

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

---

Краткое сообщение

УДК 519.86

DOI: 10.18101/2304-5728-2024-2-13-21

## ДОПУСТИМЫЕ ПЛАНЫ В ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ

© Ассаул Виктор Николаевич

кандидат технических наук,

Санкт-Петербургский государственный университет

аэрокосмического приборостроения

Россия, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67А

vicvic21@yandex.ru

© Погодин Игорь Евгеньевич

доктор физико-математических наук, профессор,

Военно-морской политехнический институт

Россия, 198510, г. Санкт-Петербург, ул. Разводная, 15

ierogodin@mail.ru

**Аннотация.** В работе даются оценки числа допустимых решений транспортных задач широкого класса. Эти оценки делаются на основе структурных свойств транспортных задач независимо от вида целевой функции и конкретных значений запасов, потребностей и тарифов. Рассматриваются базисные планы, удовлетворяющие только классическим технологическим ограничениям и условию отсутствия циклов в закрытой задаче. Анализируются двудольные графы и соответствующие им деревья. В работе используются методы комбинаторики и теории графов. Полученные количественные и качественные характеристики множества допустимых планов транспортных задач могут быть полезны как для оценки сверху числа планов конкретной транспортной задачи, так и при решении различных модификаций транспортных задач. Приведены формулы для оценки роста числа планов с ростом размеров транспортной задачи и примеры подсчета для определенных размерностей задачи.

**Ключевые слова:** транспортная задача, транспортная таблица, допустимый план, базисный план, циклическая перевозка, мощности поставщиков, емкости потребителей, двудольный граф, дерево, код дерева.

### Для цитирования

Ассаул В. Н., Погодин И. Е. Допустимые планы в транспортной задаче // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 2. С. 13–21.

### Введение

Рассмотрим вопрос о числе решений (планов) транспортной задачи (ТЗ) вне зависимости от векторов мощностей и емкостей участников перевозок. Это означает, что транспортная таблица рассматривается без указания числовых характеристик, описывающих наличие груза у поставщиков и потребностей потребителей. Здесь нас не интересует поиск

экстремума целевой функции, поэтому различные формы тарифов и связанные с этим ограничения также выпадают из круга нашего внимания.

Такая задача интересна сама по себе [1], а также для оценки числа возможных решений для модифицированных ТЗ с неединственным решением, когда нужно оценить число возможных локальных экстремумов [2–4]. Различные модификации ТЗ с усложненной постановкой находят широкое практическое применение [5–7], поэтому дополнительная информация о свойствах множеств их решений может оказаться весьма полезной.

По сути нас интересуют способы заполнения транспортной таблицы для широкого класса реальных ТЗ. Внешними параметрами остаются только число поставщиков и потребителей. Внутренние ограничения связаны с постановкой ТЗ: в заполненной транспортной таблице не должно быть пустых строк и столбцов. Будем рассматривать число таких базисных решений и называть их допустимыми.

В задачах линейного программирования базисными называют переменные, каждая из которых входит в единственное ограничение задачи с единичным коэффициентом [8]. Применительно к ТЗ это условие означает, что число заполненных клеток в транспортной таблице должно быть ровно на единицу меньше общего числа участников перевозок, при этом в решении не должно быть циклов, построенных на заполненных клетках [8].

Фактически задача становится комбинаторной, нужно найти число способов заполнения ячеек прямоугольной таблицы (например, звездочками) с учетом отмеченных выше требований. Тогда для каждого варианта заполнения найдется бесконечное число ТЗ, для которых данный вариант будет одним из базисных решений. Если же говорить о подсчете числа базисных решений для конкретной ТЗ, то оно заполнит часть из найденного множества.

### Материалы и методы

Начнем с простейшего случая ТЗ размерности  $2 \times 2$ . Число заполненных клеток должно быть равно трем, поэтому одна клетка остается свободной. Этой клеткой может оказаться любая из имеющихся четырех, поэтому число возможных решений  $N_2=4$ .

Рассмотрим случай таблицы  $2 \times 3$ . Нетрудно убедиться, что число допустимых планов равно 12. Если заполненная клетка одна в строке или столбце, то она насыщена. Обозначим единственную заполненную клетку в строке минусом, а в столбце плюсом. Ненасыщенные клетки обозначим звездочками. Тогда получим следующий набор таблиц с допустимыми планами, которые назовем трафаретами (рис. 1).

1			2			3			4			5			6		
-				-				-	*	+		+	*		*		+
*	+	+	+	*	+	+	+	*	*		+		*	+	*	+	
7			8			9			10			11			12		
+		*		*	+		+	*	*	+	+	+	*	+	+	+	*
	+	*	+	*		+		*	-				-				-

Рис. 1. Допустимые планы для ТЗ размерности 2x3

Рассмотрим ТЗ такого же размера и для каждой ячейки укажем насыщающую поставку, а в соседней таблице расставим знаки насыщений (рис. 2).

