

Научная статья

УДК 51-7, 519.1

DOI: 10.18101/2304-5728-2023-4-38-52

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ПОКРЫТИЙ ОТРЕЗКА НА ОСНОВЕ СУММ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© Кузьмин Олег Викторович

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, б-р Гагарина, 20
quzminov@mail.ru

© Стрихарь Марина Валерьевна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной механики и математики,
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15;
Забайкальский институт железнодорожного транспорта
Россия, 672040, г. Чита, ул. Магистральная, 11
mseryogina@mail.ru

Аннотация. Важную роль в вопросах обработки данных, их хранении, анализе, создании алгоритмов и оптимизации играют комбинаторные объекты. Настоящая работа посвящена моделированию комбинаторных чисел, изучению их некоторых геометрических свойств и интерпретаций на основе пространственной комбинаторной конфигурации, названной пирамидой Паскаля. В работе рассмотрены полные покрытия отрезка и их взаимосвязь с комбинаторными объектами иерархической структуры. Получена формула для подсчета числа полных покрытий отрезка на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля. Найдены рекуррентные соотношения и производящие функции числа полных покрытий отрезка. В силу симметрии пирамиды Паскаля получены различные формулы для подсчета числа таких покрытий, а также рассмотрены некоторые наиболее важные частные случаи на примере известных комбинаторных чисел.

Ключевые слова: моделирование, обработка данных, покрытие отрезка, иерархическая структура, пирамида Паскаля, плоское сечение пирамиды Паскаля, числовая последовательность, рекуррентное соотношение, производящая функция.

Для цитирования

Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Моделирование полных покрытий отрезка на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 38–52.

Введение

В последние десятилетия неуклонно растет число математических комбинаторных объектов и их разнообразие, что связано с решением задач моделирования и исследования различных явлений и процессов в вопросах обработки и хранения данных, анализе данных, создании алгоритмов и оптимизации. Уникальная «The on-line encyclopedia of integer sequences» (OEIS) [8], основанная Нилом Слоуном в 1964 г., содержит в настоящее время более 350 000 статей по числовым последовательностям, встречающимся в комбинаторике, теории графов и т. д. [1] Единым подходом для получения и изучения таких объектов является рассмотрение их как многоуровневых систем или систем с иерархической структурой [4, 5].

Для моделирования ряда числовых последовательностей, описываемых в OEIS, в [2] было введено понятие обобщенной пирамиды Паскаля, которую в 1993 г. предложил О. В. Кузьмин. В данной работе рассматриваются число полных покрытий отрезка и его взаимосвязь с суммой элементов плоского сечения пирамиды Паскаля. Определяются числа полных покрытий отрезка, рекуррентные соотношения и производящие функции, которым удовлетворяют эти числа. В качестве примеров приведены известные числовые последовательности.

1 Полные покрытия отрезка

Рассмотрим покрытия отрезка длины m тремя отрезками, длины которых равны m_1 , m_2 и m_3 , учитывая при этом, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, $m, m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (рис. 1). Отрезки полностью покрывают рассматриваемый отрезок, перекрывая его и друг друга только в граничных точках. Если длины двух или всех трех покрывающих отрезков совпадают, то есть $m_1 = m_2$ и/или $m_1 = m_3$ и/или $m_2 = m_3$, то соответствующие совпадающие по длине покрывающие отрезки полагаем разных цветов (рис. 2), при этом граничные точки всех отрезков для определенности оставляем бесцветными. Два покрытия считаем различными, если они отличаются либо составом покрывающих элементов, либо порядком их расположения. Такие покрытия назовем *полными* $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытиями.

Обозначим через μ наибольший общий делитель чисел m_1 , m_2 и m_3 :

$$\mu = \text{НОД}(m_1, m_2, m_3),$$

тогда возможны два случая:

1) если $m = \mu k$, $k \in \mathbf{N}$, то число полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий совпадает с числом полных $(k; m_1/\mu, m_2/\mu, m_3/\mu)$ -покрытий;

2) в противном случае, если $m \neq \mu k$, $k \in \mathbf{N}$, то не найдется ни одного полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия.

Поэтому в дальнейшем, не умаляя общности рассматриваемых случаев, положим

$$\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = 1$$

и найдем число полных покрытий отрезка.

