ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.544
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-3-3-18

О МАТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГАЗОВ

© **Сушков Владислав Викторович**
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина
Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., 55
vvsu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен вопрос обобщения и расширения метода канонической матрицы решения граничных задач для уравнения типа линеаризованного уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК-уравнение) в зависимости от свойств соответствующей матричной краевой задачи Римана. Собственные значения характеристического уравнения составляют дискретный и непрерывный спектр, причем собственные функции непрерывного спектра относятся к классу обобщенных функций, использование которых приводит к необходимости решения матричной краевой задачи Римана. Описан алгоритм построения канонической матрицы задачи, исследованы ее свойства. Сформулированы необходимые условия применимости метода для общего случая. Для задачи Смолуховского для БГК-уравнения в случае одно-, двух- и многоатомного газа построена каноническая матрица. Доказана теорема о полноте множества собственных функций в пространстве функций, гельдеровых на положительной действительной полуоси.

Ключевые слова: краевая задача Римана, матрица канонических решений, кинетическая теория газов, БГК-уравнение, собственные значения, обобщенные функции, теорема о полноте.

Для цитирования
Сушков В. В. О матричной краевой задаче Римана в аналитическом решении граничных задач теории газов // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 3–18.

Введение

Одним из важнейших при решении граничных задач кинетической теории газа, теории переноса, является метод, часто называемый [1] методом Кейза. Предложенный в 1960 году [2] в работе о переносе нейтронов, уже через два года он был развит и применен К. Черчиньяни [3] в решении граничной задачи для линеаризованного уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК). Сформулированная идеология позволила получать удобные результаты в части разработки новых методов аппроксимации и строить единую теорию получения аналитических решений граничных задач. При этом в зависимости от используемой модели задача сводится к исследованию как скалярных, так и векторно-матричных интегро-дифференциальных уравнений различного вида [4]–[6]. Центральным звеном аналитического решения матрично-векторных граничных задач такого вида является решение матричной краевой задачи Римана, сложность исследования которой в значительной степени и определяет сложность применения метода в целом. Обзор вопроса с акцентом на решение конкретных физических задач дан в работе [1] А. В. Латышева и А. А. Юшканова, однако более общий подход [7] с опорой на работы [8]–[9] позволяет обобщить предлагаемую методику на более широкий класс уравнений.

1 Подводящие соображения

Рассмотрим граничную задачу для уравнения относительно неизвестной двухкомпонентной вектор-функции $Y(x,\mu)$

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}Q_1(\mu')Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}d\mu', \quad (1)$$

где $Q(\mu)$ и $Q_1(\mu)$ – полиномиальные матрицы-функции, а решение ищется в классе функций, непрерывных по x на множестве $0\le x\le+\infty$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых по x на множестве $0<x<+\infty$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$, гельдеровых по μ на промежутке $[0,+\infty]$ при всех $0<x<+\infty$. Граничные условия установим в виде:

$$Y(0,\mu)=Y_0(\mu), \mu>0,$$
$$Y(x,\mu)=Y_{as}(x,\mu), x\to\infty, \mu<0,$$

где $Y_0(\mu)$ – произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию Гельдера, а $Y_{as}(x,\mu)$ – линейная комбинация частных решений.

Граничные задачи такого вида возникают при рассмотрении задач кинетической теории газа и плазмы (в частности, задачи Смолуховского для уравнения с интегралом столкновения в форме Бхатнагара —

Гросса — Крука). Например, случай одно-, двух- и многоатомного газа описывается уравнением с матрицами

$$Q(\mu) = \begin{bmatrix} \gamma(\mu^2 - 1/2) & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, Q_1(\mu) = \begin{bmatrix} \gamma(\mu^2 - 1/2) & l\gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(соответственно, $l = 1, l = 2$ и $l = 5/2$), причем $\gamma = \sqrt{2/(1+2l)}$. Далее в работе будем называть перечисленные задачи частным случаем общей задачи. Разделяя переменные в (1) с помощью анзаца Кейза [2]

$$Y_\eta\left(x,\mu\right) = e^{-\frac{x}{\eta}}\Phi\left(\eta,\mu\right),$$

где параметр $\eta \in \mathbb{C}$, придем к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)n(\eta), \mu \in \mathbb{R},\ \eta \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Момент нулевого порядка

$$n\left(\eta\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} Q_1\left(\mu\right)\Phi\left(\eta,\mu\right)d\mu$$

представляет собой нормирующую вектор-функцию. Собственные функции $\Phi(\eta,\mu)$ будем искать как в классе гельдеровых функций – к ним будут относиться

$$\Phi(\eta_0,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu}Q(\mu)n(\eta_0) = F(\eta_0,\mu)n(\eta_0),$$

