

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Научная статья

УДК 51-7

DOI: 10.18101/2304-5728-2023-4-22-37

К РАСЧЕТУ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ТЕЛ

© **Баргуев Сергей Гаврилович (Ганжурович)**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал),
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 152
barguev@yandex.ru

© **Нестеров Андрей Сергеевич**

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой телекоммуникационных систем,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал),
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 152
nesterov@biik.ru

© **Бурлаков Владимир Сергеевич**

преподаватель,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал),
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 152
vladimirburlakov03@mail.ru

Аннотация. В данной статье приводится методика исследования на собственные колебания балки с произвольным числом упруго закрепленных твердых тел, в основе которой лежит вариационный принцип Гамильтона. При этом решение полученной гибридной системы дифференциальных уравнений, включающей как обычные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных, понимается в обобщенном смысле. Применение понятия обобщенного решения вызвано присутствием в уравнениях дельта-функции Дирака, которую необходимо учитывать в местах присоединения к балке тел. По этой методике осуществляются расчеты собственных частот и форм колебаний рассматриваемой системы, их численная реализация. Производится сравнительный анализ произведенных расчетов с зарубежными исследованиями, который показал отличное согласование. Следует отметить, что в приведенной зарубежной работе используется обычная методика, заключающаяся в разбиении составной механической системы на части, уравнения движения которых достаточно просты, а затем производится исключение реакций взаимодействия этих частей. В предложенной в статье методике указанные реакции нет необходимости учитывать в явной форме. Если есть необходимость, то их легко рассчитать, имея готовое решение.

Ключевые слова: балка, изгибные колебания, упруго закрепленные тела, собственные частоты, собственные формы, численная реализация.

Для цитирования

Баргуев С. Г., Нестеров А. С., Бурлаков В. С. К расчету частот и форм колебаний балки с произвольным числом упруго закрепленных тел // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 22–37.

Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственного задания 071-03-2023-001 от 19.01.2023.

Введение

Расчет частотного спектра упругих конструкций типа балок с закрепленными телами позволяет выявить опасные резонансные частоты при воздействии на них внешних воздействий. С другой стороны, зная частотный спектр конструкции и формы колебаний, соответствующие этим частотам, можно решать начально-краевую задачу, то есть исследовать поведение конструкции во временном интервале при заданных начальных условиях — смещениях элементов конструкции и их скоростей в начальный момент времени. Решение данной задачи имеет интересные различные практические приложения. Отметим среди них следующие. Во-первых, это исследование поведения конструкции после мгновенного точечного удара по ней. Во-вторых, задавая начальные-краевые условия, можно выяснить, как меняются параметры механической системы во временном интервале, и определить, например, границы опасных внутренних напряжений в материале балки.

Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение рассматриваемой механической системы, выведена с использованием вариационного принципа Гамильтона [1], при этом точечное взаимодействие балки с прикрепленной системой твердых тел учитывается дельта-функцией Дирака, что предусматривает применение понятия обобщенного решения обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка при описании амплитудных смещений точек оси балки.

В данной работе описывается методика получения уравнения на собственные частоты, а также форм колебаний рассматриваемой механической системы. Производится сравнительный анализ с результатами исследования зарубежных авторов [2].

1 Получение уравнения на собственные частоты и соответствующих им собственных форм колебаний

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой однородную упругую балку длины l , плотности ρ , модулем упругости E , моментом инерции J поперечного сечения балки относительно нейтральной

оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, с закрепленными на нем n телами массами $m_i, i=1, \dots, n$, посредством пружин с жесткостями $c_i, i=1, \dots, n$. Концы балки жестко закреплены. Массы m_i могут перемещаться вертикально в направлении осей z_i . Колебания масс характеризуются функциями $z_i(t)$, перемещения точек оси балки описываются функцией $u(x, t)$ [13].

Уравнения движения механической системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_i}{dt^2} + p_i^2 (z_i - u(a_i, t)) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \sum_{i=1}^n e_i (z_i - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $p_i^2 = \frac{c_i}{m_i}, b = \frac{EJ}{\rho F}, e_i = \frac{c_i}{\rho F}$.