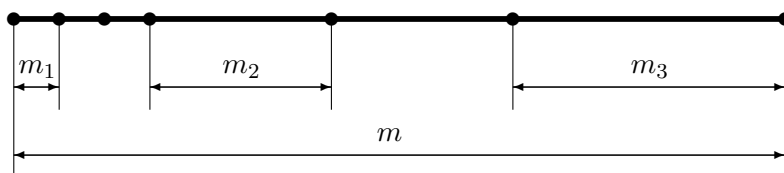


Рис. 1. Вариант полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия при $m_1 < m_2 < m_3$

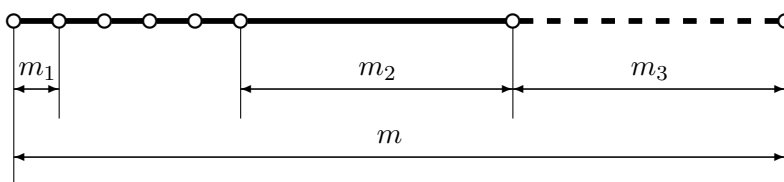


Рис. 2. Вариант полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия при $m_1 < m_2 = m_3$

2 Плоские сечения пирамиды Паскаля

Пирамидой Паскаля называем бесконечную иерархическую трехгранную пирамидальную структуру, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\binom{n+1}{k, l} = \binom{n}{k-1, l} + \binom{n}{k, l-1} + \binom{n}{k, l},$$

с граничными условиями:

$$\binom{0}{0,0} = 1; \binom{n}{k,l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0,$$

где $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$ — триномиальные коэффициенты, для которых справедливы равенства:

$$\binom{n}{0,0} = \binom{n}{n,0} = \binom{n}{0,n} = 1,$$

$$\binom{n}{k,l} = \binom{n}{l,k} = \binom{n}{n-k-l,l} = \binom{n}{k,n-k-l},$$

что свидетельствует о наличии трех осей симметрии в пирамиде Паскаля [2].

Для решения поставленной задачи будем рассматривать пирамиду Паскаля в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве, при этом вершину пирамиды совместим с точкой $(0; 0; 0)$, числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Таким образом, все элементы пирамиды Паскаля однозначно совмещаются с точками $(n; k; l)$ целочисленной решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты и ограниченными плоскостями $k = 0$, $n = 0$ и $n - k - l = 0$.

Рассмотрим треугольное плоское сечение пирамиды Паскаля, образующее углы ϕ_1 и ϕ_2 с осями ординат и аппликат соответственно. Уравнение такого сечения имеет вид [7]:

$$n + \operatorname{tg} \phi_1 \cdot k + \operatorname{tg} \phi_2 \cdot l = \operatorname{const}. \quad (1)$$

Нумеруем, начиная от вершины пирамиды Паскаля, все параллельные между собой сечения, заданные уравнением вида (1), и рассматриваем последовательность сумм элементов таких сечений:

$$\{S_N(\operatorname{tg} \phi_1, \operatorname{tg} \phi_2)\}, N \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Пусть

$$\operatorname{tg} \phi_r = p_r/q_r, p_r \in \mathbf{Z}, q_r \in \mathbf{N}, \operatorname{НОД}(p_r, q_r) = 1, r = 1, 2.$$

В случае $p_r/q_r > -1$ треугольник сечения конечен, и уравнение N -го плоского сечения пирамиды Паскаля принимает вид [3]:

$$n + \frac{p_1}{q_1} \cdot k + \frac{p_2}{q_2} \cdot l = \frac{N}{\operatorname{НОК}(q_1, q_2)}. \quad (2)$$

Обозначим через q наименьшее общее кратное чисел q_1 и q_2 :

$$q = \operatorname{НОК}(q_1, q_2).$$

Теорема 1. Сумма элементов N -го плоского сечения пирамиды Паскаля задается формулой:

$$S_N\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}\right]-i} \binom{\frac{N}{q} - \frac{p_1}{q_1}i - \frac{p_2}{q_2}j}{i, j}. \quad (3)$$

Доказательство.

