ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья
УДК 517.925
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-2-3-12

О НЕКОТОРЫХ БИФУРКАЦИЯХ СИММЕТРИЧНЫХ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© Ройтенберг Владимир Шлеймович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский просп., 88
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются динамические системы на плоскости, задаваемые кусочно-гладкими векторными полями, зависящими от двух параметров. Динамические системы, используемые в приложениях, часто обладают разного рода симметрией. Поэтому естественно изучение бифуркаций в таких системах. Здесь рассматриваются векторные поля, инвариантные относительно инволюции плоскости, имеющей единственную неподвижную точку. Предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет периодическую траекторию Г, проходящую через два симметричных сшитых седла и не содержащую других особых точек. Получена бифуркационная диаграмма для типичного семейства векторных полей — разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по типам фазовых портретов в достаточно малой окрестности периодической траектории Г. В частности, установлено число и тип периодических траекторий, рождающихся из Г при изменении параметров.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, кусочно-гладкая динамическая система, симметрия, сшитое седло, периодическая траектория, бифуркация, бифуркационная диаграмма.

Для цитирования
Ройтенберг В. Ш. О некоторых бифуркациях симметричных кусочно-гладких динамических систем на плоскости // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 2. С. 3–12.

Введение

Описанию типичных бифуркаций кусочно-гладких динамических систем (векторных полей) на плоскости посвящено большое число работ (книги [1–3] и статьи [4–8]). Естественно изучать бифуркации таких систем, которые обладают различного рода симметрией. Для систем с центральной симметрией в [9] описаны бифуркации сшитых фокусов, а в [10; 11] — бифуркации контуров из двух симметричных периодических траекторий, проходящих через особую точку типа сшитое седло.

В этой работе рассматриваются системы, инвариантные относительно инволюции фазовой плоскости с одной неподвижной точкой. Центральная симметрия — частный случай такой инволюции. Описаны бифуркации в окрестности периодической траектории, проходящей через два сшитых седла при типичном двухпараметрическом возмущении системы.

1 Предварительные сведения

Пусть $I:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ — C^∞-диффеоморфизм, являющийся инволюцией, то есть $I^2 := I \circ I$ – тождественное отображение, и O — его единственная неподвижная точка. Основной пример такой инволюции — центральная симметрия $x \mapsto -x$.

Пусть D — разбиение плоскости $\mathbf{R}^2$ на замкнутые множества M_i, $i \in \{1,...,n\}$, с C^∞-гладкой границей ∂M_i такие, что $M_j \cap M_k = \partial M_j \cap \partial M_k$ если $j,k \in \{1,..,n\}$, $j \neq k$. Ясно, что $M_{jk} := M_j \cap M_k \neq \varnothing$ состоит из связных компонент ∂M_j и ∂M_k.

Обозначим $\mathrm{X}^r(M_i)$ множество векторных полей класса C^r $(r \geq 1)$ на M_i. *Кусочно-гладким векторным полем на* $\mathbf{R}^2$, задаваемом векторными полями $\boldsymbol{v}^i \in \mathrm{X}^r(M_i)$, $i \in \{1,...,n\}$, назовем класс всех таких векторных полей $\tilde{\boldsymbol{v}}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, что $\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \boldsymbol{v}^i(x)$, если $x \in \operatorname{int} M_i$, $i \in \{1,...,n\}$. Будем его рассматривать как точку $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1,...,\boldsymbol{v}^n)$ множества $\mathrm{X}^r(\mathbf{R}^2, D) := \mathrm{X}^r(M_1) \times ... \times \mathrm{X}^r(M_n)$.

