Научная статья

УДК 517.955
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-14-22

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

© **Егорова Анастасия Юрьевна**
аспирант,
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
Россия, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46
an_batseva@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для системы параболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в весовых анизотропных пространствах Зигмунда. Для таких параболических систем установлены оценки потенциала Пуассона. Полученный результат используется в построении шкалы гладкости решения задачи Коши для параболических систем с нулевой правой частью в пространствах Зигмунда с весом.

Ключевые слова: система параболических уравнений, задача Коши, пространства Гёльдера, пространства Зигмунда, потенциал Пуассона.

Для цитирования

Егорова А. Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 3. С. 14–22.

Введение

Значительное влияние на развитие исследования разрешимости задачи Коши для параболических уравнений второго порядка оказала работа А. Н. Тихонова [1]. В ней он установил единственность решения уравнения теплопроводности с нулевой правой частью в некоторых классах экспоненциально растущих функций. Дальнейшему развитию и обобщению результатов работы А. Н. Тихонова посвящено множество исследований, например [2],[3] и другие.

С. П. Дегтярёв установил единственность решения задачи Коши для параболических уравнений с дробным порядком дифференцирования в анизотропных пространствах Гёльдера и показал корректность постановки такой задачи [4]. И. В. Женякова и М. Ф. Черепова получили оценки фундаментального решения, найденного методом Леви для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами в многомерном случае [5]. Для параболических систем вопросы существования и единственности решения задачи Коши детально изучены в работах [6]-[8]. С. Д. Эйдельман получил оценки для параболических систем в нормах анизотропных пространств Гёльдера с нецелым показателем гладкости [9] и изучил свойства фундаментальных матриц решений. Е. А. Бадерко и М. Ф. Черепова установили единственность классического решения параболической по Петровскому системы второго порядка в классе функций Тихонова в предположении ограниченности и Дини-непрерывности коэффициентов системы [10].

В работе [11] приведены оценки решений задачи Коши в анизотропных пространствах Зигмунда для уравнения теплопроводности. Для параболических уравнений второго порядка известно [12], что, если для целого показателя взять вместо пространств Липшица $C^{l-1,1}(\bar{D})$ взять анизотропные пространства Зигмунда $H_l(\bar{D})$, то для решений задачи Коши получается шкала гладкости, аналогичная шкале гладкости параболических пространств Гёльдера $C^{l,\alpha}(\bar{D})$. В настоящей работе установлены для систем параболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами оценки потенциала Пуассона, которые используются для построения шкалы гладкости решения задачи Коши для параболических систем в пространствах Зигмунда $H_l(\bar{D})$ и в пространствах Зигмунда с весом $H_m^{(-l)}(D)$.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k,r=1}^{n} a_{ijkr} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k x_r}, \quad i = \overline{1,m}, \\ u|_{t=0} = \psi. \end{cases} \tag{1}$$

Параболическая система (1) рассматривается в слое $D = \mathbb{R}^n \times (0;T)$, $0 < T < \infty$, и удовлетворяет условиям равномерной параболичности в смысле И. Г. Петровского, то есть для любой точки $(x_1, x_2, ..., x_n, t) \in D$ и для любого вещественного вектора $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$, такого, что $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2} = 1$, корни λ характеристического уравнения

$$det \left(\| \sum_{k,r=1}^{n} a_{ijkr}\sigma_k\sigma_r \|_{i,j=1}^{m} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{vmatrix} \right) = 0$$

удовлетворяют неравенству $Re\lambda \leq -\delta$ с некоторой положительной постоянной δ.

Пространства Зигмунда $H_a(D)$, $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, определим с помощью соответствующих пространств Липшица заменой в нормах разностей первого порядка Δf на разность второго порядка $\Delta^2 f$ [11]. Введем следующие обозначения

$$\Delta_x f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),\ \Delta_x^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Аналогично определяются первая и вторая разности по аргументу t. Определим в пространстве $H_0(D) = L_\infty(D)$ норму $|f|_{0,D} = \operatorname{vrai}\sup\limits_D |f|$.