Действительно, все элементы вида $\binom{\frac{N}{q} - \frac{p_1}{q_1}i - \frac{p_2}{q_2}j}{i, j}$ содержатся в плоскости N -го сечения пирамиды Паскаля, заданного уравнением (2), поскольку

$$\left(\frac{N}{q} - \frac{p_1}{q_1}i - \frac{p_2}{q_2}j\right) + \frac{p_1}{q_1} \cdot i + \frac{p_2}{q_2} \cdot j = \frac{N}{q}$$

для любых целых неотрицательных i и j , являющихся соответственно ординатами и абсциссами элементов пирамиды Паскаля. Других элементов пирамиды в этой плоскости нет, рассмотрены все возможные значения i и j для узлов целочисленной решетки первого октанта.

Ограничения пирамиды Паскаля $k = 0$, $n = 0$ и $n - k - l = 0$ определяют вершины треугольника сечения, а именно элементы

$$\left(\frac{N}{q}, 0\right), \left(\frac{\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}}{\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)}}, 0\right) \text{ и } \left(0, \frac{\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}}{\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)}}\right),$$

которые задают верхние и нижние пределы суммирования. Таким образом, получаем формулу (3) для вычисления суммы элементов N -го плоского сечения пирамиды Паскаля. Теорема доказана.

3 Число полных покрытий отрезка

Для нахождения числа полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий введем в рассмотрение сумму элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля следующего вида:

$$\begin{aligned} & S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = \\ & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} \rfloor - i} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j}{i, j}, m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Число всех полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий равно сумме (4) элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля.

Доказательство.

Пусть $x_{i,j}$ — число полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий, составленных из i отрезков длины m_1 , j отрезков длины m_2 и $(m - m_1 i - m_2 j)/m_3$ отрезков длины m_3 соответственно. Тогда число всех возможных полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий равно

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{m_2} \rfloor - i} x_{i,j}.$$

Так как всего покрывающих отрезков

$$i + j + \frac{m - m_1 i - m_2 j}{m_3} = \frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j,$$

следовательно

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \frac{\left(\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j\right)!}{i! j! \left(\frac{m}{m_3} - \frac{m_1 i}{m_3} - \frac{m_2 j}{m_3}\right)!} = \\ &= \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j}{i, j}. \end{aligned}$$

Поэтому число всех полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий равно

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{m_1}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{m_2}\right] - i} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right) j}{i, j} = S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Рассмотрим случай полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия при $m = 0$. Для любых натуральных значений m_1, m_2 и m_3 , при условии, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, имеем

$$S_0 = \binom{0}{0, 0} = 1. \quad (5)$$

Это число соответствует вершине пирамиды Паскаля и будет играть большую роль в нахождении рекуррентных соотношений и формальной производящей функции для числа полных покрытий отрезка. Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, то есть считаем, что $m \in \mathbf{N}_0$.

4 Рекуррентные соотношения

Обозначим $S_m = S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$ полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий.

Теорема 3. *Последовательности чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + S_{m-m_3} \quad (6)$$

с начальными условиями

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \quad (7)$$

S_m , при $m = m_1, \dots, m_{m_2-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}; \quad (8)$$

S_m , при $m = m_2, \dots, m_{m_3-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}. \quad (9)$$

Доказательство.

Действительно, при $m \geq m_3$ имеются три возможности полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия. В первом случае сначала произведем полное $(m - m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавим справа отрезок длины m_1 . Во втором случае сначала выполним полное $(m - m_2; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавим справа отрезок длины m_2 . В третьем случае сначала осуществим полное $(m - m_3; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавим справа отрезок длины m_3 . Указанные возможности образуют рекуррентное соотношение (6). В случае $m = m_3$ приходим к соотношению (5).

Если $1 \leq m \leq m_1 - 1$, то нет ни одного полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия, что доказывает начальные условия (7).

Если $m_1 \leq m \leq m_2 - 1$, то число полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий совпадает с числом полных $(m - m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий. Получаем соотношение (8). При $m = m_1$ снова приходим к соотношению (5).