Краевые условия на концах балки:

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Представив $z_i(t), u(x, t)$ в виде

$$z_i(t) = A_i \sin(\omega t + \alpha_i), u(x, t) = V(x) \sin(\omega t + \beta),$$

подставив в (1), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_i + p_i^2 (A_i - V(a_i)) &= 0 \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} &= \sum_{i=1}^n e_i (A_i - V(x)) \delta(x - a_i) \end{aligned} \quad (3)$$

с краевыми условиями на концах стержня

$$\begin{aligned} V(0) = V(l) &= 0, \\ \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ввиду линейности второго уравнения в системе (3) его обобщенное решение имеет вид

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i(x - a_i) e_i (A_i - V(a_i)), \quad (5)$$

где функции $\bar{V}_i(x)$ являются решениями краевых задач

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \bar{V}_i(x) + b \frac{d^4 \bar{V}_i(x)}{dx^4} &= \delta(x), \\
 \bar{V}_i(-a_i) &= \bar{V}_i(l - a_i) = 0, \\
 \frac{d\bar{V}_i}{dx}(-a_i) &= \frac{d\bar{V}_i}{dx}(l - a_i) = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя в (5) последовательно $x = a_i$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_i)$:

$$\begin{aligned}
 (1 + \bar{V}(0)e_1)V(a_1) + \bar{V}(a_1 - a_2)e_2V(a_2) + \\
 + \dots \bar{V}(a_1 - a_n)e_nV(a_n) &= \\
 = \sum_{i=1}^n \bar{V}(a_1 - a_i)e_iA_i, \\
 \bar{V}(a_2 - a_1)e_1V(a_1) + (1 + \bar{V}(0)e_2)V(a_2) + \\
 + \dots \bar{V}(a_2 - a_n)e_nV(a_n) &= \\
 = \sum_{i=1}^n \bar{V}(a_2 - a_i)e_iA_i, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \bar{V}(a_n - a_1)e_1V(a_1) + \bar{V}(a_n - a_2)e_2V(a_2) + \\
 + \dots (1 + \bar{V}(0)e_n)V(a_n) &= \\
 = \sum_{i=1}^n \bar{V}(a_n - a_i)e_iA_i.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Определитель матрицы системы (7) имеет вид:

$$\Delta = \det \| b_{ij} \|,$$

где $b_{ij} = \delta_{ij} + \bar{V}(a_i - a_j)e_j, i, j = 1, \dots, n, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Обозначим

$$\Delta_k = \det \| \delta_{kj}\alpha_i + (1 - \delta_{ij})b_{ij} \|,$$

где

$$\alpha_i = \sum_{m=1}^n \bar{V}(a_i - a_j)e_m A_m.$$

Тогда по формуле Крамера

$$V(a_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Имея в виду зависимость Δ_k от A_m согласно (7), получаем для $V(a_k)$ выражение вида:

$$V(a_k) = \sum_{l=1}^n \beta_{kl} A_l, \quad (8)$$

где $\beta_{km} = \frac{\det \|\delta_{kj} \bar{V}(a_i - a_m) e_m + (1 - \delta_{kj}) b_{ij}\|}{\Delta}$.

Подставляя (8) в первое уравнение системы (3), получаем

$$\begin{aligned} [\omega^2 - p_1^2(1 - \beta_{11})]A_1 + p_1^2 \beta_{12} A_2 + \dots + p_1^2 \beta_{1n} A_n &= 0 \\ p_2^2 \beta_{21} A_1 + [\omega^2 - p_2^2(1 - \beta_{22})]A_2 + \dots + p_2^2 \beta_{2n} A_n &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$$p_n^2 \beta_{n1} A_1 + p_n^2 \beta_{n2} A_2 + \dots + [\omega^2 - p_n^2(1 - \beta_{nn})]A_n = 0$$

Из условия нетривиальности решения системы (9) относительно амплитуд A_i получаем частотное уравнение

$$\det \| (\omega^2 - p_i^2) + p_i^2 \beta_{ik} \| = 0, \quad (10)$$

решая которое можно найти собственные частоты ω исследуемой механической системы.

