

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Научная статья

УДК 51-72

DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-90-98

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТЫХ ТЕЛАХ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

© **Абидуев Пурбо Ламажапович**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
ap1087@yandex.ru

© **Дармаев Тумэн Гомбоцыренович**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
dtumen@mail.ru

© **Анахин Владимир Дмитриевич**

доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
ap1087@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается распространение температурных полей в слоистых телах цилиндрической формы, внутренняя стенка которых подвергается воздействию мощных тепловых ударов с очень высоким градиентом по времени, в то время как внешняя поверхность поддерживается при постоянной температуре. В подобных камерах может производиться, например, обработка деталей с помощью теплового удара. Получены приближенные выражения для температурных полей с достаточной высокой степенью точности, пригодные для малых значений времени, где имеет место наиболее высокие значения температур при подобных нагружениях, и очень удобные для практического использования. Как известно, температурные напряжения представляют собой наибольшую опасность для прочности таких толстостенных сосудов. Проводятся сопоставления с решениями для температурных полей, полученных классическим путем.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, начальные и граничные условия, плоскость изображений по Лапласу, функции Бесселя, однослойный, двухслойный цилиндры, тепловой поток.

Для цитирования

Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г., Анахин В. Д. Моделирование температурных полей в слоистых телах при малых значениях времени // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 3. С. 90–98.

Введение

Классические решения задач теплопроводности получаются, как правило, в виде суммы плохосходящихся рядов по собственным функциям задачи. Они очень неудобны для практического применения при малых значениях времени из-за медленной сходимости рядов, представляющих решение. Это неудобство особенно сильно проявляется при определении максимальных значений температуры, которые реализуются на коротком временном интервале при импульсном воздействии теплового потока на поверхности. Целью является определение приближенного поля температур при небольших значениях времени и удобным для практического применения. Для этого, после перехода в плоскость изображений по Лапласу, изображения разлагаются в быстросходящийся ряд, и далее в разложении удерживают первый член. Переходя далее в плоскость оригинала, получают поле температур при небольших значениях времени. Для случая однослойного цилиндра удалось получить простые аналитические выражения. В общем случае, применяется численное обращение полученных изображений. Для этого используется эффективная модификация численного метода отыскания оригинала, предложенного А.Популисом. Модификация позволяет повысить точность вычислений, а также улучшить сходимость полученного ряда. Для определения поля температур при небольших значениях времени, получается ряд, состоящий из семи членов.

Подобные задачи были рассмотрены в работах [1, 2, 3]. В работах [1, 2] для определения нестационарного трехмерного температурного поля в k -слойном цилиндре. используется следующий подход: сначала с помощью метода конечных интегральных преобразований исключаются дифференциальные операции по продольной координате, а затем полученное уравнение в изображениях решается методом Фурье (разделения переменных), что позволяет свести определение временной зависимости температуры к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

В работе [3] для определения температурного поля в изделии цилиндрической формы при несимметричном конвективно-радиационном теплообмене поверхностей. на основе стандартной функции `pde3` в среде `matlab` была разработана программа, позволяющая по заданным теплофизическим характеристикам материала и параметрам конвективно-радиационного теплообмена моделировать температурное поле в изделии.

В работе [4] описываются температурные поля при оплавлении заусениц в камерах для термодинамической обработки материалов, возникающих при термоимпульсной детонации горючими смесями.

Температурные поля на полусферических поверхностях контактных устройств были рассчитаны численным методом в работе [5].

В работе [6] были получены температурные поля в двухслойной пластине, подверженной воздействию теплового потока на одной из поверхностей.

В работе [7] получены асимптотические выражения для периодических температурных полей на больших значениях времени.