Если $m_2 \leq m \leq m_3 - 1$, то можно произвести полное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие только отрезками длины m_1 и m_2 . Имеется только две возможности сделать это. В первом случае сначала произведем полное $(m - m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавим справа отрезок длины m_1 . Во втором случае сначала осуществим полное $(m - m_2; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавим справа отрезок длины m_2 . Указанные возможности образуют формулу (9). В случае $m = m_2$ получаем (5).

Теорема доказана.

В силу симметрии пирамиды Паскаля из Теоремы 3 имеем:

Следствие. Для натуральных чисел m_1, m_2 и $m_3, m_1 \leq m_2 \leq m_3$, $\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = 1$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) &= S_m \left(\frac{m_2}{m_3} - 1, \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) = \\ &= S_m \left(\frac{m_1}{m_2} - 1, \frac{m_3}{m_2} - 1 \right) = S_m \left(\frac{m_3}{m_2} - 1, \frac{m_1}{m_2} - 1 \right) = \\ &= S_m \left(\frac{m_2}{m_1} - 1, \frac{m_3}{m_1} - 1 \right) = S_m \left(\frac{m_3}{m_1} - 1, \frac{m_2}{m_1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

5 Производящая функция

Сопоставим последовательности $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$ формальный степенной ряд и найдем производящую функцию.

Теорема 4. Производящая функция последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$, имеет вид:

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}}. \quad (11)$$

Доказательство. Согласно Теореме 3 последовательность сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$, удовлетворяет соотношениям (6) – (9).

Перепишем рекуррентное соотношение (6) в виде

$$S_{m+m_3} = S_{m+m_3-m_1} + S_{m+m_3-m_2} + S_m.$$

Умножая последнее соотношение почленно на x^{m+m_3} и суммируя по m в пределах от нуля до бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3} x^{m+m_3} &= x^{m_1} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_1} x^{m+m_3-m_1} + \\ &+ x^{m_2} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_2} x^{m+m_3-m_2} + x^{m_3} \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m. \end{aligned}$$

Пусть

$$F_S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m,$$

тогда из предыдущего равенства имеем

$$\begin{aligned} F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m &= x^{m_1} \left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m \right) + \\ &+ x^{m_2} \left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m \right) + x^{m_3} F_S(x). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m &= x^{m_1} F_S(x) - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m + \\ &+ x^{m_2} F_S(x) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m + x^{m_3} F_S(x), \\ F_S(x) - x^{m_1} F_S(x) - x^{m_2} F_S(x) - x^{m_3} F_S(x) &= \\ = \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m. \end{aligned}$$

Учитывая начальные условия (7) и рекуррентные соотношения (8) и (9), преобразуем отдельно правую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = \\
 & = \left(S_0 + \sum_{m=1}^{m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m \right) - \\
 & - x^{m_1} \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^m \right) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = \\
 & = 1 + 0 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \\
 & - \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^{m+m_2} = \\
 & = 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_{m-m_1} x^m - \\
 & - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_2} x^m = \\
 & = 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (S_m - S_{m-m_1}) x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} (S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2}) x^m = \\
 & = 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m = 1.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_S(x) (1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}) = 1,$$

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}},$$

что и требовалось доказать.

6 Частные случаи

Рассмотрим некоторые наиболее важные частные случаи.

6.1 Числа Трибоначчи

При $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ получаем полные $(m; 1, 2, 3)$ -покрытия (рис. 3).