Предположим теперь, что разбиение D инвариантно относительно инволюции I, то есть существует биекция σ множества индексов $\{1,...,n\}$ такая, что $\forall i \in \{1,...,n\}$ $I(M_i) = M_{\sigma(i)}$. Векторное поле $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1,...,\boldsymbol{v}^n) \in \mathrm{X}^r(\mathbf{R}^2, D)$ назовем *симметричным* или *инвариантным относительно инволюции* I, если $\forall i \in \{1,...,n\}$ $dI \circ \boldsymbol{v}^i = \boldsymbol{v}^{\sigma(i)} \circ I$. Обозначим $\mathrm{X}^r_I(\mathbf{R}^2, D)$ подмножество в $\mathrm{X}^r(\mathbf{R}^2, D)$, состоящее из таких векторных полей. Простейший пример множества $\mathrm{X}^r_I(\mathbf{R}^2, D)$ получается, если D — разбиение $\mathbf{R}^2$ на две полуплоскости $\mathbf{R} \times [0,\infty)$ и $\mathbf{R} \times (-\infty, 0]$, а I — центральная симметрия.

Следуя определению из [1, с. 95] *траекториями поля* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{X}^r(\mathbf{R}^2, D)$, будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \boldsymbol{v}^*(x)$, где $\boldsymbol{v}^*(x) = \{\boldsymbol{v}^i(x)\}$, если $x \in \operatorname{int} M_i$ и $\boldsymbol{v}^*(x) = \{s\boldsymbol{v}^i(x) + (1-s)\boldsymbol{v}^j(x),\, s \in [0, 1]\}$, если $x \in M_{ij}$.

Точки $x \in M_{ij}$, в которых векторы $\boldsymbol{v}^i(x)$ и $\boldsymbol{v}^j(x)$ не касаются M_{ij} и направлены в одну сторону от M_{ij}, будем называть *простыми.* Пусть $a \in M_{ij}$ — простая точка и для определенности $\boldsymbol{v}^i(a)$ и $\boldsymbol{v}^j(a)$ направлены внутрь M_i. Тогда положительная (отрицательная) полутраектория поля $\boldsymbol{v}^i$ ($\boldsymbol{v}^j$), начинающаяся в точке a, является положительной (отрицательной) полутраектория поля $\boldsymbol{v}$, начинающейся в этой точке, или ее частью. Для остальных точек $a \in M_{ij}$ в $\boldsymbol{v}^*(a)$ существует единственный вектор $\boldsymbol{v}_{M_{ij}}(a)$, касающийся M_{ij}.

Локальные C^∞-координаты (x_1, x_2) в окрестности $V(a)$ точки $a \in M_{ij}$ назовем *правильными*, если точка a имеет нулевые координаты, а $M_i \cap V(a)$ ($M_j \cap V(a)$) задается неравенством $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах

$$\boldsymbol{v}^\alpha(x) = P_1^\alpha(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + P_2^\alpha(x_1, x_2)\partial/\partial x_2,$$

где $P_1^\alpha, P_2^\alpha \in C^r$, $\alpha \in \{i, j\}$.

Пусть векторы $\boldsymbol{v}^i(a)$ и $\boldsymbol{v}^j(a)$ ненулевые и только один из них для определенности $\boldsymbol{v}^i(a)$ касается M_{ij}: $P_2^i(0,0) = 0$, $P_1^j(0,0) \neq 0$. Если $P_1^i(0,0)\partial P_2^i(0,0)/\partial x_1 > 0$, а $P_1^j(0,0) > 0$ ($P_1^j(0,0) < 0$), то точку a будем называть *сходящейся (расходящейся) развилкой* (рис. 1а).

Пусть векторы $\boldsymbol{v}^i(a)$ и $\boldsymbol{v}^j(a)$ направлены в разные стороны от M_{ij}, то есть $P_2^i(0,0)P_2^j(0,0) < 0$. Тогда для точек $x \in M_{ij}$, достаточно близких к a, определен вектор $\boldsymbol{v}_{M_{ij}}(x) = P^{ij}(x_1)\partial/\partial x_1 + 0 \cdot \partial/\partial x_2$, касающийся M_{ij}, при этом [1, с. 163] $P^{ij}(x_1) = \dfrac{P_1^i P_2^j - P_1^j P_2^i}{P_2^j - P_1^j}(x_1, 0)$. Точку a будем называть *квазиседлом* (рис. 1б), если $P^{ij}(0) = 0$, $(P^{ij})'(0)P_2^i(0,0) < 0$.