Вывод основных уравнений

Поля температур в стенках двухслойных цилиндрических сосудов определяются системой уравнений теплопроводности:

(В дальнейшем для простоты полые двухслойные цилиндрические сосуды будем обозначать камерой).

$$\frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r}, \quad i=1,2 \quad (1)$$

при начальных условиях:

$$t_i(r, 0) = 0, \quad i=1,2 \quad (2)$$

и условиях на поверхностях:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial t_1(r_0, \tau)}{\partial r} &= -Q(\tau), \quad t_2(R_2, \tau) = 0, \\ \chi_1 \frac{\partial t_1(R_1 - 0, \tau)}{\partial r} &= \chi_2 \frac{\partial t_2(R_1 + 0, \tau)}{\partial r}, \quad t_1(R_1 - 0, \tau) = t_2(R_1 + 0, \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь r_0 , R_2 — внутренний и внешний радиусы камеры, R_1 — радиус границы сопряжения слоев, где соблюдаются условия идеального теплового контакта (3).

$$Q(\tau) = Q_1(1 - \theta)e^{-k_1\sqrt{\tau}} + Q_2e^{-k_2\tau} \quad (4)$$

— заданный тепловой поток на внутренней поверхности. Q_1 , Q_2 , k_1 , k_2 — постоянные, зависящие от геометрических размеров камеры, состава газовой смеси, а также от величины начального давления. Первое слагаемое, которое вносит основной вклад в величину теплового потока (около 90%), описывает передачу тепла к стенкам камеры за счет конвекции и естественного излучения, второе слагаемое характеризует перенос тепла за счет вынужденных конвективных потоков, порожденных ударными волнами.

Внешняя поверхность поддерживается при постоянной температуре. $\chi_i, a_i, i = 1, 2$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности первого и второго слоев.

Общее решение систем уравнений теплопроводности в плоскости изображений по Лапласу выглядит следующим образом:

$$\bar{t}_i(r, p) = C_{i1}I_0(q_i r) + C_{i2}K_0(q_i r), \quad i = 1, 2,$$

где p — переменная Лапласа, $q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$, I_0 , K_0 — модифицированные функции Бесселя. Постоянные C_{i1}, C_{i2} определяются из граничных усло-

вий (3) и условий сопряжения слоев после применения к ним преобразования Лапласа.

Асимптотические разложения модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргументов q_i, r , которым в плоскости оригиналов соответствуют малые значения времени, имеют вид:

$$I_n(q_i r) = \frac{e^{q_i r}}{\sqrt{2\pi q_i r}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{1! 8q_i r} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8q_i r)^2} - \dots - \right],$$

$$K_n(q_i r) = \sqrt{\frac{\pi}{2q_i r}} e^{q_i r} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{1! 8q_i r} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8q_i r)^2} + \dots + \right].$$

В этих разложениях, ограничиваясь только первым членом и принимая, что

$$e^{-2(q_1 h_1 + q_2 h_2)} \ll 1, \quad e^{-2q_2 h_2} \ll 1$$

получим после некоторых выкладок для изображений поля температур, в первом слое:

$$\bar{t}_1(r, p) = \frac{\overline{Q(p)}}{\chi_1 q_1} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left\{ \frac{\chi_+ e^{-q_1(r-r_0)} + e^{q_1(r-r_0)}}{\chi_+ - \chi_- e^{-2q_1 h_1} - e^{q_1(r-r_0)}} \right\} \quad (5)$$

где:

$$\chi_+ = \frac{\chi_1}{\varphi_1} + \frac{\chi_2}{\varphi_2}, \quad \chi_- = \frac{\chi_1}{\varphi_1} - \frac{\chi_2}{\varphi_2}$$

во втором слое:

$$\bar{t}_2(r, p) = \frac{2\overline{Q(p)}}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{-q_1 h_1} \left\{ \frac{e^{-q_2(r-R_1)} - e^{-q_2(2R_2 - R_1 - r)}}{\chi_+ - \chi_- e^{-2q_1 h_1}} \right\} \quad (6)$$

Здесь $\varphi_i^2 = a_i$, $i = 1, 2$; $\overline{Q(p)}$ — изображение теплового потока в плоскости Лапласа и имеет вид:

$$\overline{Q(p)} = Q_1(1 - \theta) \left(\frac{1}{p} - \sqrt{\pi} \frac{k_1}{2} \frac{1}{p\sqrt{p}} e^{\frac{k_1^2}{4p} \operatorname{erfc}\left(\frac{k_1}{2\sqrt{p}}\right)} \right) + Q_2 \frac{1}{p + k_2}. \quad (7)$$