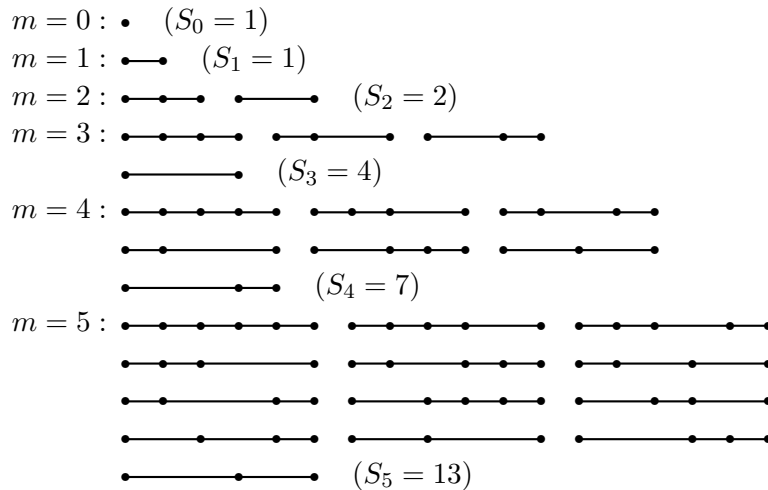


Рис. 3. Полные $(m; 1, 2, 3)$ -покрытия

Числа $S_m, m \in \mathbf{N}_0$ в данном случае являются суммами элементов плоских сечений пирамиды Паскаля, для которых, согласно (4) и (10), один из шести вариантов расположения имеем при $\operatorname{tg} \phi_1 = 1, \operatorname{tg} \phi_2 = 2$.

Суммы элементов этих сечений образуют последовательность чисел $1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \dots$, которая совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи, указанной под номером A000073 в [8] и определяемой при помощи рекуррентного соотношения:

$$t_{m+3} = t_{m+2} + t_{m+1} + t_m, t_0 = t_1 = 0, t_2 = 1,$$

при этом $S_m = t_{m+2}$.

Число полных покрытий в данном случае вычисляется по формуле:

$$S_m(1, 2) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - i} \binom{m-i-2j}{i, j},$$

и удовлетворяет, согласно (6) — (9), рекуррентному соотношению:

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3}, S_0 = S_1 = 1, S_2 = 2.$$

Производящая функция сумм элементов таких сечений, исходя из (11), имеет вид:

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

6.2 Числа Якобсталя

При $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 2$ получаем полные $(m; 1, 2, 2)$ -покрытия, при этом покрывающие отрезки, совпадающие по длине, окрашены разными цветами (рис. 4).

Числа $S_m, m \in \mathbf{N}_0$ в данном случае являются суммами элементов плоских сечений пирамиды Паскаля, для которых один из шести вариантов расположения получаем при $\text{tg } \phi_1 = \text{tg } \phi_2 = 1$.

Суммы элементов этих сечений образуют последовательность чисел 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, ..., которая совпадает с последовательностью чисел Якобсталя [6], указанной под номером A001045 в [8] и определяемой при помощи рекуррентного соотношения:

$$J_m = J_{m-1} + 2J_{m-2}, J_0 = 0, J_1 = 1,$$

при этом $S_m = J_{m+1}$.

Число полных покрытий в данном случае вычисляются по формуле:

$$S_m(1, 1) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - i} \binom{m-i-j}{i, j},$$

и удовлетворяет, исходя из (6) – (9), рекуррентному соотношению:

$$S_m = S_{m-1} + 2S_{m-2}, S_0 = S_1 = 1.$$

Соответствующая производящая функция, согласно (11), имеет вид:

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}.$$

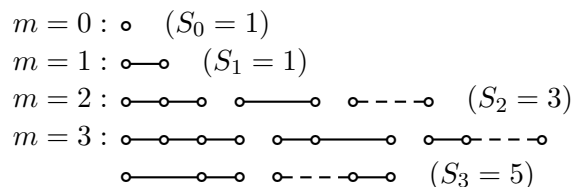


Рис. 4. Полные $(m; 1, 2, 2)$ -покрытия

6.3 Степени числа 3

При $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ имеем полные $(m; 1, 1, 1)$ -покрытия. Поскольку все покрывающие отрезки совпадают по длине, то они окрашены разными цветами (рис. 5).

Числа S_m , $m \in \mathbf{N}_0$ в данном случае являются суммами элементов горизонтальных плоских сечений пирамиды Паскаля, для которых согласно (4) и (10), $\operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \phi_2 = 0$.

Суммы элементов этих сечений образуют последовательность чисел 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ..., которая совпадает с последовательностью A000244 (степени числа 3) в [8].