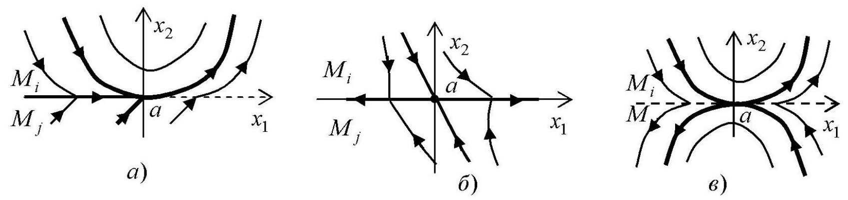

Рис. 1. Особые точки: а) сходящаяся развилка; б) квазиседло; в) сшитое седло

Пусть векторы $\boldsymbol{v}^i(a)$ и $\boldsymbol{v}^j(a)$ ненулевые и оба касаются M_{ij}, то есть $P_2^i(0,0) = P_2^j(0,0) = 0$. Пусть $P_1^\alpha(0,0)\partial P_2^\alpha(0,0)/\partial x_1 > 0$ для $\alpha \in \{i, j\}$. Точку a назовем *сшитым седлом*, если $P_1^i(0,0)P_1^j(0,0) < 0$ (рис. 1в). Положительные (отрицательные) полутраектории поля $\boldsymbol{v}$, начинающиеся в точке a как положительные (отрицательные) полутраектории векторных полей $\boldsymbol{v}^i$ и $\boldsymbol{v}^j$, будем называть *выходящими* (*входящими*) *сепаратрисами* точки a.

2 Условия

Пусть $\{\boldsymbol{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{E}^0}$ — семейство полей $\boldsymbol{v}_\varepsilon=(\boldsymbol{v}_\varepsilon^1,\ldots,\boldsymbol{v}_\varepsilon^n)\in\mathrm{X}_I^r(\mathbf{R}^2,D)$, зависящих от параметра ε, меняющегося в некоторой окрестности E^0 двумерного евклидова пространства. Будем предполагать, что отображения $M_i\times\mathrm{E}^0\ni(x,\varepsilon)\mapsto\boldsymbol{v}_\varepsilon^i(x)$ $i\in\{1,\ldots,n\}$, принадлежат классу C^r ($r\geq 2$).

Пусть для векторного поля $\boldsymbol{v}_0$ точки O_1^0 ($O_1^0\neq O$) и $O_2^0=I(O_1^0)$ — два симметричных сшитых седла, а L_1 — дуга траектории с концами в точках O_1^0 и O_2^0, принадлежащая выходящей сепаратрисе точки O_1^0 и входящей сепаратрисе точки O_2^0, причем все точки пересечения L_1 с ∂M_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, отличные от O_1^0 и O_2^0, являются простыми. Обозначим $L_2:=I(L_1)$. Замкнутая кривая $\Gamma:=L_1\cup L_2$ является периодической траекторией поля $\boldsymbol{v}_0$. По теореме Жордана $\mathbf{R}^2\setminus\Gamma$ состоит из двух связных компонент K_+ и K_-.

Одна из компонент K_+ или K_- (для определенности пусть K_+) не пересекается с сепаратрисами точек O_1^0 и O_2^0 (рис. 2).

Пусть $O_1^0\in M_{i_1j_1}$, (x_1,x_2) — правильные координаты в окрестности $V(O_1^0)$ точки O_1^0, $\boldsymbol{v}_\varepsilon^\alpha(x)=\tilde{P}_1^\alpha(x_1,x_2,\varepsilon)\partial/\partial x_1+\tilde{P}_2^\alpha(x_1,x_2,\varepsilon)\partial/\partial x_2$ для $\alpha=i_1$ и $\alpha=j_1$. Мы можем считать, что $\tilde{P}_1^{i_1}(0,0,0)>0$, $\tilde{P}_1^{j_1}(0,0,0)<0$, а дуга L_1 содержит положительную полутраекторию поля $\boldsymbol{v}_0^{i_1}$, начинающуюся в точке O_1^0.

