Научная статья

УДК 531.1, 515.1
DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-62-69

ОБ УСЛОВИЯХ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СТЕКЛОВА — БОБЫЛЕВА

© Новиков Михаил Алексеевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

Аннотация. В статье проведено изучение одного ранее известного соотношения на моменты инерции твердого тела $B = 2A$ для существования частных интегралов Стеклова — Бобылева. Получение соотношения на моменты инерции опирается на возможность построения дополнительных частных интегралов и некоторых вещественных решений дифференциальных уравнений движения. Нахождение указанных интегралов основано на получении наиболее общих нетривиальных решений уравнений движения тела при обращении в нуль правой части дифференциального уравнения для $\dot{q} = 0$. В одном частном случае существования таких решений получено требование $A \neq B$, согласовывающееся с приведенным известным соотношением. Дополнительно набор частных интегралов Стеклова — Бобылева может быть из условия $B \neq C$.

Установлено соотношение на количество возможных дополнительных первых интегралов в зависимости от значений моментов инерции тела. Наибольшее количество дополнительных интегралов, в том числе два из них Стеклова — Бобылева, возможно при всех различных моментах инерции. Такое же число дополнительных интегралов может быть для динамически симметричного твердого тела с только двумя равными моментами инерции, у которого центр масс смещен относительно начала координат по оси симметрии. В этом случае участвует общий интеграл Лагранжа. Для других случаев симметрии с только двумя равными моментами инерции, где смещение центра масс относительно начала координат осуществляется не по оси симметрии, допускается только один из интегралов Стеклова — Бобылева. В случае шара не существуют частные интегралы Стеклова — Бобылева и дополнительно участвует только общий интеграл Лагранжа.

Ключевые слова: частный интеграл, первый интеграл, эллиптический интеграл, решение уравнений движения.

Для цитирования
Новиков М. А. Об условиях для существования частных интегралов Стеклова — Бобылева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 3. С. 62–69.

Введение

Издавна важный научный интерес представляют механические автономные консервативные системы, описывающие вращение твердого тела вокруг неподвижной точки [1-4]. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки записываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B-C)qr + Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C-A)rp + Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A-B)pq + Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ, направленную вертикально вниз (углы Пуассона).

Для системы (1) известны три общих интеграла [4]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = c_0 = const \quad \text{(интеграл энергии)},$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_1 = c_1 = const \quad \text{(интеграл кинетического момента)},$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad \text{(интеграл Пуассона)}.$$

В [4] приведено существование дополнительных частных интегралов Стеклова — Бобылева для системы (1) при заданных значениях

$$x_0 = 0;\ z_0 = 0;\ B = 2A. \tag{2}$$

Первые два равенства (2) сомнения не вызывают: как отмечено в [4], они выражают условие существования однозначных интегралов. В последнем условии $B = 2A$ содержится неопределенность:

1. по необъяснимым причинам не имеется дополнительных ограничений на момент инерции C,
2. в ранее известных случаях существования дополнительных первых интегралов конкретные значения B/A и C/A участвуют в построении первых интегралов.

Поэтому задача здесь состоит в выяснении соотношений между моментами инерции твердого тела в системе (1) при условиях (2).

1 Об известных решениях и первых интегралах

Введем для краткости обозначения $x = (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)'$ — фазовые переменные, $m = M\,g\,y_0 / A,\ k_1 = B/A,\ k_2 = C/A \quad (m \neq 0, k_1 > 0, \quad k_2 > 0)$. Тогда система (1) запишется:

$$\begin{cases} \dot{p} = (k_1 - k_2)qr + m\gamma_3, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{q} = (k_2 - 1)rp / k_1, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = [(1-k_1)pq - m\gamma_1] / k_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

В [4] предложен практичный способ получения нетривиальных частных решений системы (1.1), состоящий в обращении в нуль выражения для $\dot{q}$. В заданной форме для получения таких решений предоставляется три возможности: $1.\, r=0;\quad 2.\, p=0;\quad 3.\, k_2=1$.