Норму в пространстве $H_1(D)$ обозначим следующим образом:

$$[f]_{1,D} = \sup_D \frac{|\Delta_x^2 f(x,t)|}{|\Delta x|} + \sup_D \frac{|\Delta_t f(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}}.$$

Положим для $\alpha = 1, 2$

$$\langle f \rangle_{\alpha,D} = \sup_D \frac{|\Delta_t^\alpha f(x,t)|}{|\Delta t|^{\alpha/2}}.$$

Для целых $a \geq 2$ нормы и полунормы определим следующим образом

$$[f]_{a,D} = \sum_{k+2s=a-1} |\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|_{1,D},\ \langle f \rangle_{\alpha,D} = \sum_{k+2s=a-2} \langle \partial_x^k \partial_t^s f(x,t) \rangle_{2,D}.$$

В случае, когда a — натуральное

$$|f|_{a,D} = \sum_{k+2s \leq a-1} \sup_D |\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)| + [f]_{a,D} + \langle f \rangle_{\alpha,D}.$$

Пространства Зигмунда функций $f(x,t)$, которые определены в слое D и имеют в ней все производные $\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)$, причем $|k| + 2s < a$, с конечной величиной $|f|_{a,D}$ обозначим $H_a(\bar{D})$, а в локальном случае — $H_a(D)$.

Определим в слое D пространства Зигмунда с весом $H_a^{(b)}(D)$. Введем следующие обозначения:

$$|f|_{0,D}^{(b)} = \operatorname{vrai}\sup_D t^{max(b,0)/2} |f|.$$

Для натуральных a и целых $b \geq -a$ положим

$$[f]_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s=a-1} \sup_{(x,t)\in D} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_x^2 \partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|}{|\Delta x|} +$$

$$+ \sum_{|k|+2s=a-1} \sup_{\substack{(x,t)\in D, \\ 0<\Delta t<T-t}} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_t \partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}},$$

$$\langle f\rangle_{1,D}^{(b)} = \sup_{\substack{(x,t)\in D,\\ 0<\Delta t<T-t}} t^{\frac{1+b}{2}} \frac{|\Delta_t f(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}},$$

$$\langle f\rangle_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s=a-2} \sup_{\substack{(x,t)\in D,\\ 0<\Delta t<T-t}} t^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\Delta_t^2 \partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|}{|\Delta t|}, \text{ при } \ a \geq 2,$$

$$|f|_{a,D}^{(b)} = \sum_{|k|+2s\leq a-1} |\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|_{0,D}^{(|k|+2s+b)} + [f]_{a,D}^{(b)} + \langle f\rangle_{a,D}^{(b)}, \text{ при } \ b \geq 0,$$

$$|f|_{a,D}^{(b)} = |f|_{-b,D} + \sum_{|k|+2s\leq a-1} |\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)|_{0,D}^{(|k|+2s+b)} + [f]_{a,D}^{(b)} + \langle f\rangle_{a,D}^{(b)},$$

$$\text{при } \ b<0.$$

Пространства функций $f(x,t)$, определенных в слое D и имеющих в ней все производные $\partial_x^k \partial_t^s f(x,t)$, где $|k|+2s<a$, для которых величина $|f|_{a,D}^{(-b)}$ конечна, обозначим $H_a^{(b)}(D)$ в случае целых $a\geq 0$, $b\geq -a$. Нижний индекс a в этом обозначении указывает локальную гладкость, а величина $(-b)$ — гладкость в шкале Зигмунда в замыкании слоя $\bar{D}$.

Пусть $Z(x-\xi;t-\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1). Согласно [13, с. 27] элементы матрицы $Z(x-\xi;t-\tau)$ определены и непрерывны в слое D и бесконечно дифференцируемы при $t>0$ и справедлива оценка

$$|\partial_x^m Z(x-\xi;t-\tau)| \leq C_m (t-\tau)^{-\frac{(n+m)}{2}} e^{-c_m \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}, \ m\geq 0, \tag{2}$$

где C_m, c_m — некоторые постоянные.

2 Оценки потенциала Пуассона

Рассмотрим для функции $\varphi \in H_0(\mathbb{R}^n)$ потенциал Пуассона вида

$$\Pi\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t)\varphi(y)dy. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть m и l — целые числа, причем $m\geq l\geq 0$. Тогда отображение $\Pi:\varphi\to\Pi\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_m^l(D)$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи: $l = 0$ и $l > 0$. Пусть $l = 0$, тогда при $|k| \geq 0$ справедливо