Соответствующие оригиналы для изображений (5) и (6) представляют собой приближенные температурные поля в двухслойной камере при небольших значениях времени. Ввиду громоздкости изображений обращение осуществляется численно. Наилучшие результаты получаются при семи членах в формуле обращения. В этом случае алгоритм обращения имеет вид:

$$f(x) = \frac{64\sqrt{2} \ln 2}{\pi x} (-0,25F(3\sigma) + 10F(5\sigma) - 106F(7\sigma) + 448F(9\sigma) - 864F(11\sigma) + 768F(13\sigma) - 256F(15\sigma)), \quad (8)$$

где $\sigma = \frac{\ln \sqrt{2}}{x}$.

Для случая однослойной камеры ($a_1 = a_2, \chi_1 = \chi_2$) изображения поля температур принимают более простой вид:

$$\bar{t}(r, p) = \frac{\overline{Q(p)}}{\chi_1 q_1} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left\{ e^{-q_1(r-r_0)} + e^{-q_1(2k_0-r_0-r)} \right\}.$$

Здесь обозначено $k = \frac{R_2}{r_0}$.

Для изображений температуры внутренней поверхности ($r = r_0$) получим:

$$\bar{t}(r, p) = \frac{\overline{Q(p)}}{\chi_1 q_1}. \quad (9)$$

Для этого выражения удалось получить оригинал, который имеет вид:

$$t(r_0, \tau) = \frac{\sqrt{a_1}}{\chi_1} \left\{ Q_1(1-\theta) \left(2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \sqrt{\pi\tau} \left(I_1(k_1\sqrt{\tau}) - L_1(k_1\sqrt{\tau}) \right) \right) + Q_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-k_1\tau}}{\sqrt{k_1}} \int_0^{\sqrt{k_1\tau}} e^{u^2} du \right\}. \quad (10)$$

Здесь I_1 — модифицированная функция Бесселя первого рода, L_1 — модифицированная функция Струве.

Область применения полученных приближенных решений во временном интервале оценивается путем сравнения с результатами точного решения задачи.

Так, для оценки применимости формулы (10) были получены выражения для температуры в однослойном цилиндре при тех же начальных и граничных условиях:

$$t(r, \tau) = -r_0 \cdot \ln r \cdot Q(\tau) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \frac{I_1(\gamma_k r_0) - I_0(\gamma_k R_2)}{I_1^2(\gamma_k r_0) - I_0^2(\gamma_k R_2)} \cdot \left[-Y_0(\gamma_k R_2) \cdot I_0(\gamma_k r_0) + I_1(\gamma_k R_2) \cdot Y_0(\gamma_k r_0) \right] \cdot \Phi_k(\tau) \quad (11)$$

где

$$\Phi_k(\tau) = -(Q_1 + Q_2(1-\theta))e^{-\gamma_k^2\tau} + Q_1 z_1 + Q_2(1-\theta)z_2.$$

Здесь

$$z_1 = \frac{1}{\gamma_k} e^{-\gamma_k^2\tau} \cdot I\left(\frac{k_1}{2\gamma_k}\right) + e^{-k_1\sqrt{\tau}} \cdot I\left(\gamma_k\sqrt{\tau} - \frac{k_1}{2\gamma_k}\right);$$

$$z_2 = \frac{1}{\gamma_k^2 - k_2} \left(e^{-k_1\tau} - e^{-\gamma_k^2\tau} \right);$$

$$I(x) = e^{-x^2} \cdot \int_0^x e^{z^2} dz \quad \text{— интеграл Доусона.}$$

Собственные числа γ_k определяются из характеристического уравнения:

$$I_1(\gamma r_0) \cdot Y_0(\gamma R_2) - Y_1(\gamma r_0) \cdot I_0(\gamma R_2) = 0. \quad (12)$$