8 10 14			8 10 14				
15	8	10	14	15	+	+	+
17	8	10	14	17	+	+	+

Рис. 2. Транспортная таблица и карта насыщений

Накладывая последнюю таблицу на представленные выше трафареты, заметим, что совпадение знаков наблюдается с шестью трафаретами под номерами 4–9. Заполняя эти трафареты, получим все 6 базисных планов данной ТЗ (рис. 3).

5	10		8	7		1		14
3		14		3	14	7	10	
8		7		1	14		10	5
	10	7	8	9		8		9

Рис. 3. Базисные планы конкретной ТЗ

Этот пример показывает, что допустимые планы могут оказаться полезными при подсчете числа базисных планов конкретной ТЗ. Для ТЗ размера  $3 \times 3$  рассмотрим одну из строк, например, первую. Пусть в ней заполнены 3 клетки, тогда в двух других будет заполнено по одной. Вариант такого заполнения приведен в таблице 1.

Таблица 1

*	*	*
*		
	*	

Очевидно, заполнить можно любую ячейку во второй и третьей строках, а полностью заполненной может быть не только первая, но и любая другая строка. С учетом этого число решений такого вида равно  $3 \times 3 \times 3 = 27$ .

Пусть теперь в первых двух строках заполнены по две ячейки, а в третьей одна (табл. 2). Во второй строке обязательно должна быть заполнена третья ячейка, чтобы не образовался цикл. Тогда первую строку можно заполнить тремя способами, вторую двумя, а третью тремя. С учетом того, что строчка с одной заполненной клеткой может быть на любой из трех позиций, получаем число решений такого вида:  $3 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$ . Других вариантов нет, поэтому  $N_3 = 27 + 54 = 81$ .

Таблица 2

*	*	
*		*
*		

Для задачи размерностью  $4 \times 4$  возможны следующие случаи. В первой строке заполнены все клетки (табл. 3):

Таблица 3

*	*	*	*
*			
	*		
		*	

В этом случае с учетом произвольности заполнения строк ниже первой и выбора места для заполненной строки получаем число планов  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ .

Если в первой строке 3 заполненные ячейки, а во второй 2, получим (табл. 4), что таких заполнений будет  $4 \times 3 \times 4 \times 4 = 192$ , а с учетом того, что для строчки с тремя заполнениями 4 варианта, а для строчки с двумя заполнениями 3, получим  $192 \times 4 \times 3 = 2304$ .

Таблица 4

*	*	*	
*			*
	*		
		*	

Наконец, возможны по две клетки в трех строках и одна в оставшейся. Здесь возможны 2 частных случая, когда заполненные клетки в первых двух строках расположены в разных столбцах (табл. 5) либо имеют общий столбец (табл. 6).

Таблица 5

*	*		
		*	*
*		*	
*			

В таблице 5 первая строка допускает 6 различных заполнений, вторая одно, третья 4, а четвертая 4. С учетом произвольного расположения строки с одной заполненной клеткой получаем  $6 \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 = 1152$  варианта.

Таблица 6

*	*		
*			*
*		*	
	*		

В таблице 6 первая строка дает 6 разных заполнений, вторая 4, третья 3, четвертая 4. Как и в таблице 5, произведение этих чисел нужно умножить на 4:  $6 \times 4 \times 1 \times 4 \times 4 = 384$  варианта. Итого, складывая различные варианты заполнения, получаем  $N_4 = 4096$ .

Аналогичный подробный подсчет для случая задачи  $5 \times 5$  дает  $N_5 = 393625$ , а для случая  $6 \times 6$   $N_6 = 63943456$ .

Можно проводить подсчет допустимых планов и без их классификации, как это сделано выше. Например, для задач  $3 \times 3$  и  $4 \times 4$  могут быть использованы формулы (1)–(3), в которых  $N_0 = 2N - 1$ , а  $N = 3, 4, 5$  соответственно:

$$N_3 = \sum_{i=1}^{N_0-2} N! \frac{\sum_{j=\max(1, (N_0-i-1))}^{\min(N, N_0-1-i)} \frac{\sum_{k=\max(1, (N_0-i-j))}^{\min(N, N_0-i-j)} \frac{N!}{k!(N-k)!}}{j!(N-j)!}}{i!(N-i)!}. \quad (1)$$