Пусть $T_1:(-l,l)\to V(O_1^0)$ отображение, ставящее числу $u\in(-l,l)$ точку с координатами $(u,\,0)$. Пусть точка $a_1\in L_1\cap\operatorname{int}M_{i_1}$, а $T_2:(-1,1)\to\operatorname{int}M_{i_1}$ — C^r-гладкое вложение такое, что $T_2(0)=a_1$, $T_2(0,1)\subset K_+$, трансверсальное траекториям поля $\boldsymbol{v}_0^{i_1}$.

Согласно [4] и [10] при достаточно малом $\bar{u}\in(0,l)$ определено отображение по траекториям поля $\boldsymbol{v}_0$: $T_1(u)\mapsto T_2(f_+(u))$, $u\in[0,\bar{u})$, и отображение по траекториям поля $-\boldsymbol{v}_0$: $T_1(u)\mapsto I(T_2(f_-(u)))$, $u\in[0,\bar{u})$, такие, что $f_\pm(\cdot)\in C^r$, $f_\pm(0)=f_\pm'(0)=0$, $f_\pm''(0)>0$. Число $\lambda:=f_+''(0)/f_-''(0)$ не зависит от произвола в выборе отображений T_1 и T_2. Назовем его *характеристикой контура* Γ.

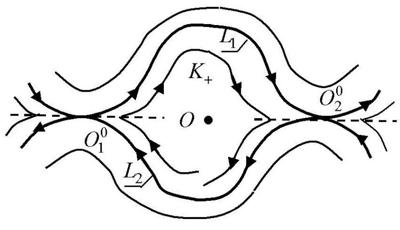

Рис. 2. Контур из сепаратрис сшитого седла. Характеристика контура $\lambda < 1$

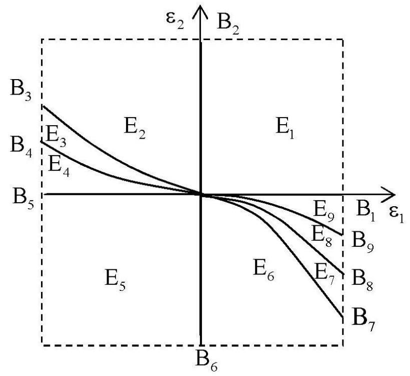

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма

По теореме о неявной функции найдется такая окрестности нуля $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$, что для каждого $\alpha \in \{i_1, j_1\}$ существует единственная C^r-функция $\xi_\alpha : \mathrm{E}' \to \mathbf{R}$ такая, $\xi_\alpha(0) = 0$, $\partial P_2^\alpha(\xi_\alpha(\varepsilon), 0, \varepsilon)/\partial x_1 \equiv 0$. Обозначим $O_\alpha(\varepsilon)$ точку в окрестности точки O_1^0 с координатами $(\xi_\alpha(\varepsilon), 0)$, $\alpha \in \{i_1, j_1\}$, $\xi := \xi_{j_1} - \xi_{i_1}$. Пусть $I(M_{i_1}) = M_{i_2}$, $I(M_{j_1}) = M_{j_2}$. Обозначим $O_{i_2}(\varepsilon) := I(O_{i_1}(\varepsilon))$, $O_{j_2}(\varepsilon) := I(O_{j_1}(\varepsilon))$. Мы можем считать окрестность E' выбранной столь малой, что при $\varepsilon \in \mathrm{E}'$ $\xi(\varepsilon) = 0$ ($\xi(\varepsilon) \neq 0$) точки $O_{i_1}(\varepsilon)$ и $O_{j_1}(\varepsilon)$, $O_{i_2}(\varepsilon)$ и $O_{j_2}(\varepsilon)$) совпадают (не совпадают) и являются сшитыми седлами (сходящимися развилками в случае $\xi(\varepsilon) < 0$ и расходящимися развилками в случае $\xi(\varepsilon) > 0$). Считая E' достаточно малой, из [1, с. 180] получаем, что при $\xi(\varepsilon) \neq 0$ на дуге $M_{i_k j_k}$ ($k = 1, 2$) между точками $O_{i_k}(\varepsilon)$ и $O_{j_k}(\varepsilon)$ существует единственная особая точка — квазиседло $O_{i_k j_k}(\varepsilon)$.

