ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.38
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-53-61

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© Алексеев Алексей Владимирович
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики,
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34
alexeeff05@mail.ru

© Луценко Евгений Андреевич
студент,
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34
lutsenko.evgeniy05@gmail.com

Аннотация. Исследуется математическая модель движения твердого тела произвольной формы со сферической полостью относительно неподвижной точки. Полость целиком заполнена жидкостью большой вязкости. Динамические уравнения движения построены методом, предложенным Ф. Л. Черноусько, основанным на применении теоремы об изменении кинетического момента. Уравнения движения преобразованы с учетом малой динамической асимметрии твердого тела. Принято, что малые параметры, характеризующие большую вязкость и малую асимметрию, имеют одинаковый порядок. Для описанного случая получены численные и приближенные аналитические зависимости компонент угловой скорости твердого тела в связанной с ним системе отсчета от времени методом Пуанкаре, построены соответствующие графики. Проведена оценка точности приближенных решений, а также влияние величины малого параметра на погрешность. Приближенные аналитические зависимости позволяют исследовать влияние параметров системы на динамику движения. Практическим приложением может являться использование полученных результатов при исследовании движения космических аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива.

Ключевые слова: математическая модель, твердое тело, кинетический момент, динамическая асимметрия, малый параметр, жидкость, вязкость, момент инерции, аналитическое решение, метод Пуанкаре.

Благодарности
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00085).

Для цитирования

Алексеев А. В., Луценко Е. А. Приближенное решение уравнений движения динамически несимметричного тела с вязкой жидкостью // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 3. С. 53–61.

Введение

Задача исследования движения систем твердых тел, содержащих полости с жидкостью, не теряет своей актуальности. Одним из наиболее распространенных приложений данной проблемы является необходимость учета влияния жидкого топлива на пространственное движение ракетно-космических систем, в которых объем топлива может быть весьма существенным. Возмущения, появляющиеся из-за наличия жидкости, вызываются возможными всплесками, перетеканием, трением, возникающим между жидкостью и стенками резервуара. Кроме того, при наличии вращений твердого тела жидкость вовлекается в движение с некоторым запаздыванием, что влияет на распределение кинетического момента внутри системы.

Начиная с середины прошлого века, опубликовано большое количество основополагающих работ [1-6], посвященных задаче исследования движения относительно неподвижной точки твердых тел с полостями, заполненными жидкостью. Основными направлениями данных работ являются построение уравнений движения, определение граничных условий, решение гидродинамических задач, исследование устойчивости вращательных движений и т.д. Большой и качественный обзор работ на данную тему проделан авторами монографии [6].

Меньшее количество работ посвящено аналитическим решениям уравнений движения. Связано это со сложностью системы: существенная нелинейность, интегро-дифференциальная структура, наличие распределенных параметров, добавление уравнений движения сплошных сред в частных производных и т.д. В связи с этим, возникает необходимость приводить исходные математические модели к упрощенным, позволяющим находить аналитические решения. Одним из первых методику приведения полной системы к упрощенной предложил Ф. Л. Черноусько [4]. Математическая модель, построенная в скалярном виде на основании предложенного им метода, представлена в работе [7].

Данная работа является логическим продолжением и развитием статьи [8], в которой получено точное аналитическое решение динамических уравнений движения относительно центра масс (неподвижной точки) динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью. Даже небольшое нарушение динамической симметрии не позволяет в полной мере использовать полученные в [8] результаты. В данной статье строятся приближенные аналитические решения динамических уравнений движения системы при наличии малой динамической асимметрии твердого тела. При этом используется метод малого параметра или метод Пуанкаре, подробно описанный в [9] и применяемый в [10, 11].

1 Математическая модель

Динамические уравнения движения относительно неподвижной точки твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости, в связанной системе координат (оси являются главными осями инерции) примут вид [4, 7]:

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-B)qr = M_x-\rho\nu^{-1}D\Big(A^{-1}\big[\dot{M}_x+(B-C)(\dot{q}r+q\dot{r})\big]+\\
&\qquad +qC^{-1}\big[M_z+(A-B)pq\big]-rB^{-1}\big[M_y+(C-A)pr\big]\Big);\\
&B\dot{q}+(A-C)pr = M_y-\rho\nu^{-1}D\Big(B^{-1}\big[\dot{M}_y+(C-A)(\dot{p}r+p\dot{r})\big]+\\
&\qquad +rA^{-1}\big[M_x+(B-C)qr\big]-pC^{-1}\big[M_z+(A-B)pq\big]\Big);\\
&C\dot{r}+(B-A)pq = M_z-\rho\nu^{-1}D\Big(C^{-1}\big[\dot{M}_z+(A-B)(\dot{p}q+p\dot{q})\big]+\\
&\qquad +pB^{-1}\big[M_y+(C-A)pr\big]-qA^{-1}\big[M_x+(B-C)qr\big]\Big),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей инерции; p, q, r — проекции вектора угловой скорости; M_x, M_y, M_z — проекции главного момента внешних сил, ρ — плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, D — параметр полости [5].