В частности, при $n = 3$ подставляя в (5) последовательно $x = a_1$, $x = a_2$ и $x = a_3$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_1)$, $V(a_2)$ и $V(a_3)$

$$\begin{aligned} (1 + \bar{V}_1(0)e_1)V(a_1) + \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2V(a_2) + \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3V(a_3) &= \\ = \sum_{i=1}^3 \bar{V}_i(a_1 - a_i)e_iA_i, \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1V(a_1) + (1 + \bar{V}_2(0)e_2)V(a_2) + \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3V(a_3) &= \\ = \sum_{i=1}^3 \bar{V}_i(a_2 - a_i)e_iA_i, \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1V(a_1) + \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2V(a_2) + (1 + \bar{V}_3(0)e_3)V(a_3) &= \\ = \sum_{i=1}^3 \bar{V}_i(a_3 - a_i)e_iA_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая систему (11), получаем

$$\begin{aligned} V(a_1) &= \beta_{11}A_1 + \beta_{12}A_2 + \beta_{13}A_3, \\ V(a_2) &= \beta_{21}A_1 + \beta_{22}A_2 + \beta_{23}A_3, \\ V(a_3) &= \beta_{31}A_1 + \beta_{32}A_2 + \beta_{33}A_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \\ \beta_{12} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_2(0)e_2 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \\ \beta_{13} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_3(0)e_3 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \\ \beta_{21} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \\ \beta_{22} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \\ \beta_{23} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_3(0)e_3 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\beta_{31} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_1(0)e_1 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{32} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_2(0)e_2 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1 - a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_2 - a_1)e_1 & 1 + \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2 - a_3)e_3 \\ \bar{V}_1(a_3 - a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3 - a_2)e_2 & 1 + \bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix}.$$

Подставляя (12) в уравнения системы (3), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} (p_1^2 - \omega^2 - p_1^2 \beta_{11})A_1 - p_1^2 \beta_{12}A_2 - p_1^2 \beta_{13}A_3 &= 0, \\ -p_2^2 \beta_{21}A_1 + (p_2^2 - \omega^2 - p_2^2 \beta_{22})A_2 - p_2^2 \beta_{23}A_3 &= 0, \\ -p_3^2 \beta_{31}A_1 - p_3^2 \beta_{32}A_2 + (p_3^2 - \omega^2 - p_3^2 \beta_{33})A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим уравнение для собственных частот:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 - \omega^2 - p_1^2 \beta_{11} & -p_1^2 \beta_{12} & -p_1^2 \beta_{13} \\ -p_2^2 \beta_{21} & p_2^2 - \omega^2 - p_2^2 \beta_{22} & -p_2^2 \beta_{23} \\ -p_3^2 \beta_{31} & -p_3^2 \beta_{32} & p_3^2 - \omega^2 - p_3^2 \beta_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

По найденным собственным частотам ω определяем формы собственных колебаний по формуле (6):

$$\begin{aligned} V(x) &= \bar{V}_1(x - a_1)e_1(A_1 - V(a_1)) + \bar{V}_2(x - a_2)e_2(A_2 - V(a_2)) + \\ &+ \bar{V}_3(x - a_3)e_3(A_3 - V(a_3)). \end{aligned} \quad (14)$$

2 Сравнительный анализ

В статье рассматривается гибридная система дифференциальных уравнений, выведенная из вариационного принципа Гамильтона, что подразумевает учет крепления произвольного числа тел автоматически с помощью функции Дирака, а также использование понятия обобщенного решения данной системы.

В зарубежных работах аналогичные механические системы рассматриваются, но в них не используется вариационный принцип Гамильтона, а производится классический способ: система разбивается на части, а в местах сочленений вводятся силы взаимодействия частей с учетом третьего закона Ньютона. Затем составляются и отдельно анализируются уравнения движения этих частей с учетом указанных сил взаимодействия.

С целью проведения сравнительного анализа произведен расчет собственных частот балки с тремя телами, то есть при $n = 3$, опираясь на данные и результаты расчетов из зарубежной статьи [2].