Поскольку пересечение дуги $L_1 \setminus \{O_1^0, O_2^0\}$ с границами множеств M_k состоит только из простых точек, то окрестность E' можно выбрать так, что положительная (отрицательная) полутраектория поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathrm{E}'$, начинающаяся в точке $O_{i_1}(\varepsilon)$ ($O_{j_2}(\varepsilon)$) как положительная (отрицательная) полутраектория поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon^{i_1}$ ($\boldsymbol{v}_\varepsilon^{j_2}$), пересекает трансверсаль $T_2(-1,1)$ в точке $T_2(\eta_1(\varepsilon))$ ($T_2(\eta_2(\varepsilon))$), где $\eta_k \in C^r$, $\eta_k(0) = 0$, $k = 1, 2$. Обозначим $\eta := \eta_1 - \eta_2$.

Потребуем, чтобы производные $\partial\xi(0)/\partial\varepsilon = 0$ и $\partial\eta(0)/\partial\varepsilon = 0$ были линейно независимы.

Тогда существуют такие C^r-координаты $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ в окрестности $\mathrm{E}''\subset\mathrm{E}'$ нуля в пространстве параметров, что для любого $\varepsilon\in\mathrm{E}''$ $\xi(\varepsilon)=\varepsilon_1$, $\eta(\varepsilon)=\varepsilon_2$. В дальнейшем будем отождествлять точку $\varepsilon\in\mathrm{E}''$ со строкой $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\mathbf{R}^2$ ее координат.

3 Бифуркации периодической траектории, образованной сепаратрисами сшитых седел

Теорема. *Пусть для семейства векторных полей* $\{\boldsymbol{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{E}^0}$ *характеристика контура* Γ *удовлетворяет условию* $\lambda<1$. *Тогда существуют окрестность* $U=I(U)$ *контура* Γ *и разбиение окрестности нуля* $\mathrm{E}=(-\delta,\delta)^2$ *на плоскости параметров на множества* $\mathrm{B}_0=\{(0,0)\}$, B_k, E_k, $k\in\{1,2,...,9\}$, *где (рис. 3)*

$$\mathrm{B}_1=(0,\delta)\times\{0\},\ \mathrm{B}_2=\{0\}\times(0,\delta),\ \mathrm{B}_i=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_2=\beta_i(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_i:(-\delta,0)\to(0,\delta),\ \beta_i\in C^r,\ \beta_i(0-)=\beta_i'(0-)=0,\ i=3,4,\ \beta_4(\varepsilon_1)<\beta_3(\varepsilon_1),$$

$$\mathrm{B}_5=(-\delta,0)\times\{0\},\ \mathrm{B}_6=\{0\}\times(-\delta,0),\ \mathrm{B}_j=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_2=\beta_j(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_j:(0,\delta)\to(-\delta,0),\ \beta_j\in C^r,\ \beta_j(0+)=\beta_i'(0+)=0,\ j=7,8,9,$$

E_k *— компонента* $\mathrm{E}\setminus\bigcup_{k=0}^{9}\mathrm{B}_k$, *содержащая* B_k *и* B_{k+1} *(*$\mathrm{B}_{10}:=\mathrm{B}_1$*), такие, что схемы векторных полей* $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ *в* $U(\Gamma)$ *при* $\varepsilon\in\mathrm{E}$ *имеют вид, изображенный на рисунке* 4.