$$N_4 = \sum_{i=1}^{N_0-3} N! \frac{\sum_{j=\max(1, (N_0-i-2))}^{\min(N, N_0-2-i)} \frac{\sum_{k=\max(1, (N_0-i-j-1))}^{\min(N, N_0-1-i-j)} \frac{\sum_{l=\max(1, (N_0-i-j))}^{\min(1, (N_0-k-i-j))} \frac{N!}{l!(N-l)!}}{k!(N-k)!}}{j!(N-j)!}}{i!(N-i)!}. \quad (2)$$

$$N_5 = \sum_{i=1}^{N_0-4} N! \frac{\sum_{j=\max(1, (N_0-i-2))}^{\min(N, N_0-3-i)} \frac{\sum_{k=\max(1, (N_0-i-j-2))}^{\min(N, N_0-2-i-j)} \frac{\sum_{l=\max(1, (N_0-1-i-j))}^{\min(1, (N_0-1-k-i-j))} \frac{S_l}{l!(N-l)!}}{k!(N-k)!}}{j!(N-j)!}}{i!(N-i)!}, \quad (3)$$

$$\text{где } S_l = \sum_{m=\max(1, (N_0-i-j-k-l))}^{m_0-i-j-k-l)} \frac{N!}{l!(N-l)!}.$$

Определяемые формулами (1)–(3) (здесь  $N_0 = 2 \cdot n - 1$  для квадратных матриц при  $n = m$  (в общем случае при  $n \neq m$ :  $N_0 = n \cdot m - 1$ )) значения для полного числа допустимых планов  $N_k$  несколько завышены, поскольку не очищены от возможных циклов, однако результаты расчетов даже в таком виде обнаруживают тесную связь с проделанными выше с помощью анализа таблиц 1–6 (коэффициент линейной корреляции логарифмов количеств планов по этим двум методикам  $r = 0.997$ ).

Анализ полученных результатов показывает, что логарифмы величин  $N_k$  с ростом  $k$  растут чуть быстрее линейной функции с тенденцией выхода на линейную зависимость. Это означает, что сама величина  $N_k$  стремится к экспоненциальному росту с увеличением размерности задачи.

Отметим, что существует аналогия между транспортными задачами и двудольными графами. Если рассматривать множества поставщиков и потребителей как вершины левой и правой половин двудольного графа, а ребра, соединяющие их, как маршруты перевозок, то можно установить соответствие ТЗ и двудольного графа.

Действительно ребра соединяют только поставщиков и потребителей, нет висячих вершин, не имеющих ребер, а тарифы можно задать как длины ребер, если рассматривать последние как дуги, то есть имеющие направленность от поставщиков к потребителям. Важное для ТЗ условие отсутствия циклов можно ввести, если рассматривать только деревья на таких двудольных графах. На рисунке 4 показаны транспортная таблица с одним из возможных планов и соответствующие ему двудольный граф и дерево.

В этих условиях задача определения числа допустимых планов сводится к подсчету числа деревьев в двудольном графе. Следуя идее Прюфера [9; 10], используемой для доказательства теоремы Кэли о числе деревьев [9; 10], составим код дерева, представленного на рисунке 4. Код данного дерева  $b_3a_3a_2b_2b_2a_1$ .

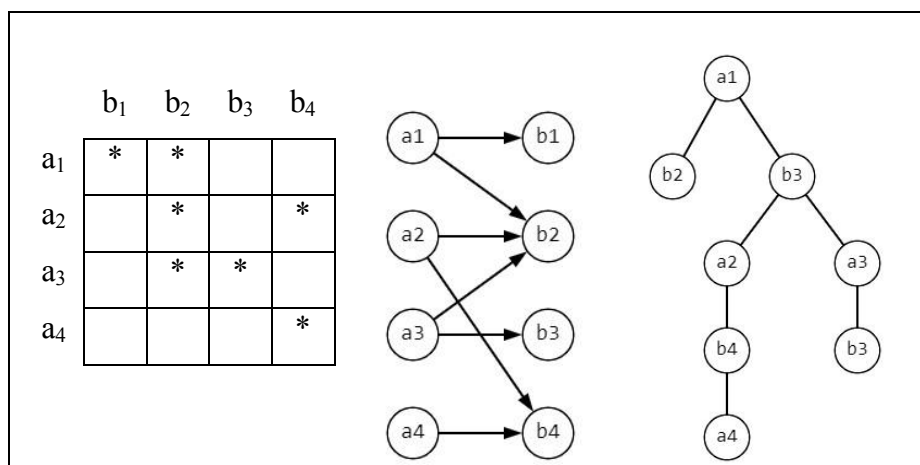


Рис. 4. Транспортная задача и ее граф

В его записи участвовали две группы вершин из разных долей двудольного графа, по четыре вершины в каждой доле. Поэтому число таких кодов, а значит, и деревьев, равно  $4^6$ . Для произвольного  $k$  получаем  $k^{2k-2}$ . В силу упоминавшегося выше соответствия допустимых планов ТЗ и деревьев двудольного графа получаем выражение для числа планов ТЗ:

$$N_k = k^{2k-2}. \quad (4)$$

Заметим, что расчеты по формуле (4) совпадают с полученными ранее оценками для числа допустимых планов ТЗ.