Параметры балки с упруго закрепленными тремя телами в системе СИ:

$$k_1 = 3k_b, m_1 = 0,2m_b, k_2 = 4,5k_b, m_2 = 0,5m_b, k_3 = 6k_b, m_3 = 1m_b,$$

$$k_b = 63476,1, m_b = 15,3875,$$

$$a_1 = 0,1, a_2 = 0,4, a_3 = 0,8, l = 1, EJ = 63476,1, \rho F = 15,3875.$$

Сравнение частот, полученных в зарубежной статье и в данной работе

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Зарубежная статья [2]	156,6703	190,6994	248,6622	1454,2932	3968,4732
Данная работа	156,6705	190,6995	248,6625	1454,3015	3968,4815
Погрешность	$1,27 \cdot 10^{-6}$	$5,24 \cdot 10^{-7}$	$1,21 \cdot 10^{-6}$	$5,71 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-6}$

Заключение

Результаты расчетов показали отличное согласие по обоим методикам. Следует отметить преимущество методики, предложенной в настоящей работе, связанной с автоматизацией расчетов при достаточно большом количестве прикрепляемых к балке тел. Для дальнейших исследований, если потребуется, расчет форм колебаний можно произвести по формуле (6) по известным частотам.

Программа

```
const
  maxElement = 3;

type
  MyFloat = Extended;
  TArrayMyFloat = array[0..maxElement, 0..maxElement]
of MyFloat;

var
  E, J, ro, A : MyFloat;
  b, beta : MyFloat;
  w, dw, w1, w2 : MyFloat;
  M, M0 : TArrayMyFloat;
  L, a1, a2, a3 : MyFloat;
  e1, e2, e3 : MyFloat;
  k1, k2, k3 : MyFloat;
  m1, m2, m3 : MyFloat;
  p1, p2, p3 : MyFloat;
  c_ij, beta_ij : TArrayMyFloat;

//функции крылова
function S1(y : MyFloat) : MyFloat;
begin
  Result := (exp(y) + exp(-y) + 2 * cos(y)) / 4;
end;

function S2(y : MyFloat) : MyFloat;
begin
  Result := (exp(y) - exp(-y) + 2 * sin(y)) / 4;
end;

function S3(y : MyFloat) : MyFloat;
begin
  Result := (exp(y) + exp(-y) - 2 * cos(y)) / 4;
end;

function S4(y : MyFloat) : MyFloat;
begin
  Result := (exp(y) - exp(-y) - 2 * sin(y)) / 4;
end;

//вычисляем (-1)^i
function od(i : Integer) : Integer;
begin
```

```
    if ((i + 1) mod 2) = 0 then Result := 1 else Result
:= -1;
end;

//удаляем строку и столбец из матрицы
function Del(A : TArrayMyFloat; l : Integer; m : In-
teger) : TArrayMyFloat;
var
    j, g : Integer;
begin
    for g := 1 to m - 1 do
        for j := 0 to m do
            A[g, j] := A[g + 1, j];
        for g := 0 to m - 1 do
            for j := 0 to m - 1 do
                A[g, j] := A[g, j + 1];
            Result := A;
        end;
    end;

//рекурсивно вычисляем детерминант
function Det(A : TArrayMyFloat; m : Integer) : My-
Float;
Var
    i : Integer;
    buf : MyFloat;
begin
    buf := 0;
    if m = 0 then buf := A[0, 0] else
        for i := 0 to m do buf := buf + od(i + 1) * A[i,
0] * Det(Del(A, i, m), m - 1);
    Result:=buf;
end;

//очистка временной таблицы
procedure ClearM0;
var
    i, j : Integer;
begin
    for i := 0 to maxElement do
        for j := 0 to maxElement do
            M0[i, j] := 0;
        end;
    end;

//подготовка временной матрицы
procedure PrepareM0(a : MyFloat);
begin
```

```
ClearM0;

M0[0, 0] := S1(-beta * a);
M0[0, 1] := S2(-beta * a);
M0[0, 2] := S3(-beta * a);
M0[0, 3] := S4(-beta * a);
M0[1, 0] := S1(beta * (L - a));
M0[1, 1] := S2(beta * (L - a));
M0[1, 2] := S3(beta * (L - a));
M0[1, 3] := S4(beta * (L - a));
M0[2, 0] := S4(-beta * a);
M0[2, 1] := S1(-beta * a);
M0[2, 2] := S2(-beta * a);
M0[2, 3] := S3(-beta * a);
M0[3, 0] := S4(beta * (L - a));
M0[3, 1] := S1(beta * (L - a));
M0[3, 2] := S2(beta * (L - a));
M0[3, 3] := S3(beta * (L - a));
end;

function get_ai(i : Integer) : MyFloat;
begin
  if i = 0 then Result := a1;
  if i = 1 then Result := a2;
  if i = 2 then Result := a3;
end;

//вычисление коэффициентов разложения Ci