Чтобы облегчить вычисления, с помощью замены переменных:

$$x = \frac{\pi}{H}(r - R_2), \quad U(x) = \frac{V(x)}{\sqrt{\frac{H}{\pi}x + r_0}}, \quad H = R_2 - r_0$$

исходная задача о собственных функциях сводится к типичной задаче Штурма — Лиувилля [4]. Затем для определения асимптотических значений корней исходного характеристического уравнения (12) получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{8\gamma r_0}{H(4 - H)}.$$

Решение этого уравнения позволяет указать интервал, в котором заключен корень уравнения (12), кроме первого значения, что значительно упрощает вычисления.

Область применения полученных приближенных решений оценивается путем сравнения с результатами точного решения задачи. Результаты расчета по формуле (10) сравнивались с точными решениями, полученными по формуле (11) для однослойного цилиндра. Сопоставление результатов расчета показало, что областью применимости приближенной формулы (10) при принятых расчетных данных можно считать интервал (0-32 сек). При $\tau_0 = 20 \text{ сек}$ относительная погрешность составила $\sim 1\%$.

Для оценки погрешностей при вычислении полей температур для двухслойной камеры с помощью процедуры численного обращения (8), сопоставление с точным решением задачи производится для значений температуры внутренней поверхности двухслойного цилиндра.

На рис. 1 изображены графики изменения температуры внутренней поверхности однослойного и двухслойного цилиндра на промежутке времени, составляющим один цикл воздействия теплового потока (4).

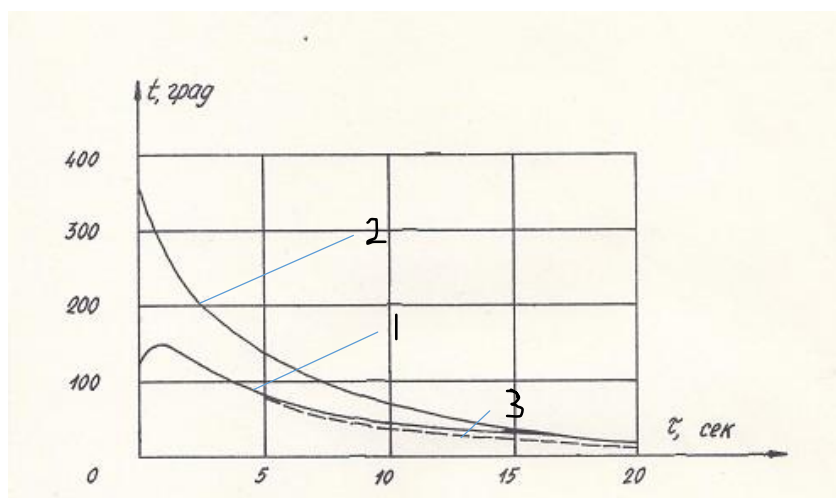


Рис. 1. Изменение температуры внутренней поверхности однослойного и двухслойного цилиндра

Было принято $T = 20$ сек. Точные решения изображены здесь сплошной линией. Кривая 1 соответствует двухслойному цилиндру, кривая 2 – однослойной. Приближенное решение для температуры внутренней поверхности двухслойного цилиндра описывается штриховой линией (кривая 3). Приближенное и точное значение температуры внутренней поверхности однослойного цилиндра совпадают с высокой степенью точности (оба решения изображены одной сплошной линией 1). Из рисунка видно, что для двухслойного цилиндра приближенное решение имеет удовлетворительное соответствие с точным решением лишь вплоть до значений 10 сек. При $\tau_0 = 20$ сек относительная погрешность составляет $\sim 5\%$. По-видимому, областью применимости приближенных формул для определения поля температур с использованием процедур численного обращения (8) следует считать $\tau_0 = 9 \div 10$ сек. Более худшие результаты по сравнению с аналитической формулой обращения (8) связаны, по-видимому, с погрешностью численного обращения.