Случай характеристики контура $\lambda>1$ *сводится к случаю* $\lambda<1$ *переходом к семейству векторных полей* $\{-\boldsymbol{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{E}^0}$.

Доказательство. Введем отношение эквивалентности: $z_1\sim z_2$, если $I(z_1)=z_2$. Фактор-пространство $\tilde{M}:=(\mathbf{R}^2\setminus\{O\})/\sim$ является гладким многообразием, а проекция $p:\mathbf{R}^2\setminus\{O\}\to\tilde{M}$ — двулистным C^∞-накрытием [12]. В силу инвариантности разбиения D, не совпадающие между собой множества $p(\tilde{M}_i)$, $i\in\{1,2,...,n\}$, образуют разбиение $\tilde{D}$ многообразия $\tilde{M}$ на множества $\tilde{M}_j$, $j\in\{1,2,...,\tilde{n}\}$, с гладкими границами, пересекающимися друг с другом только по границам. На многообразии $\tilde{M}$ с разбиением $\tilde{D}$ определены кусочно-гладкие векторные поля $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon=(\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon^1,...,\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon^{\tilde{n}})$, где векторное поле $\boldsymbol{v}_\varepsilon^j$ на $\tilde{M}_j$ задается следующим образом. Если $\tilde{z}\in\tilde{M}_j$, то пусть $z\in M_i$ — точка, для которой $\tilde{z}=p(z)$. Так как $dp\,\boldsymbol{v}_\varepsilon^{\sigma(i)}(I(z))=dp\,\boldsymbol{v}_\varepsilon^i(z)$, то можно положить $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon^j(\tilde{z}):=dp\,\boldsymbol{v}_\varepsilon^i(z)$.

Векторное поле $\tilde{\boldsymbol{v}}_0$ имеет сшитое седло $\tilde{O}^0=p(O_1^0)=p(O_2^0)$ и периодическую траекторию $\tilde{\Gamma}=p(\Gamma)=p(L_1)=p(L_2)$, проходящую через $\tilde{O}^0$. Бифуркации такой траектории изучены в работе [4]. Из нее следует, что бифуркационная диаграмма семейства векторных полей $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon$ в некоторой окрестности $\tilde{U}$ кривой $\tilde{\Gamma}$ имеет указанный в теореме вид с тем изменением, что во всех формулировках, где речь идет об особых точках, надо заменить $O_{i_1}(\varepsilon)$ и $O_{i_2}(\varepsilon)$, $O_{j_1}(\varepsilon)$ и $O_{j_2}(\varepsilon)$), $O_{i_1 j_1}(\varepsilon)$ и $O_{i_2 j_2}(\varepsilon)$ соответственно на $p(O_{i_1}(\varepsilon)) = p(O_{i_2}(\varepsilon))$, $p(O_{j_1}(\varepsilon)) = p(O_{j_2}(\varepsilon))$, $p(O_{i_1 j_1}(\varepsilon)) = p(O_{i_2 j_2}(\varepsilon))$.

Можно считать, что $U = p^{-1}(\tilde{U})$ — цилиндрическая окрестность Γ, $I(U) = U$, отображение T_2 и $\mathrm{E} = (-\delta, \delta)^2$ выбраны так, что $T_2(-1,1)$ — трансверсаль для траекторий полей $\boldsymbol{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$ и не содержит симметричных точек, а $U \setminus T_2(-1,1)$ односвязное множество.

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_7$ поле $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon$ имеет в $\tilde{U}$ устойчивую и неустойчивую периодические траектории, не гомотопные нулю в $\tilde{U}$. Пусть $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ — одна из этих траекторий. Тогда $p^{-1}(\tilde{\Gamma}_\varepsilon)$ либо 1) является периодической траекторией, либо 2) состоит из двух периодических траекторий Γ_ε^1 и $\Gamma_\varepsilon^2 = I(\Gamma_\varepsilon^1)$.