procedure Calc_c;
var
  a, delta, delta_col : MyFloat;
  elem1, elem3 : MyFloat;
  row, col : Integer;
begin
  for row := 0 to 2 do
    begin
      a := get_ai(row);

      PrepareM0(a);
      elem1 := -S4(beta * (L - a)) / (b * beta * beta
* beta);
      elem3 := -S3(beta * (L - a)) / (b * beta * beta
* beta);
      delta := Det(M0, 3);

      for col := 0 to 3 do
```

```
begin
  M := M0;
  M[0, col] := 0;
  M[1, col] := elem1;
  M[2, col] := 0;
  M[3, col] := elem3;
  delta_col := Det(M, 3);
  c_ij[row, col] := delta_col / delta;
end;
end;

//функция хэвисайда
function hevi(x : MyFloat) : MyFloat;
begin
  if x < 0 then Result := 0 else Result := 1;
end;

//вычисление Vi(x)
function Vi(row : Integer; x : MyFloat) : MyFloat;
begin
  Result := c_ij[row, 0] * S1(beta * x) + c_ij[row,
1] * S2(beta * x) + c_ij[row, 2] * S3(beta * x) +
c_ij[row, 3] * S4(beta * x) + S4(beta * x) * hevi(x)
/ (b * beta * beta * beta);
end;

//подготовка временной матрицы
procedure PrepareM0_again;
begin
  ClearM0;

  M0[0, 0] := 1 + Vi(0, 0) * e1;
  M0[0, 1] := Vi(1, a1 - a2) * e2;
  M0[0, 2] := Vi(2, a1 - a3) * e3;
  M0[1, 0] := Vi(0, a2 - a1) * e1;
  M0[1, 1] := 1 + Vi(1, 0) * e2;
  M0[1, 2] := Vi(2, a2 - a3) * e3;
  M0[2, 0] := Vi(0, a3 - a1) * e1;
  M0[2, 1] := Vi(1, a3 - a2) * e2;
  M0[2, 2] := 1 + Vi(2, 0) * e3;
end;

function get_ei(i : Integer) : MyFloat;
begin
  if i = 0 then Result := e1;
```

```
    if i = 1 then Result := e2;
    if i = 2 then Result := e3;
end;

//расчет коэффициентов beta_ij
procedure Calc_beta;
var
    i, row, col : Integer;
    delta, delta_colrow : MyFloat;
begin
    PrepareM0_again;
    delta := Det(M0, 2);
    for row := 0 to 2 do
        for col := 0 to 2 do
            begin
                M := M0;
                if row = col then M[row, col] := Vi(row, 0)
* get_ei(row) else
                    for i := 0 to 2 do M[i, row] := Vi(col,
get_ai(i) - get_ai(col)) * get_ei(col);

                delta_colrow := Det(M, 2);
                beta_ij[row, col] := delta_colrow / delta;
            end;
        end;
    end;

//основная процедура с циклом по частоте w
procedure TMainF.StartBtn1Click(Sender: TObject);
var
    f, f0 : MyFloat;
    Step : Integer;
begin
    //инициализация параметров
    E := 2.069E+11;
    J := 3.06796E-7;
    ro := 7.8367E+3;
    A := Pi * sqr(0.05) / 4;
    a1 := 0.1;
    a2 := 0.4;
    a3 := 0.8;
    L := 1;
    k1 := 3 * 6.34761E+4;
    k2 := 4.5 * 6.34761E+4;
    k3 := 6 * 6.34761E+4;
    m1 := 0.2 * 15.3875;
    m2 := 0.5 * 15.3875;
```

```
m3 := 1.0 * 15.3875;

//параметры итератора
dw := 0.01;
w1 := 100;
w2 := 4000;

//расчет параметров
p1 := sqrt(k1 / m1);
p2 := sqrt(k2 / m2);
p3 := sqrt(k3 / m3);
b := E * J / (ro * A);
e1 := k1 / (ro * A);
e2 := k2 / (ro * A);
e3 := k3 / (ro * A);

//цикл по w с шагом dw
w := w1;
f0 := 1E-9;
Step := 0;
repeat
    beta := sqrt(w) / sqrt(sqrt(b));

    //вычисляем c1, c2, c3, c4 для a1, a2, a3
    Calc_c;

    //вычисляем beta11, beta12 .. beta33
    Calc_beta;

    //вычисляем f(w)=
    M[0, 0] := sqrt(p1) * (1 - beta_ij[0, 0]) -
sqrt(w);
    M[0, 1] := - sqrt(p1) * beta_ij[0, 1];
    M[0, 2] := - sqrt(p1) * beta_ij[0, 2];

    M[1, 0] := -sqrt(p2) * beta_ij[1, 0];
    M[1, 1] := sqrt(p2) * (1 - beta_ij[1, 1]) -
sqrt(w);
    M[1, 2] := -sqrt(p2) * beta_ij[1, 2];

    M[2, 0] := - sqrt(p3) * beta_ij[2, 0];
    M[2, 1] := - sqrt(p3) * beta_ij[2, 1];
    M[2, 2] := sqrt(p3) * (1 - beta_ij[2, 2]) -
sqrt(w);

    f := Det(M, 2);
```

```
//поиск корней
if f * f0 <= 0 then ListBx.Items.Add(FloatToStr(w
- dw / 2));
f0 := f;

w := w + dw;
Inc(Step);
until w > w2;
end;
```