Число полных покрытий в данном случае вычисляется по формуле:

$$S_m(0, 0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i, j},$$

и удовлетворяет, согласно (6) – (9), рекуррентному соотношению:

$$S_m = 3S_{m-1}, S_0 = 1.$$

Производящая функция сумм элементов таких сечений, согласно (11), имеет вид:

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - 3x}.$$

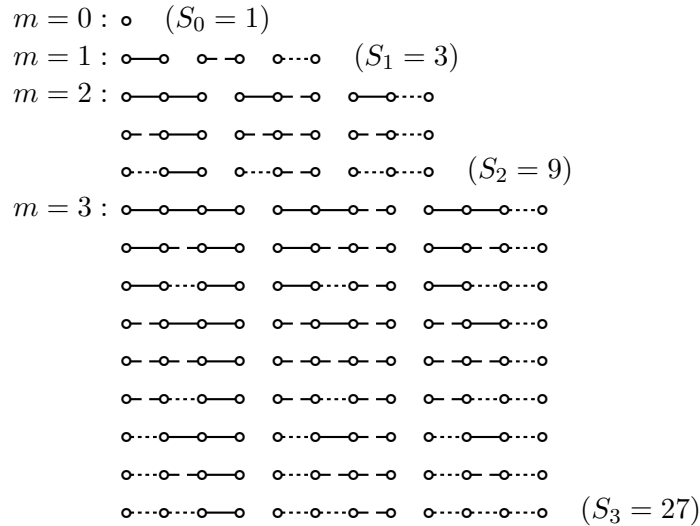


Рис. 5. Полные $(m; 1, 1, 1)$ -покрытия

В таблице 1 приведены некоторые значения чисел m_1 , m_2 и m_3 , последовательность S_m , $m \in \mathbf{N}_0$ чисел полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий

и соответствующие этим числам углы плоских сечений пирамиды Паскаля (один из шести случаев согласно (10)), а также приведены номера этих последовательностей в [8].

Таблица 1. Полные покрытия отрезка длины m и некоторые известные комбинаторные числа

m_1	m_2	m_3	$S_m, m \in \mathbf{N}_0$	$\text{tg } \phi_1$	$\text{tg } \phi_2$	№ в [8]
1	2	3	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, ...	1	2	A000073*
1	1	2	1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ...	0	1	A000129*
1	1	1	1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...	0	0	A000244
1	2	2	1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, ...	1	1	A001045*
1	3	4	1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, 40, 64, ...	2	3	A006498
2	2	3	1, 0, 2, 1, 4, 4, 9, 12, 22, 33, 56, ...	0	1/2	A008346
1	1	3	1, 2, 4, 9, 20, 44, 97, 214, 472, ...	0	2	A008998
1	1	4	1, 2, 4, 8, 17, 36, 76, 160, 337, ...	0	3	A008999
2	3	4	1, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, 24, ...	1/2	1	A013979
3	3	4	1, 0, 0, 2, 1, 0, 4, 4, 1, 8, 12, 6, ...	0	1/3	A052922
1	4	4	1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 25, 39, ...	3	3	A052942
2	3	3	1, 0, 1, 2, 1, 4, 5, 6, 13, 16, 25, ...	1/2	1/2	A052947
1	2	4	1, 1, 2, 3, 6, 10, 18, 31, 55, 96, ...	1	3	A060945*
3	4	4	1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 4, 4, 1, 6, 12, 9, ...	1/3	1/3	A077909**
1	3	3	1, 1, 1, 3, 5, 7, 13, 23, 37, 63, ...	2	2	A077949
3	4	6	1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 3, 5, 3, 6, ...	1/3	1	A079956
1	2	5	1, 1, 2, 3, 5, 9, 15, 26, 44, 75, ...	1	4	A079971
1	4	5	1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 17, 27, ...	3	4	A079972
1	1	5	1, 2, 4, 8, 16, 33, 68, 140, 288, ...	0	4	A098588
1	2	6	1, 1, 2, 3, 5, 8, 14, 23, 39, 65, ...	1	5	A120400
1	3	6	1, 1, 1, 2, 3, 4, 7, 11, 16, 25, 39, ...	2	5	A120415
1	4	6	1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 21, ...	3	5	A120446
1	5	6	1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 19, ...	4	5	A121832
2	3	6	1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 6, 7, 10, 15, ...	1/2	2	A121833
1	5	5	1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 17, 27, ...	4	4	A143447*
1	6	6	1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	5	5	A143448*
1	7	7	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	6	6	A143449*
1	8	8	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	7	7	A143450*
1	9	9	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, 9, ...	8	8	A143451*
1	10	10	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 7, ...	9	9	A143452*

Символ * рядом с номером последовательности означает, что приведенные члены последовательности совпадают с числами, указанными в [8], начиная с некоторого номера, а символ ** указывает на то, что приведенные члены последовательности являются абсолютными величинами чисел, указанных в [8].