Рассмотрим случай, когда твердое тело обладает малой динамической асимметрией $B = A+\mu C$ ($0<\mu \ll 1$), на него не действуют внешние моменты $M_x = M_y = M_z = 0$. Так как рассматривается случай большой кинематической вязкости жидкости, величина $\rho\nu^{-1}D$ является малой, что согласно [4] позволяет пренебречь членами второго порядка малости. После учета ограничений и преобразований уравнения (1) примут вид:

$$
\begin{cases}
\dot{p}-aqr = \mu(1-a)qr-\rho\nu^{-1}DA^{-1}a(1-a)pr^2;\\
\dot{q}+apr = \mu(1-a)apr-\rho\nu^{-1}DA^{-1}a(1-a)qr^2;\\
\dot{r} = -\mu pq+\rho\nu^{-1}DC^{-1}a\left(p^2+q^2\right)r,
\end{cases}
\tag{2}
$$

где $a=(A-C)A^{-1}$. Примем, что величина $\rho\nu^{-1}D$ имеет тот же порядок малости, что и μ. Тогда $\rho\nu^{-1}D=\mu b$, где b – ограниченная постоянная порядка 1. После преобразований уравнения (2) примут вид:

$$
\begin{cases}
\dot{p}-aqr = \mu(1-a)\left[qr-bA^{-1}apr^2\right];\\
\dot{q}+apr = \mu(1-a)a\left[pr-bA^{-1}qr^2\right];\\
\dot{r} = \mu\left[-pq+bC^{-1}a\left(p^2+q^2\right)r\right].
\end{cases}
\tag{3}
$$

В силу существенной нелинейности системы (3) получение её точного аналитического решения в привычных функциях пока невозможно. Однако, наличие малого параметра и структура уравнений системы позволяют применить асимптотические методы [9] для получения приближенных аналитических решений.

2 Метод Пуанкаре

Решим систему дифференциальных уравнений (3) методом малого параметра Пуанкаре [9]. Для этого аппроксимируем точные решения для проекций угловой скорости рядами по степеням малого параметра:

$$p=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i p_i,\ \ q=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i q_i,\ \ r=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i r_i\ . \tag{4}$$

Так как при составлении уравнений движения были отброшены слагаемые, порядок малости которых выше первого, то для приближенного решения системы ограничимся в (4) только двумя первыми слагаемыми:

$$\begin{cases} p\approx p_0+\mu p_1; \\ q\approx q_0+\mu q_1; \\ r\approx r_0+\mu r_1. \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим системы для коэффициентов разложения (5). Для нулевой степени малого параметра система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot p_0-aq_0r_0=0; \\ \dot q_0+ap_0r_0=0; \\ \dot r_0=0, \end{cases} \tag{6}$$

решение которой:

$$\begin{cases} p_0=p(0)\cos kt+q(0)\sin kt; \\ q_0=q(0)\cos kt-p(0)\sin kt; \\ r_0=r(0), \end{cases} \tag{7}$$

где $k=ar(0)$. Для множителей малого параметра в первой степени система примет вид:

$$\begin{cases} \dot p_1-kq_1=aq_0r_1+(1-a)\left(q_0r_0-bA^{-1}ap_0r_0\right); \\ \dot q_1+kp_1=-ap_0r_1+(1-a)a\left(p_0r_0-bA^{-1}q_0r_0\right); \\ \dot r_1=-p_0q_0+bC^{-1}a\left(p_0{}^2+q_0{}^2\right)r_0. \end{cases} \tag{8}$$

Третье уравнение системы (8) в силу решений (7) примет вид:

$$\dot r_1=-p(0)q(0)\cos 2kt+\frac{1}{2}\left(q^2(0)-p^2(0)\right)\sin 2kt+\frac{ab}{C}\left(p^2(0)+q^2(0)\right)r(0). \tag{9}$$

Если ввести замену $abC^{-1}\left(p^2(0)+q^2(0)\right)r(0)=g$ и учесть, что для первых поправок начальные условия нулевые, то получим решение уравнения (9) в виде:

$$r_1=\left[\left(q^2(0)-p^2(0)\right)(1-\cos 2kt)+4kgt-2p(0)q(0)\sin 2kt\right]\Big/4k\,. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в первые два уравнения системы (8), получим систему двух линейных неоднородных дифференциальных уравнения, которая также имеет аналитическое решение для $p_1(t)$ и $q_1(t)$. Однако, громоздкость этих решений не позволяет привести их в данной работе.