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z(x-y,t)\varphi(y)dy\right| \leq \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} C_k t^{\frac{|k|-n}{2}} e^{-c_k\frac{|x-y|^2}{t}} \big|\varphi\big|_0 dy\right| \leq$$

$$\leq C_k\big|\varphi\big|_0\, t^{\frac{|k|-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-c_k\frac{|x-y|^2}{t}} dy = C_k\big|\varphi\big|_0\, t^{-\frac{|k|}{2}}. \qquad (4)$$

Пусть $l > 0$. Так как в области D потенциал Пуассона (3) удовлетворяет системе (1), докажем следующие оценки для производных потенциала (3):

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| \leq C, \quad |k| < l, \qquad (5)$$

$$|\Delta_x^2 \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| \leq C|\Delta x|, \quad |k| = l-1, \qquad (6)$$

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| \leq C t^{-\frac{|k|-l}{2}}, \quad |k| > l, \qquad (7)$$

$$|\Delta_t \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| \leq C|\Delta t|^{1/2}, \quad |k| = l-1, \qquad (8)$$

$$|\Delta_t^2 \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| \leq C|\Delta t|, \quad |k| = l-2 \ \ (\text{при } l \geq 2), \qquad (9)$$

С целью упрощения записи оценок будем считать, что $C = C_0\big|\varphi\big|_{l,D}$, где C_0 не зависит от φ.

По определению потенциала Пуассона (3) с учетом свойств свёртки получим оценку (5):

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z(x-y,t)\partial_y^k\varphi(y)dy\right| \leq C_0 t^{-\frac{n}{2}}\big|\varphi\big|_l \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-c_0\frac{|x-y|^2}{t}} dy \leq C$$

$$\text{при } |k| < l.$$

Если $|k| = l-1$, то используя условие на функцию φ, получим оценку (6):

$$|\Delta_x^2 \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^2 \partial_x^k Z(x-y,t)\varphi(y)dy\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t)\Delta_x^2 \partial_x^k \varphi(y)dy\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x-y,t)\partial_x^k\Big[\varphi(y+2\Delta x) - 2\varphi(y+\Delta x) + \varphi(y)\Big]dy\right| \leq C|\Delta x|.$$

Для $l > 0$ рассмотрим случай, когда $|k| = l + 1$. Пусть $k = k_1 + k_2$, где $|k_1| = 2,\ |k_2| = l - 1$. Используя четность функции $Z(x - y, t)$ по x и оценку (6), получим:

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k_1} Z(x-y,t)\partial_y^{k_2}\varphi(y)dy\right| =$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k_1} Z(x-y,t)\left[\partial_y^{k_2}\varphi(2x-y) - 2\partial_y^{k_2}\varphi(x) + \partial_y^{k_2}\varphi(y)\right]dy\right| \leq$$

$$\leq Ct^{-\frac{n+2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}|x-y|dy = Ct^{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть $|k| \geq l + 2$, тогда представим индекс k в виде $k = k_1 + k_2$, где $|k_1| = |k| - (l + 1),\ |k_2| = l + 1$. Тогда по формуле свертки для фундаментального решения получим оценку (7):

$$|\partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k} Z(x-y,t/2)\Pi\varphi(y,t/2)dy\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k_1} Z(x-y,t/2)\partial_y^{k_2}\Pi\varphi(y,t/2)dy\right| \leq$$

$$\leq Ct^{-\frac{|k|-l+n}{2}} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}dy\right| = Ct^{-\frac{|k|-l}{2}}.$$

Положим $\Delta t > 0$. Учитывая оценки (2) и (7) для случая $|k| = l - 1$, получаем оценку (8):

$$|\Delta_t \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left|\int\limits_0^{\Delta t} \partial_t \partial_x^k \Pi\varphi(x,t+\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq C\int\limits_0^{\Delta t} (t+\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau \leq C\int\limits_0^{\Delta t} \tau^{-\frac{1}{2}}d\tau = C|\Delta t|^{\frac{1}{2}}.$$

Используя тот факт, что функция $f(x) = xlnx,\ x \in (0; +\infty)$ удовлетворяет условию Зигмунда, но не удовлетворяет условию Липшица и для $h > 0$ справедлива оценка [12]

$$\Delta_h^2 f(x) = \int\limits_0^h \int\limits_0^h (x+\alpha+\beta)^{-1}d\alpha d\beta \leq (\alpha+\beta)^{-1}d\alpha d\beta = 2hln2,$$