Во всех перечисленных случаях имеется общий интеграл

$$V_3(x)=q=q_0=const\ .$$

В первом случае, когда $r\equiv 0$, выполняется так же $\dot{r}=0$. Фактически это задает частный интеграл

$$V_{41}(x)=r=0\ .$$

В выражении для $\dot{r}=0$ системы (1.1) можно рассмотреть две ситуации:

$$1)\ k_1\neq 1;\quad 2)\ k_1=1\ .$$

Для первой ситуации при $q_0\neq 0$ находится $p=\dfrac{m\gamma_1}{(1-k_1)\,q_0}$. Из системы (1.1) для выражений $\dot{\gamma}_1=-q_0\gamma_3$ и $\dot{\gamma}_2=p\gamma_3$ можно составить дифференциальное равенство $m\,\gamma_1\,\dot{\gamma}_1+(1-k_1)\,q_0^2\,\dot{\gamma}_2=0$.

Интегрированием последнего выражения получается общий интеграл

$$V_{42}(x)=m\gamma_1^2+2(1-k_1)q_0^2\,\gamma_2=c_4=const\ . \qquad (1.2)$$

Таким образом, к изучаемому частному интегралу $V_{41}(x)=r=0$ системы (1.1) относится набор первых интегралов:
$V_3(x)=q=q_0=const\ \ (q_0\neq 0);\ V_{42}(x)=m\gamma_1^2+2\,(1-k_1)\,q_0^2\,\gamma_2=const$.

Такой дополнительный набор первых интегралов позволяет составить частные решения системы (1.1) даже без интегрирующего множителя [3-4]. Для этого из общего интеграла Стеклова — Бобылева (1.2) по схеме [4] при соответствующей константе интегрирования c_4 можно выразить $\gamma_2=\dfrac{m\gamma_1^2-c_4}{2\,(1-k_1)\,q_0^2}$. Далее из интеграла Пуассона находится

$$\gamma_3=\pm\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2(\gamma_1)}=\pm\frac{1}{2\,(k_1-1)\,q_0^2}\sqrt{\phi_1(\gamma_1)}\ ,$$

где $\phi_1=-m^2\,\gamma_1^4+2\gamma_1^2\,[m\,c_4-2(k_1-1)^2\,q_0^4]+4(k_1-1)^2\,q_0^4-c_4^2$.

Тогда выражение для $\dot{\gamma}_1$ системы (1.1) будет таким

$$2(k_1-1)\,q_0\,\dot{\gamma}_1\pm\sqrt{\phi_1(\gamma_1)}=0\ .$$

Разделение переменных в последнем дифференциальном уравнении приводит к эллиптическому интегралу

$$m(t-t_0)=\pm(k_1-1)\,q_0\int\frac{d(\gamma_1^2)}{\sqrt{M_1(\gamma_1^2)}}\ , \qquad (1.3)$$

где $M_1(\gamma_1^2)=\gamma_1^2\{-[m\gamma_1^2-(mc_4-2(k_1-1)^2q_0^4)/m]^2+$

$$+\frac{4q_0^4(k_1-1)^2}{m^2}[m^2-mc_4+(k_1-1)^2q_0^4]\}\,.$$

Обратная к переменной t функция из (1.3) запишется $\gamma_1 = F_1(t-t_0)$, обращающаяся в нуль при $t=t_0$. Окончательно, частные решения при $k_1 \neq 1, q_0 \neq 0$ в первом случае имеют вид:

$$(A.1)\ p=\frac{mF_1(t-t_0)}{(1-k_1)q_0};q=q_0\neq 0\,(\textit{параметр});\,r=0;\gamma_1=F_1(t-t_0);$$

$$\gamma_2=\frac{mF_1^2(t-t_0)-c_4}{2(k_1-1)q_0^2};\gamma_3=\pm\sqrt{1-F_1^2(t-t_0)-\gamma_2^2(\gamma_1)}\,.$$

Выбор допустимых значений константы интегрирования c_4 производится из условий $|\gamma_i|\leq 1$ $(i=1,2,3)$ и существования вещественных решений эллиптического интеграла (1.3): $m^2-mc_4+(k_1-1)^2\,q_0^4>0$. Множество допустимых значений c_4 задается интервалом (L_1,L_2), где его границы зависят от m и q_0. При $m>0$ область является такой

$$-2q_0^2|k_1-1|<L_1<L_2<\min[m+2|k_1-1|q_0^2,m+\frac{(k_1-1)^2\,q_0^4}{m}]\,.$$

При $m<0$ границы области имеют вид

$$\max[m-2|k_1-1|q_0^2,m+\frac{(k_1-1)^2\,q_0^4}{m}]<L_1<L_2<2|k_1-1|q_0^2\,.$$

В другой ситуации при $k_1=1$ удается составить частные решения системы (1.1):