Таким образом, приближенное аналитическое решение динамических уравнений движения (3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} p=p(0)\cos kt+q(0)\sin kt+\mu p_1(t); \\ q=q(0)\cos kt-p(0)\sin kt+\mu q_1(t); \\ r=r(0)+\mu\left[\left(q^2(0)-p^2(0)\right)(1-\cos 2kt)+4kgt-2p(0)q(0)\sin 2kt\right]\Big/4k, \end{cases} \qquad (11)$$

где $p_1(t)$ и $q_1(t)$ — известные функции.

На рисунках 1-3 представлены графики зависимостей проекций угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат от времени, полученные численным интегрированием системы (3) и приближенным асимптотическим методом (11).

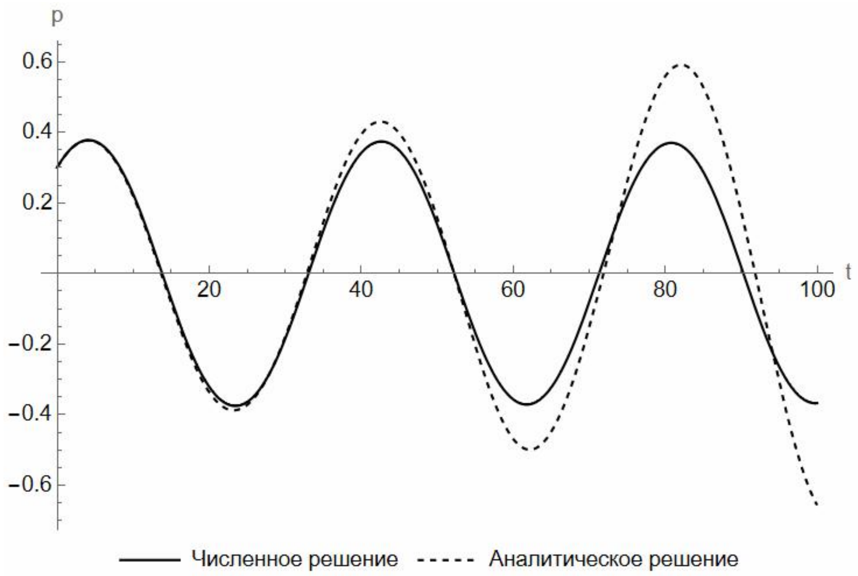

Рис. 1. Зависимость проекции угловой скорости $p(t)$ от времени

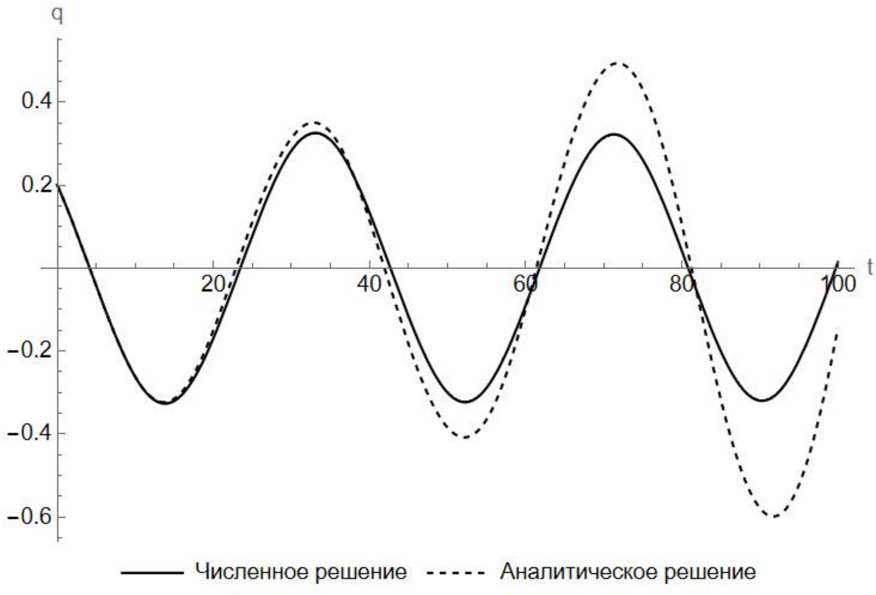

Рис. 2. Зависимость проекции угловой скорости $q(t)$ от времени

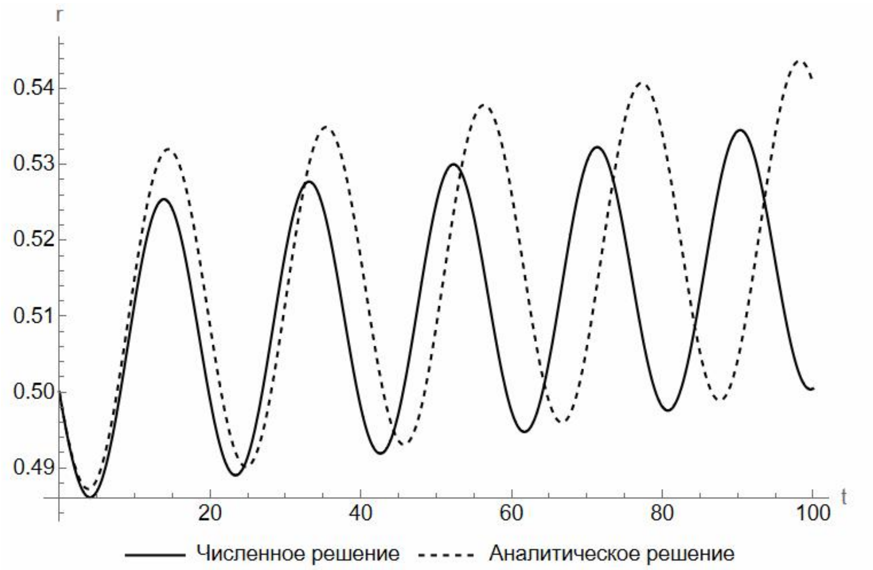

Рис. 3. Зависимость проекции угловой скорости $r(t)$ от времени

При построении графиков использованы следующие значения параметров системы: $A=10$, $C=7$, $\rho=1000$, $\nu=100000$, $D=5$, $\mu=0{,}1$.

Приближенное аналитическое решение достаточно близко к численному на начальном этапе движения, что соответствует методу Пуанкаре. Согласно методу, отклонение решения от точного порядка малого параметра μ сохраняется на интервале времени порядка μ^{-1}, то есть, для данного примера, до 10 секунды. Графики показывают, что такая точность сохраняется на гораздо большем интервале времени (до 50 секунды). Для увеличения точности необходимо увеличивать количество слагаемых разложений (5), но в этом случае стоит учитывать слагаемые более высоких порядков малости при составлении исходных уравнений.

3 Анализ точности решений

Для анализа точности будем определять погрешность полученных решений, как квадрат площади между графиками численного и аналитического решений. Для угловой скорости r формула для вычисления погрешности примет вид:

$$S_r = \int_0^{t_k} \left(r_{числ}(t) - r_{асимпт}(t) \right)^2 dt , \tag{12}$$

где $r_{числ}(t)$ — зависимость проекции угловой скорости от времени, полученная численным методом, $r_{асимпт}(t)$ — зависимость, полученная методом Пуанкаре.

На рисунке 4 приведены два графика зависимости погрешности от величины малого параметра: для порождающего решения (7) и для приближенного решения методом Пуанкаре (11).