Для случая ТЗ с прямоугольной таблицей имеем двудольный граф с разным числом вершин в долях. В этом случае для  $n$  поставщиков и  $m$  потребителей имеем:

$$N_{nm} = n^{m-1} \times m^{n-1}. \quad (5)$$

Ранее отмечалось, что для задачи размерности  $2 \times 3$  число допустимых планов равно 12. Аналогично тому, как это сделано выше для квадратных транспортных таблиц, нетрудно найти, что для задачи  $2 \times 5$  найдется 80, а для задачи  $3 \times 4$  432 допустимых плана. Расчет по формуле (5) подтверждает эти значения.

### Выводы

В работе проанализированы количественные и качественные характеристики множества допустимых планов ТЗ, которые могут быть полезны при решении различных типов ТЗ, а также при оценке числа базисных планов конкретной ТЗ в модифицированной постановке, отличной от классической.

### Литература

1. Погодин И. Е. О способах оценки числа планов транспортной задачи // Экономика и математические методы. Москва, 2020. Т. 54, вып. 4. С. 116–120. DOI: 10.31857/S042473880012408-7
2. Ассаул В. Н., Погодин И. Е. О транспортной задаче с «экологическим» критерием // Экономика и математические методы. Москва, 2019. Т. 55, вып. 2. С. 58–64. DOI:10.31857/S042473880003951-5
3. Ассаул В. Н., Погодин И. Е. Об одном практическом способе решения транспортной задачи с «экологическим» критерием // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 3. С. 3–13. DOI:10.18101/2304-5728-2022-3-3-13
4. Ассаул В. Н., Погодин И. Е. Об упрощениях решения транспортной задачи с экологическим критерием // Экономика и математические методы. Москва, 2023. Т. 59, вып. 2. С. 122–127. DOI:10.31857/S042473880025864-9
5. Цыплакова О. Н., Цысь Ю. В., Кобылина А. В. Транспортная задача и её применение в решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. Научный журнал. 2014. № 5 (часть 2). С. 178–180.
6. Николаева С. И. Методы нахождения первоначального базисного распределения поставок плана транспортной задачи // Научно-методический журнал «Концепт». 2013. Т. 3. С. 1551–1555.
7. Шелковой А. Н. Обобщенный алгоритм метода дифференциальных рент нахождения оптимального плана транспортной задачи // Известия Курского гос. тех. университета. 2006. № 2. С. 17–20.
8. Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 320 с. ISBN 5-318-00780-5.
9. Татт У. Теория графов. Москва: Мир, 1988. 488 с.
10. Ландо С. К. Введение в дискретную математику. Москва: МЦНМО, 2019. 265 с.

*Статья поступила в редакцию 06.03.2024; одобрена после рецензирования 20.06.2024; принята к публикации 23.09.2024.*



ON THE NUMBER OF ACCEPTABLE SOLUTIONS  
TO THE TRANSPORT PROBLEM

*Viktor N. Assaul*

Cand. Sci. (Techn.), Associate professor  
St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation  
190000, St. Petersburg, Bolshaya Morskaya str., 67, A,  
192212, SPb, pr. Slavy, 8-46  
vicvic21@yandex.ru

*Igor E. Pogodin*

Doct. Sci. (Phys. and Math.), Professor,  
Naval Polytechnic Institute of the VUNC "VMA"Navy,  
198510, St. Petersburg, Razvodnaya str. 15,  
iepogodin@mail.ru

*Abstract.* The paper gives estimates of the number of acceptable solutions to transport problems of a wide class. These estimates are made based on the structural properties of transport tasks, regardless of the type of target function and specific values of stocks, needs and tariffs. Basic solutions satisfying only classical technological constraints and the condition of the absence of cycles in a closed problem are considered. Bipartite graphs and appropriate trees are also considered. The methods of combinatorics and graph theory are used in the work. The obtained quantitative and qualitative characteristics of the set of acceptable transport task solutions can be useful as a upper estimation of amount of solutions in particular transport problem as well as in solving various modifications of transport problems.

*Keywords:* transport problem, transport table, acceptable solution, basic solution, cycles, capacities, demands, bipartite graphs, trees, tree codes.

*For citation*

*Assaul V. N., Pogodin I. E. On the Number of Acceptable Solutions to the Transport Problem // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 2. P. 13–21.*

*The article was submitted 06.03.2024; approved after reviewing 20.06.2024; accepted for publication 23.09.2024.*