$(A.2)$ $p=\pm\sqrt{2m\gamma_2+c_0}; q=q_0=0; r=0; \gamma_1=0; \gamma_2 - \textit{параметр}$ $(|\gamma_2|\leq 1)$;

$\gamma_3=\pm\sqrt{1-\gamma_2^2}; c_0 - \textit{константа интегрирования}$.

$(A.3)$ $p=0; q=q_0=const; r=0; \gamma_1=0; \gamma_2=\pm 1; \gamma_3=0$.

В последнем частном решении допускается $q_0=0$. Отсюда видно, что дополнительный частный интеграл Стеклова — Бобылева $V_{42}(x)=const$ возможен только при значениях $k_1\neq 1; q_0\neq 0$. Отметим, что здесь допускаются осевые симметрии при $k_1=1$ или $k_1=k_2$. При $F_1(t-t_0)=0; q_0\neq 0; \gamma_2=1$ решение $(A.1)$ формально совпадает с $(A.3)$ при $\left|c_4=2|k_1-1|q_0^2\right|$.

Во втором случае частных решений системы (1.1) при $p=0$, как и в предыдущем случае существует частный интеграл $V_{51}(x)=p=0$. Опуская выкладки так же при $k_1\neq k_2, q_0\neq 0$ дополнительно имеет место другой общий интеграл

$$V_{52}(x)=m\gamma_3^2-2(k_1-k_2)q_0^2\gamma_2=c_5=const\,. \tag{1.4}$$

Константа интегрирования c_5 здесь имеет соответствующие допустимые значения, подобно предыдущему случаю для c_4. Неавтономный интеграл строится из уравнений $\dot{\gamma}_2$ и $\dot{\gamma}_3$ системы (1.1) и сводится к эллиптическому интегралу вида

$$m(t-t_0) = \pm(k_1-1)\,q_0 \int \frac{d(\gamma_3^2)}{\sqrt{M_2(\gamma_3^2)}} \ , \qquad (1.5)$$

где $M_2(\gamma_3^2) = \gamma_3^2\{-[m\gamma_3^2 - (mc_5 - 2(k_1-k_2)^2 q_0^4)/m]^2 +$

$$+\frac{4q_0^4(k_1-k_2)^2}{m^2}[m^2 - mc_5 + (k_1-k_2)^2 q_0^4]\} .$$

Обратная к времени t функция здесь имеет вид $\gamma_3 = F_2(t-t_0)$, обращающаяся в нуль при $t = t_0$.

Частные решения при $k_1 \neq k_2, q_0 \neq 0$ в этом случае аналогично имеют вид:

$(B.1)\ p = 0; q = q_0 \neq 0\ (параметр);$

$$r = \frac{m F_2(t-t_0)}{(k_2-k_1)}; \gamma_1 = \pm\sqrt{1 - F_2^2(t-t_0) - \gamma_2^2(t)};$$

$$\gamma_2 = \frac{m F_2^2(t-t_0) - c_5}{2(k_1-k_2)\,q_0^2}; \gamma_3 = F_2(t-t_0) .$$

При $k_1 = k_2$ интегралы вида (1.4) не существуют, но тогда возможны решения в элементарных функциях:

$$(B.2)\ p = 0; q = q_0 = 0; r = \pm\sqrt{\frac{2m\gamma_2 + c_{00}}{k_2}}; \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}; \gamma_2 - параметр$$

$(|\gamma_2 \leq 1); \quad |\gamma_3 = 0; c_{00} - константа\ \ интегрирования .$

$(B.3)\ p = 0; q = q_0 = const; r = 0; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = \pm 1; \gamma_3 = 0 .$

Последнее частное решение совпадает с $(A.3)$, и так же допускается $q_0 = 0$.