с учетом оценок (2) и (8) для $|k| = l - 2$ при $l \geq 2,\ \Delta t > 0$, получим оценку (9):

$$|\Delta_t^2 \partial_x^k \Pi\varphi(x,t)| = \left| \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \partial_t^2 \partial_x^k \Pi\varphi(x, t+\alpha+\beta) d\alpha d\beta \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \partial_t^2 Z(x-y, t+\alpha+\beta) \partial_x^k \Pi\varphi(x, t+\alpha+\beta) d\alpha d\beta \right| \leq$$

$$\leq C \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} (t+\alpha+\beta)^{-1} d\alpha d\beta \leq C \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} (\alpha+\beta)^{-1} d\alpha d\beta \leq C|\Delta t|.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $0 < l \leq m,\ m \geq 3$ *и* $\psi \in H_l(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует единственное решение и задачи (1) из* $H_m^{(-l)}(D)$, *причем*

$$|u|_{m,D}^{(-l)} \leq C|\psi|_{l,\mathbb{R}^n}.$$

В частности, при $m = -l$ получим, что решение задачи Коши принадлежит пространству $H_l(\bar{D})$, то есть имеет непрерывную и ограниченную производную до $l-1$ порядка включительно, удовлетворяющую условию Зигмунда, и $|u|_{l,D} \leq C|\psi|_{l,\mathbb{R}^n}$.

Заключение

Таким образом, для потенциала Пуассона (2) доказано, что отображение $\Pi : \varphi \to \Pi\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_m^l(D)$. Получено, что ограниченное в слое D решение задачи Коши для системы (1) и начальной плотности $\varphi \in H_l(\mathbb{R}^n)$ принадлежит весовому пространству Зигмунда $H_m^{(-l)}(D)$, $0 < l \leq m,\ m \geq 3$. Разрешимость задачи Коши позволяет получить утверждение о локальной гладкости решения параболической системы второго порядка с локальной ограниченной и непрерывной правой частью. Кроме того, полученные оценки могут быть использованы для нахождения обобщенных решений краевых задач для параболических систем второго порядка в анизотропных пространствах Зигмунда.

Литература

1. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Матем. сб. 1935. № 42(2). С. 199–216.
2. Ладыженская О. А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Матем. сб. 1950. № 27(2). С. 175–184.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши // ДАН. 1955. № 102(6). С. 1065–1068.
4. Degtyarev S. Cauchy problem for a fractional anisotropic parabolic equation in anisotropic Holder spaces // Evolution Equations and Control Theory. 2023. V. 12(1). P. 230–281.
5. Zhenyakova I. V., Cherepova M. F. The Cauchy Problem for a Multi-Dimensional Parabolic Equation with Dini-Continuous Coefficients // Journal of Mathematical Sciences. 2022. V. 264. P. 581–602.
6. Шилов Г. Е. Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10, № 4(66). С. 89–100.
7. Золотарев Г. Н. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского // Изв. вузов. Матем. 1958. № 2. С. 118–135.
8. Слободецкий Л. Н. О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Матем. сб. 1958. № 46(88). С. 229–258.
9. Эйдельман С. Д. О задаче Коши для параболических систем // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 6. С. 913–915.
10. Baderko E. A., Cherepova M. F. Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem for Parabolic Systems // Differential Equations. 2019. V. 55(6). P. 806–814.
11. Конёнков А. Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 6. С. 820–831.
12. Конёнков А. Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С. 867–873.
13. Эйдельман С. Д. Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 446 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2023; одобрена после рецензирования 13.09.2023; принята к публикации 27.09.2023.

THE CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS IN ANISOTROPIC ZYGMUND SPACES

Anastasia Yu. Egorova
graduate student,
Ryazan State University named for S. A. Yesenin
46 Svobody St., Ryazan, 390000, Russia

Abstract. The article deals with the Cauchy problem for a system of second-order parabolic equations with constant coefficients in weighted anisotropic Zygmund spaces. Estimates of the Poisson potential are established for such parabolic systems. The obtained result is used to construct a smoothness scale for solving the Cauchy problem for parabolic systems with zero right hand side in Zygmund spaces with weight.

Keywords: system of parabolic equations, Cauchy problem, Hölder spaces, Zygmund spaces, Poisson potential.

For citation

Egorova A. Yu. The Cauchy Problem for Parabolic Systems in Anisotropic Zygmund Spaces // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 3. P. 14–22.

The article was submitted 05.06.2023; approved after reviewing 13.09.2023; accepted for publication 27.09.2023.