Заключение

Полученные результаты могут играть особую роль в построении моделей машинного обучения при вычислении различных комбинаций событий; в проектировании баз данных при подсчете количества возмож-

ных комбинаций данных для определения требований к их хранению; в исследовании свойств данных и прогнозировании изменений для принятия более обоснованных решений; в разработке алгоритмов машинного обучения для анализа больших объемов данных; в определении оптимальных решений для различных задач, связанных с обработкой данных, таких как управление проектами, планирование и оптимизация производственных процессов.

Рассмотренные в данной статье вопросы также имеют важное значение для развития общей теории комбинаторного анализа и решения ряда прикладных задач перечислительной комбинаторики. Дальнейшее изучение частей пирамиды Паскаля позволит расширить число соотношений между известными объектами, а также получить новые, ранее неизвестные объекты.

Литература

1. Бондаренко Л. Н. Моделирование комбинаторных последовательностей // Образовательные ресурсы и технологии. 2019. № 2 (27). С. 64–73. DOI: 10.21777/2500-2112-2019-2-64-73.
2. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000. 294 с.
3. Кузьмин О. В., Серёгина М. В. Верхние отсечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика. 2010. Т. 3, вып. 4. С. 533–543.
4. Платонов М. Л., Докин В. Н. Треугольная схема развития популяций // Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1975. № 35. С. 26–31.
5. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
6. Ćerin Z. Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers // Journal of Integer Sequences. 2007. Vol. 10. Article 07.2.5. 15 p., electronic only: <https://www.maths.tcd.ie/EMIS/journals/JIS/VOL10/Cerin/cerin45.pdf> (accessed: 22.10.2023).
7. Kuzmin O. V., Seregina M. V. Plane section of generalized Pascal pyramid and their interpretations // Discrete Mathematics and Applications. 2010. Vol. 20, No. 4. P. 377–389. DOI: <https://doi.org/10.1515/DMA.2010.023>.
8. Sloane N. J. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at <http://oeis.org>. (accessed: 22.10.2023).

Статья поступила в редакцию 01.09.2023; одобрена после рецензирования 25.10.2023; принята к публикации 01.12.2023.

MODELING OF A SEGMENT'S COMPLETE COVERINGS BASED
ON THE SUMS OF PASCAL'S PYRAMID PLANE SECTIONS
ELEMENTS

Oleg V. Kuzmin

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
The Department Head of Probability Theory and Discrete Mathematics
Irkutsk State University
20 Gagarin Blvd., Irkutsk, 664003, Russia

Marina V. Strikhar

Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Department of Applied Mechanics and Mathematics
Zabaikal'sk Rail Transport Institute
Irkutsk State Transport University
11 Magistralnaya st., Chita, 672040, Russia

Abstract. Combinatorial objects play an important role in data processing problems, storage, analysis, creation of algorithms and optimization. This work is devoted to the modeling of combinatorial numbers and to the study of some of their geometric properties and interpretations based on a spatial combinatorial configuration called Pascal's pyramid. Complete coverings of a segment and their relationship with combinatorial objects of a hierarchical structure are considered. A formula for calculating the number of a segment's complete coverings based on the sums of Pascal's pyramid plane sections elements is obtained. Recurrence relations and generating functions of the segment's complete coverings number are found. Various formulas for calculating the number of such coverings are obtained, because of the symmetry of Pascal's pyramid and some of the most important special cases are considered using the known combinatorial numbers as example.

Keywords: modeling, data processing, coverage of a segment, hierarchical structure, Pascal's pyramid, plane section of Pascal's pyramid, numerical sequence, recurrence relation, generating function.

For citation

Kuzmin O. V., Strikhar M. V. Modeling of a Segment's Complete Coverings Based on the Sums of Pascal's Pyramid Plane Sections Elements // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2023. N. 4. P. 38–52.

The article was submitted 01.09.2023; approved after reviewing 25.10.2023; accepted for publication 01.12.2023.