Литература

1. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2013. № 9. С. 130–137.
2. Wu J. S., Chou H. M. A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 220, No. 3. P. 451–468.

Статья поступила в редакцию 26.10.2023; одобрена после рецензирования 20.11.2023; принята к публикации 01.12.2023.

TO CALCULATION OF FREQUENCIES AND FORMS OF BEAM VIBRATIONS WITH ARBITRARY NUMBER OF ELASTICALLY FIXED BODIES

Sergey G. Barguev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Informatics,
Russia, 670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, st. Trubacheeva, 152
barguev@yandex.ru

Andrey S. Nesterov

Candidate of Technical Sciences, associate professor,
Buryat Institute of Information Communications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Information,
Russia, 670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, st. Trubacheeva, 152
nesterov@biik.ru

Vladimir S. Burlakov

lecturer,
Buryat Institute of Information Communications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Information,
Russia, 670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, st. Trubacheeva, 152
vladimirburlakov03@mail.ru

Abstract. This article presents a method for studying the natural vibrations of a beam with an arbitrary number of elastically fixed solids, which is based on Hamilton's variational principle. In this case, the solution of the resulting hybrid system of differential equations, including both ordinary and partial differential equations, is understood in a generalized sense. The use of the concept of a generalized solution is caused by the presence in the equations of the Dirac delta function, which must be taken into account at the points of connection of bodies to the beam. This method is used to calculate the natural frequencies and vibration modes of the system under consideration and their numerical implementation. A comparative analysis of the calculations made with foreign studies is carried out, which showed excellent agreement. It should be noted that in the above foreign work, the usual technique is used, which consists in dividing a composite mechanical system into parts, the equations of motion of which are quite simple, and then eliminating the interaction reactions of these parts. In the methodology proposed in the article, these reactions do not need to be taken into account explicitly. If necessary, they can be easily calculated if you have a ready-made solution.

Keywords: beam, bending vibrations, elastically fixed bodies, eigenfrequency, eigenforms, numerical realisation.

For citation

Barguev S. G., Nesterov A. S., Burlakov V. S. To Calculation of Frequencies and Forms of Beam Vibrations With Arbitrary Number of Elastically Fixed Bodies // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 4. P. 22–37.

The article was submitted 26.10.2023; approved after reviewing 20.11.2023; accepted for publication 01.12.2023.