Здесь частный интеграл (1.4) существует только в предположении $k_1 \neq k_2, q_0 \neq 0$. При этом возможны осевые симметрии твердого тела при $k_1 = 1$ и $k_2 = 1$ в отдельности, но $k_1 \neq k_2$.

При $F_2(t-t_0) = 0, \cancel{q_0} \neq 0, \gamma_2 = \pm 1$ решения $(B.1)$ для (γ_3, r) получаются такие же, как и $(A.1)$ для (γ_1, p).

В последнем случае при $k_2 = 1$ могут допускаться частные решения видов $(A.1)$ и $(B.1)$ системы (1.1). Для них в отдельности возможны частные интегралы Стеклова — Бобылева видов (1.2) и (1.4). Одновременное их выполнение приводит решения к положению:

$$p = 0; q = q_0 = const; r = 0; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = \pm 1; \gamma_3 = 0 .$$

При $q_0 = 0$ оно является состоянием покоя.

Можно видеть, что при $k_2 = 1$ для эллиптических интегралов (1.3) и (1.5) получается $F_1(t-t_0) = F_2(t-t_0)$, и при этом решения $(A.1)$ и $(B.1)$ одинаковы с точностью до перестановки объектов (p,γ_1) и (r,γ_3).

Самый общий случай возможных решений содержится при $p \neq 0; r \neq 0; k_2 \neq 1$. Здесь не обязательно $\dot{q}$ обращается в нуль, но в частности возможны и решения $(A.1)$ и $(B.1)$.

Окончательно для существования в системе (1.1) двух частных интегралов Стеклова — Бобылева видов (1.2) и (1.4) соответственно необходимо выполнение для моментов инерции:

$$B \neq A; B \neq C\ . \tag{1.6}$$

Такое соотношение на моменты инерции не совсем очевидно: в других случаях существования четвертого интеграла, таких как интеграл Лагранжа, Ковалевской, Горячева — Чаплыгина, дополнительный интеграл имеет место только в случае совпадения хотя бы двух моментов инерции. А здесь возникает иная ситуация, когда дополнительные автономные интегралы могут существует и для несимметричного твердого тела.

Условимся называть выражения $V_{42}(x) = m\gamma_1^2 + 2(1-k_1)q_0^2\gamma_2 = const$ и $V_{52}(x) = m\gamma_3^2 + 2(k_2-k_1)q_0^2\gamma_2 = const$ частными интегралами Стеклова — Бобылева, так как они не всегда выполняются, а только при определенных обстоятельствах. Хотя $V_3 = q = const$, $V_{42}(x) = m\gamma_1^2 + 2(1-k_1)q_0^2\gamma_2 = const$ записываются с константами интегрирования, тем не менее они считаются частными как существующими только при $r = 0, B \neq C$. Несомненно система (1.1) имеет более общие решения и при $r \neq 0$, что видно хотя бы на решениях $(B.1)$ и $(B.2)$. Поэтому совокупность $V_3(x) = const, V_{41}(x) = r = 0, V_{42}(x) = const$ составляет один набор частных интегралов. При этом частный интеграл $V_3(x) = const$ рассматривается дополнительным.

Точно так же совокупность $V_3(x) = const, V_{51}(x) = p = 0, V_{52}(x) = const$ составляет второй набор частных интегралов.

В ситуации $A = C$ не зависимо от фазовых переменных из уравнения $\dot{q} = 0$ следует общий интеграл $V_3 = q = const$. По существу он относится к общему случаю интегрирования Лагранжа [1-4], только записанным в других осях.

Изучим далее вопрос о существовании возможно большего количества допустимых первых интегралов в зависимости от динамических характеристик твердого тела. При $A \neq B \neq C, A \neq C$ для несимметричного твердого тела еще могут допускаться дополнительные интегралы $V_3(x) = const, V_{41}(x) = r = 0, V_{42}(x) = const$. При тех же условиях могут возникать дополнительные интегралы $V_{51}(x) = p = 0, V_{52}(x) = const$.

В совокупности они составляют решение $(A.3)$ или эквивалентное ему $(B.3)$. В общей сумме наибольшее число дополнительных интегралов достигает пяти.