Константы материалов внутреннего и внешнего слоев, принятые при расчете, соответствовали характеристикам меди и стали:

$$\rho_1 = 8,93 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \rho_2 = 7,17 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, C_1 = 0,0926 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}},$$

$$C_2 = 0,105 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \chi_1 = 0,96 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}, \chi_2 = 0,13 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}},$$

$$h_1 = 0,4 \text{ см}, H = 4 \text{ см}, r_0 = 28 \text{ см}, R_2 = 32 \text{ см}.$$

Заключение

Таким образом, предложена формула для определения температурного поля в стенках однослойного и двухслойного цилиндров при сравнительно небольших значениях времени. Процедура, заключающаяся в суммировании ряда из семи членов, представляет собой весьма удобный метод расчета для нахождения температуры внутреннего слоя для двухслойного цилиндра при небольших значениях времени, где имеет место наибольшее значение поля температуры. Для определения температуры внутренней поверхности однослойного цилиндра получена аналитическая формула, имеющая высокую степень точности на всем промежутке времени, составляющем один цикл воздействия тепловым потоком.

Литература

1. Нестационарное трехмерное температурное поле в многослойном цилиндре / В. А. Левченко, М. В. Кашеев, С. Л. Дорохович, А. А. Зайцев // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2020. № 4. С. 138–147.
2. Решение двумерной задачи нестационарной теплопроводности в к-слойных пластине и цилиндре / В. А. Левченко, М. В. Кашеев, С. Л. Дорохович, А. А. Зайцев // Известия высших учебных заведений. Сер. Ядерная энергетика. 2020. № 1. С. 58–66. DOI: 10.55176/2414-1038-2020-2-141-149.
3. Марголис Б. И., Мансур Губран Али. Программы моделирования температурных полей в изделиях цилиндрической формы // Программные продукты и системы. 2019. № 2. С. 313–317.
4. Моделирование процесса оплавления заусенцев при термоимпульсной обработке детонирующими смесями / С. И. Планковский, А. В. Гайдачук, О. В. Шипуль, Е. С. Палазюк // Авиационно-космическая техника и технология. 2013. № 3(100). С. 24–28.
5. Уланов А. В., Загребин Л. Д. Температурное поле на полусферических поверхностях контактных устройств // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. 2010. Вып. 7, № 12(193). С. 57–63.
6. Абидуев П. Л., Убодоев В. В. Определение температурного поля в двухслойной плоскости // Геометрия многообразий и ее приложения: материалы IV научной конференции с международным участием (г. Улан-Удэ – оз. Щучье, 27-30 июня 2016 г.). Улан-Удэ, 2016. С. 23–27.
7. Abiduev P. L., Darmaev T. G., Buldaev A. S. Periodic temperature field in a composite plate. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 704 012010.

Статья поступила в редакцию 07.04.2023; одобрена после рецензирования 26.09.2023; принята к публикации 27.09.2023.

TEMPERATURE FIELDS IN A TWO-LAYER CYLINDER UNDER
PULSED THERMAL LOADING FOR SMALL TIME VALUES

Purbo L. Abiduev

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Tumen G. Darmaev

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vladimir D. Anakhin

Cand. Sci. (Engineering), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. In this paper, we consider temperature fields in the walls of hollow cylindrical vessels, inside which gas mixtures are detonated, accompanied by a powerful thermal shock with a very high time gradient. In such chambers [1], for example, processing of parts using thermal shock can be performed. Approximate expressions for temperature fields are obtained with a sufficiently high degree of accuracy, suitable for small values of time, where the highest temperatures occur. As is known, thermal stresses are the greatest danger to the strength of such thick-walled vessels. Comparisons are made with solutions for temperature fields obtained in the classical way.

Keywords: Heat conduction equations, initial and boundary conditions, Laplace image plane, Bessel functions, single-layer, double-layer cylinders, heat flow.

For citation

Abiduev P. L., Darmaev T. G., Anakhin V. D. Temperature Fields in a Two-Layer Cylinder Under Pulsed Thermal Loading for Small Time Values // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 3. P. 90–98.

The article was submitted 07.04.2023; approved after reviewing 26.09.2023; accepted for publication 27.09.2023.