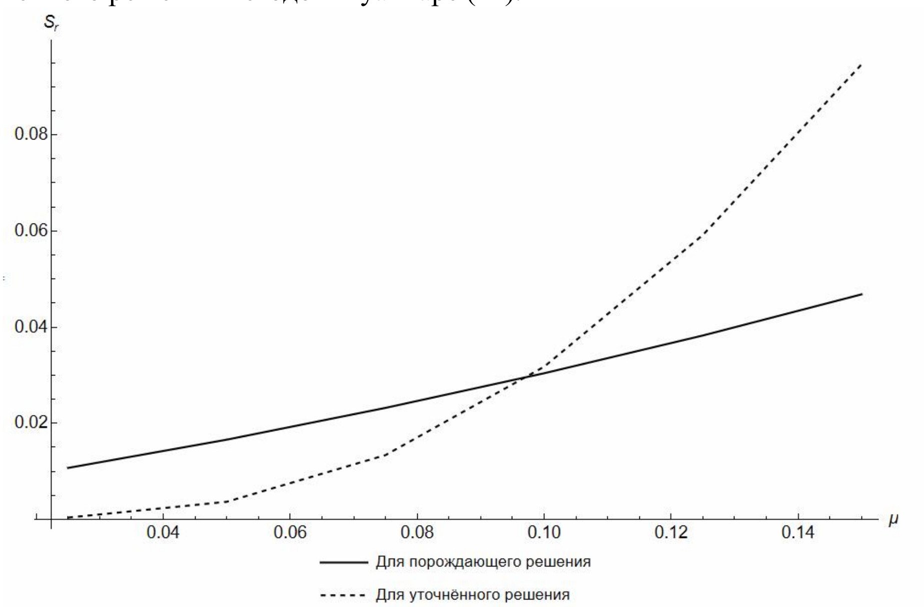

Рис. 4. Погрешность аналитических решений для параметра r

Естественно, наблюдается рост погрешности при увеличении малого параметра. Однако, интересным результатом стало то, что при превышении некоторого значения малого параметра решение порождающей системы ближе к численному чем решение методом Пуанкаре, ограниченное первой степенью малого параметра. Конечно, для более полного анализа, необходимо учитывать величину интервала, на котором получены решения и вычисляется погрешность: со временем решение первой степени расходится, а порождающее является гармоническим.

Заключение

В результате выполнения работы приведена математическая модель движения относительно неподвижной точки твердого тела произвольной формы с полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости (1). Данная модель представлена динамическими уравнениями и адаптирована для случая малой динамической асимметрии тела (3). При этом введено допущение об одинаковом порядке малости параметров, характеризующих динамическую асимметрию и большую вязкость жидкости. С помощью метода Пуанкаре получено приближенное аналитическое решение системы (3) для компонент угловой скорости в связанной системе координат (11). Произведено сравнение аналитического решения с численным при помощи графиков и вычисления параметра, характеризующего погрешность (12). Несмотря на приближенность полученных решений, в отличие от точных решений, полученных в [8], они имеют более широкий спектр применения ввиду более общего случая динамической асимметрии твердого тела.

Литература

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. Москва: Гостехиздат, 1949. 139 с.

2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Москва: Наука, 1965. 439 с.

3. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. Москва: Изд-во Ижевского ин-та компьютерных исследований, 2015. 308 с.

4. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. Москва: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. 250 с.

5. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Прикладная математика и теоретическая физика. 1960. № 3. С. 65–75.

6. Возмущенные и управляемые движения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. Одесса: Изд-во Одесского национ. ун-та им. И. И. Мечникова, 2013. 288 с.

7. Алексеев А. В., Дорошин А. В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Полет. 2007. № 9. С. 26–33.

8. Алексеев А. В. Аналитическое решение динамических уравнений движения твердого тела с жидкостью большой вязкости // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 30–37.

9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва: Наука, 1969. 380 с.

10. Зубов А. В., Стрекопытова О. С., Стрекопытов С. А. Метод малого параметра А. Пуанкаре // Вестник Мордовского университета. 2012. Т. 22, № 2. С. 38–40.

11. Тимофеева Т. Ю. Метод малого параметра в нелинейных колебаниях // Современные проблемы науки и образования. 2009. № 3-2. С. 133–135.

Статья поступила в редакцию 01.09.2023; одобрена после рецензирования 13.09.2023; принята к публикации 27.09.2023.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF DYNAMICALLY ASYMMETRIC BODY WITH A VISCOSITY LIQUID

Aleksey V. Alekseev
Cand. Sci. (Engineering), A/Prof,
Department of Theoretical Mechanics
Samara National Research University
34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia

Evgeniy A. Lutsenko
Student,
Samara National Research University
34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia

Abstract. A mathematical model of the motion of a solid body of arbitrary shape with a spherical cavity relative to a fixed point is studied. The cavity is entirely filled with a fluid of high viscosity. The dynamic equations of motion are constructed by the method proposed by F. L. Chernousko, based on the application of the theorem on the change of kinetic momentum. The equations of motion are transformed taking into account the small dynamic asymmetry of the solid body. It is assumed that the small parameters characterising large viscosity and small asymmetry are of the same order. For the described case, numerical and approximate analytical dependences of the components of the angular velocity of a solid body in the associated reference frame on time by the Poincaré method are obtained, and the corresponding graphs are plotted. The accuracy of the approximate solutions has been evaluated, as well as the influence of the value of a small parameter on the error. Approximate analytical dependences allow us to study the influence of system parameters on the dynamics of motion. Practical application can be the use of the obtained results in the study of the motion of spacecraft with liquid propellant reserve on board.

Keywords: mathematical model, solid body, kinetic moment, dynamic asymmetry, small parameter, fluid, viscosity, moment of inertia, analytical solution, Poincaré method.

For citation
Alekseev A. V., Lutsenko E. A. Approximate Solution of the Equations of Motion of Dynamically Asymmetric Body With a Viscosity Liquid // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 3. P. 53–61.

The article was submitted 01.09.2023; approved after reviewing 13.09.2023; accepted for publication 27.09.2023.