Далее рассмотрим твердое тело, имеющее динамическую симметрии. При $B = C \neq A$, как ранее упоминалось, не может существовать интеграл вида (1.2). Но в этом случае могут участвовать остальные дополнительные интегралы: $V_3(x) = const, V_{51}(x) = p = 0, V_{52}(x) = const$. Тогда наибольшее число дополнительных интегралов будет менее пяти.

Аналогично при $B = A \neq C$ не участвует частный интеграл Стеклова-Бобылева вида (1.4), и наибольшее количество дополнительных интегралов будет как в предыдущем случае, равно четырем.

При $A = C \neq B$ вместе с общим интегралом Лагранжа $V_3 = q = const$ могут допускаться возможные частные интегралы:
$V_{41}(x) = r = 0, V_{42}(x) = const$, и так же $V_{51}(x) = r = 0, V_{52}(x) = const$, и даже одновременно. Следовательно, в этом случае возможно наибольшее число дополнительных интегралов, равное пяти.

Легко показать для шара при $A = B = C$ существование только общего интеграла Лагранжа $V_3 = q = const$, а частные интегралы Стеклова-Бобылева не принимают участия.

Заключение

Проведенный анализ показал, что достаточным условием существования хотя бы одного из частных интегралов Стеклова — Бобылева в твердом теле является выполнение хотя бы одного из (1.6). Приведенное в [4] соотношение $B = 2A$ является приемлемым для существования хотя бы одного из частных интегралов. При условии (1.6) возможны дополнительные частные интегралы Стеклова — Бобылева.

Наибольшее возможное число дополнительных интегралов, в том числе два из них Стеклова — Бобылева, допускается для несимметричного твердого тела, а также для динамически симметричного тела, у которого центр масс смещен относительно начала координат вдоль оси симметрии. Для динамически симметричного твердого тела, имеющего смещение центра масс относительно начала координат не по оси симметрии, число дополнительных интегралов будет меньшим, притом только один из них будет частным интегралом Стеклова — Бобылева. Наименьшее число возможных дополнительных интегралов возникает для шара, где нет частных интегралов Стеклова — Бобылева.

Литература

1. Аппель П. Теоретическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 487 с.
2. Парс Л. А. Аналитическая динамика. Москва: Наука, 1971. 635 с.
3. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1999. 584 с.

4. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.

Статья поступила в редакцию 05.09.2023; одобрена после рецензирования 18.09.2023; принята к публикации 27.09.2023.

ON THE CONDITIONS OF EXISTENCE
OF STEKLOV-BOBYLEV PARTIAL INTEGRALS

Mikhail A. Novickov
Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS)
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia
nma@icc.ru

Abstract. The paper describes the results of investigation of one earlier known relationship regarding the inertia moments of the rigid body $B = 2A$ for the case of existence of the Steklov-Bobylev partial integrals. Obtaining of the relation for inertia moments relies on the possibility of constructing additional partial integrals and some real solutions of the differential equations of motion. Obtaining the integrals indicated is based on obtaining the most general nontrivial solutions of equations of motion for a body in case vanishing of the right-hand side of the differential equation for $\dot{q} = 0$. In one particular case of existence of such solutions, the requirement of $A \neq B$, which is consistent with the known relationship given above, has been obtained. Indeed, the set of partial Steklov-Bobylev integrals may be derived from the condition $B \neq C$.

The relationship for the number of possible additional first integrals depending on the values of the body's inertia moments has been obtained. The largest number of additional integrals, while including two Steklov-Bobylev integrals, is possible for all various inertia moments. The same number of additional integrals may exists for a dynamically symmetric rigid body having only two equal inertia moments, whose mass center is displaced with respect to the origin on the symmetry axis. In this case, the general Lagrange integral participates. As far as other cases of symmetry with only two equal inertia moments are concerned, for which displacement of the mass center with respect to the origin is realized not along the symmetry axis, only one of the Steklov-Bobylev integrals is admissible. In the case of sphere, the partial Steklov-Bobylev integrals do not exist, and only the general Lagrange integral may additionally participate.

Keywords: partial integral, first integral, elliptic integral, solution of equations of motion.

For citation

Novickov M. A. On the Conditions of Existence of Steklov-Bobylev Partial Integrals // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 3. P. 62–69.

The article was submitted 05.09.2023; approved after reviewing 18.09.2023; accepted for publication 27.09.2023.