В случае 2) Γ_ε^1 и Γ_ε^2 негомотопны нулю в U и потому пересекают трансверсаль $T_2(-1,1)$ в двух разных точках z_1 и z_2. Тогда периодическая траектория $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ должна пересекать трансверсаль $p(T_2(-1,1))$ также в двух разных точках $p(z_1)$ и $p(z_1)$, что невозможно. Таким образом, возможен только случай 1) . Поэтому в окрестности U кривой Γ лежат ровно две периодические траектории поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon$. Поскольку дуга траектории поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ с концами на трансверсали $T_2(-1,1)$ проецируется в дугу траектории поля $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon$ с концами на трансверсали $p(T_2(-1,1))$, то функция последования по траекториям поля $\tilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon$ на трансверсали $p(T_2(-1,1))$ является и функцией последования по траекториям поля $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ на трансверсали $T_2(-1,1)$. Следовательно, в U одна периодическая траектория устойчивая гиперболическая, а вторая неустойчивая гиперболическая.

Аналогично получаем существование периодических траекторий при $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$, $i \in \{1,2,3,8,9\}$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_j$, $j \in \{0,1,2,3,7,8,9\}$ и сепаратрисных контуров при $\varepsilon \in \mathrm{B}_k$. $k \in \{4,8\}$.

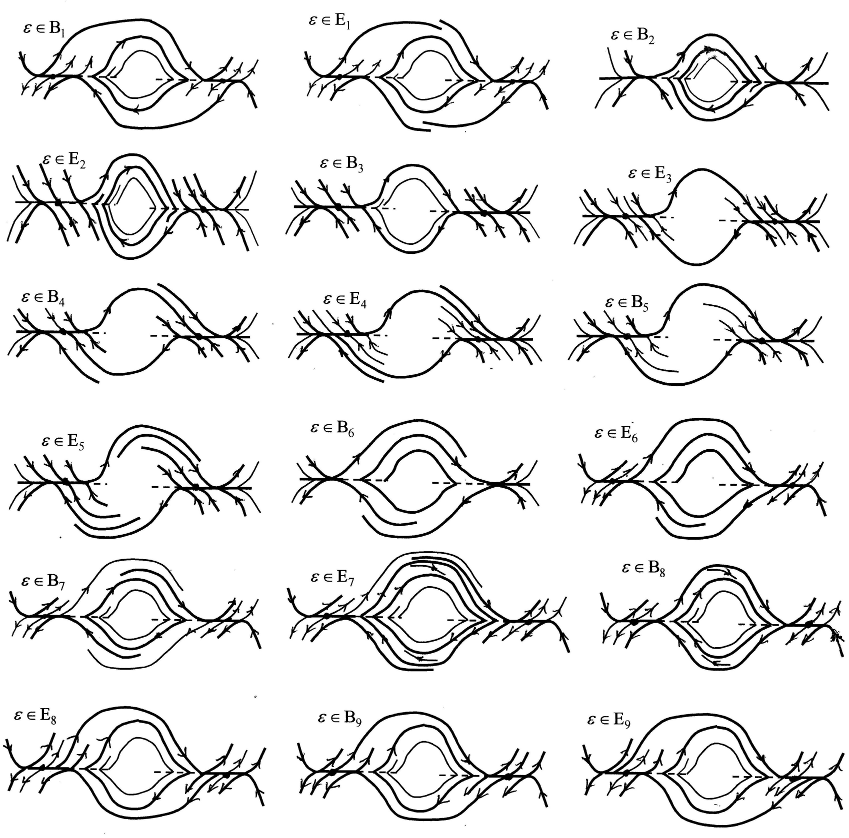

Рис. 4. Перестройки фазовых портретов

Заключение

Хотя изучение бифуркаций кусочно-гладких динамических систем с симметрией представляет несомненный интерес, пока имеется мало результатов в этом направлении. Поэтому продолжение исследования таких бифуркаций является актуальной задачей. В данной работе рассматривалось двухпараметрическое семейство кусочно-гладких систем на плоскости, инвариантных при инволюции, имеющей единственную неподвижную точку. Описаны бифуркации «полуустойчивой» периодической траектории, проходящей через две симметричные особые точки. В частности, найдены области параметров, при которых система имеет устойчивую периодическую траекторию. Этот результат может быть полезен для теории колебаний.

