функции $\varphi(v,u)$ по $v \in V$ и минимум выпуклой функции $\psi(u)$ для $u \in U$. Если регуляризация прошла по строго вогнутому сценарию (строгое неравенство (7)), то внутренняя задача на максимум

$$\varphi(v,u) \to \max, \qquad v \in V$$

имеет единственное решение $v(u)$ и функция $\psi(u)$ приобретает свойство дифференцируемости с градиентом:

$$\nabla \psi(u) = \frac{\partial \varphi(v(u),u)}{\partial u}.$$

Проведем стандартную конкретизацию ограничений $u \in U$, $v \in V$ в форме двусторонних неравенств:

$$u_i \in [u_i^-, u_i^+], \;\; i = \overline{1,r}; \qquad v_j \in [v_j^-, v_j^+], \;\; j = \overline{1,n}.$$

С учетом простейшей структуры ограничений составляющие минимакс задачи (4), (5) допускают эффективное решение известными методами выпуклого программирования [2, 3].

3 Пример

Определим иллюстрирующую задачу следующими соотношениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$
$$\dot{x}_2(t) = u, \qquad x_2(0) = v,$$
$$t \in [0,1], \qquad u \in U = [u_-, u_+], \qquad v \in R,$$
$$\varphi(v,u) = -\frac{1}{2}\alpha x_2^2(1) + \gamma \int_0^1 x_1(t) u dt, \quad \alpha > 0, \;\; \gamma > 0.$$

Найдем условия на параметры и соответствующее минимаксное управление.

В данном случае

$$x_2(t,v,u) = v + ut, \qquad x_1(t,v,u) = vt + \frac{1}{2}ut^2,$$
$$\varphi(v,u) = -\frac{1}{2}\alpha(v^2 + 2vu + u^2) + \frac{1}{2}\gamma u(v + \frac{1}{3}u).$$

Условия стационарности и строгой вогнутости по v:

$$\varphi_v' = -\alpha(u+v) + \frac{1}{2}\gamma u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{st} = \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right)u,$$
$$\varphi_v'' = -\alpha < 0.$$

Условие выпуклости по u:

$$\varphi_u'' = -\alpha + \frac{1}{3}\gamma \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \le \frac{1}{3}\gamma.$$

Таким образом, вогнуто-выпуклое свойство функции $\varphi(v,u)$ обеспечивается условиями:

$$\alpha > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \alpha \le \frac{1}{3}\gamma. \tag{9}$$

Найдем явное выражение для функции $\psi(u) = \max\limits_{v} \phi(v,u)$ при отсутствии ограничений на v. В этом случае

$$v_{st} = v_{\max}, \qquad \psi(u) = \varphi(v_{\max}, u).$$

После несложных преобразований получаем итоговое выражение:

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{2}{3}\right)u^2 .$$

С учетом условий (9)

$$\frac{\gamma}{\alpha} \geq 3 , \qquad \frac{1}{4}\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{2}{3} > 0 .$$

Следовательно, задача $\psi(u) \to \min$, $u \in U$ выдает минимаксное управление u_* : проекция нуля на отрезок U для любой пары параметров α, γ с условием (9).

Заключение

В статье реализуется подход, связанный с редукцией невыпуклой квадратичной задачи (знаконеопределенные матрицы вторых производных) к выпуклым задачам оптимизации, допускающим эффективное численное решение. Эта редукция проводится с помощью неопределенных параметров в целевой функции и обеспечивается конструктивными условиями в терминах линейных неравенств. Представленный подход к регуляризации невыпуклых линейно-квадратичных задач с многочленными целевыми функционалами имеет перспективы дальнейшего развития.

Литература

1. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 5–16. Текст: непосредственный.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Москва: МЦНМО, 2011. 620 с. Текст: непосредственный.
3. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. Москва: Физматлит, 2005. 304 с. Текст: непосредственный.
4. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. Москва: Наука, 1985. 520 с. Текст: непосредственный.
5. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметрическая регуляризация линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-линейных управлений // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2022. Т. 41. С. 57–68. Текст: непосредственный.

Статья поступила в редакцию 13.06.2023; одобрена после рецензирования 14.06.2023; принята к публикации 23.06.2023.

MINIMAX PROBLEM OF PARAMETRIC OPTIMIZATION
OF A LINEAR SYSTEM WITH AN INITIAL PERTURBATION

Vladimir A. Srochko
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
Irkutsk State University
1, K. Marx str., Irkutsk, 664000, Russia

Abstract. A linear system with control parameters in the right part and an indeterminate initial perturbation is considered. The objective function is formulated as a positive linear combination of quadratic terms on a set of phase trajectories. A minimax problem is set in accordance with the principle of guaranteed results. The regularization of the problem is carried out: explicit conditions for the parameters of the linear combination are obtained, which provide the concave-convex structure of the objective function. This property opens up the possibility of an effective numerical solution of the minimax problem.
Keywords: linear controlled system, initial perturbation, minimax problem, parametric regularization.

For citation
Srochko V. A. Minimax Problem of Parametric Optimization of a Linear System With an Initial Perturbation // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 2. P. 42–48.

The article was submitted 13.06.2023; approved after reviewing 14.06.2023; accepted for publication 23.06.2023.