Литература

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.
2. Piecewise smooth dynamical systems / di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A.R., Kowalczyk P. Appl. Math. Sci. V. 163. London: Springer-Verlag. 2008. 483 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-708-4
3. Glendinning P., Jeffrey M. R. An Introduction to Piecewise Smooth Dynamics. Advanced Courses in Mathematics. CRM. Barcelona. 2019. 129 p. DOI: 10.1007/978-3-030-23689-2
4. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях замкнутой траектории кусочно-гладкого векторного поля, проходящей через особую точку на линии разрыва // Математика, физика, экономика и физико-математическое образование: материалы конференции «Чтения Ушинского». Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. С. 23–29.
5. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. J. Differential Equations. 2011. Vol. 250. No. 4. P. 1967–2023. DOI: 10.1016/j/jde/2010/11/016
6. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations / S. J. Hogan, M. E. Homer, M. R. Jeffrey, R. Szalai. J. Nonlinear Sci. 2016. V. 26. P. 1161–1173. DOI: 10.1007/s00332-016-9301-1
7. Simpson D. J. W. A Compendium of Hopf-Like Bifurcations in Piecewise-Smooth Dynamical Systems // arXiv: 1804.1 1009v1 [math. DS] 30 Apr 2018. 12 p.
8. Ройтенберг В. Ш. О рождении замкнутых траекторий из двух петель сепаратрис сшитого седло-узла, проходящих через развилку // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: естественно-математические и технические науки. 2023. № 3 (326). С. 11–20. DOI: 10.53598/2410-3225-2023-3-326-11-20
9. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации сшитого фокуса кусочно-гладкой динамической системы с центральной симметрией // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 3. С. 3–13. DOI: 10.18101/2304-5728-2021-3-3-13
10. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 98–113. DOI: 10.21685/2072-3040-2020-3-8
11. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях букета из двух периодических траекторий кусочно-гладкой динамической системы с центральной симметрией // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 3–16. DOI: 10.21685/2072-3040-2021-4-1
12. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. Москва: Наука, 1989. 528 с.

Статья поступила в редакцию 06.05.2024; одобрена после рецензирования 20.06.2024; принята к публикации 23.09.2024.

ON SOME BIFURCATIONS OF SYMMETRICAL PIECEWISE SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS ON THE PLANE

Vladimir Sh. Roitenberg
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor
Department of Higher Mathematics
Yaroslavl State Technical University
88 Moskovskij Prospekt, Yaroslavl, 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. The work examines dynamical systems on the plane, defined by piecewise smooth vector fields depending on two parameters. Dynamical systems used in applications often have various kinds of symmetry. Therefore, it is natural to study bifurcations in such systems. Here we consider vector fields that are invariant under the involution of a plane having a single fixed point. It is assumed that for zero values of the parameters the vector field has a periodic trajectory Γ passing through two symmetric stitched saddles and not containing other singular points. We describe the bifurcations of phase portraits in the neighborhood of Γ for a generic family of vector fields. In particular, the number and type of periodic trajectories generated from Γ when the parameters change has been established.

Keywords: piecewise smooth vector field, piecewise smooth dynamical system, symmetry, fused saddle, periodic trajectory, bifurcation, bifurcation diagram.

For citation

Roitenberg V. Sh. On Some Bifurcations of Symmetrical Piecewise Smooth Dynamical Systems on the Plane // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 2. P. 3–12.

The article was submitted 06.05.2024; approved after reviewing 20.06.2024; accepted for publication 23.09.2024.