соответствующие собственным значениям дискретного спектра η_0, вообще говоря, комплексным, так и в пространстве обобщенных функций

$$\Phi\left(\eta,\mu\right) = F\left(\eta,\mu\right)n\left(\eta\right),$$

где матрица-функция

$$F\left(\eta,\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}Q\left(\mu\right) + B\left(\eta\right)\delta\left(\eta-\mu\right)$$

есть собственная матрица непрерывного спектра, $B(\eta)$ – некоторая гельдерова матрица-функция, а под $P\frac{1}{x}$ понимается главное значение интеграла по Коши от x^{-1} [8]. Матрица $B(\eta)$ определяется условием нормировки:

$$B(\eta) = e^{\eta^2}{Q_1}^{-1}(\eta)\Lambda(\eta), \eta \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

где матрицу-функцию

$$\Lambda(z) = I + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \frac{Q_1(\mu)Q(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (4)$$

называют дисперсионной матрицей, а ее определитель $\lambda(z)$ – дисперсионной функцией задачи (здесь I — единичная матрица).

Таким образом, набор собственных функций характеристического уравнения (2) состоит из собственных функций дискретного спектра, определяемых матричными функциями $F(\eta_j, \mu)$ и собственных функций непрерывного спектра, определяемых обобщенными матричными функциями $F(\eta, \mu),\ \eta \in (0, +\infty)$. Их свойства определяются свойствами дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ и дисперсионной функции $\lambda(z)$. Введя в рассмотрение вспомогательную функцию Черчиньяни [3]

$$\lambda_c(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \frac{d\mu}{\mu - z}\ ,$$

сможем получить следующее представление и свойства дисперсионной матрицы [10]:

Свойство 1. Если $\deg(Q_1(z)\,Q(z)) = 1$, то $\Lambda(z) = \lambda_c(z)\,Q_1(z)\,Q(z)$.

Свойство 2. Если $\deg(Q_1(z)\,Q(z)) \geq 2$, то матрица-функция $\Lambda(z)$ представляется в виде:

$$\Lambda(z) = \lambda_c(z)\,Q_1(z)\,Q(z) + Q_2(z)\,,$$

где $Q_2(z)$ – полиномиальная матрица и $\deg Q_2(z) = \deg(Q_1(z)\,Q(z)) - 2$.

Свойство 3. При переходе через действительную ось матрица-функция $\Lambda(z)$ претерпевает разрыв. Ее граничные значения при приближении «сверху» и «снизу» (т.е. при $z \to \mu + 0 \cdot i$ и при $z \to \mu - 0 \cdot i$, где $\mu \in \mathbb{R}$) соответственно равны:

$$\Lambda^{\pm}(\mu) = \Lambda(\mu) \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\,Q(\mu)\,,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Свойство 4. Поведение матрицы-функции $\Lambda(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки определяется рядом:

$$\Lambda(z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^k e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\,Q(\mu)\,d\mu.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием принадлежности бесконечно удаленной точки к дискретному спектру является равенство:

$$\det\left(I - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\,Q(\mu)\,d\mu\right) = 0,$$

или, иначе, $|Q_1(\mu)| \cdot |Q(\mu)| - trQ_1(\mu) \cdot Q(\mu) = 1$. В рассматриваемом частном случае это следует из физических условий [7]:

$$\Lambda(z) = -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix}(5+2l)/(2+4l) & 1/\sqrt{2+4l} \\ 1/\sqrt{2+4l} & 1/2\end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| \to \infty, \quad (5)$$

а дисперсионная функция $\lambda(z) = \frac{1}{4z^4}\frac{3+2l}{1+2l} + o\left(\frac{1}{z^4}\right), |z| \to \infty$. Последнее по сути означает, что в рассматриваемом частном случае бесконечно удаленная точка является четырехкратной точкой дискретного спектра.

В основе алгоритма построения решения граничной задачи для уравнения (1) лежит возможность разложения по собственным функциям граничных условий, то есть

Лемма 1. Для полноты системы собственных функций уравнения (2) $\{\ \Phi(\eta,\mu),\ \eta \in (0,+\infty);\ \Phi(\eta_j,\mu)\}$ в пространстве функций, гельдеровых на отрезке $[0,+\infty]$, достаточно, чтобы при $\mu > 0$ была разрешима неоднородная краевая задача Римана:

$$\Lambda^+(\mu)\, X^+(\mu) - \Lambda^-(\mu)\, X^-(\mu) = \ 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu)\, Y(\mu)\,.$$

Доказательство. Полнота указанной системы функций означает возможность разложения по ним произвольной вектор-функции $Y(\mu)$, удовлетворяющей условию Гельдера на замкнутой полуоси $[0,+\infty]$, то есть

$$Y(\mu) = Y_1(\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)\, a(\eta)\, d\eta,$$

где $Y_1(\mu)$ – линейная комбинация собственных функций дискретного спектра, а $a(\eta)$ – коэффициент дискретного спектра. Домножим обе части равенства на $\mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu)$. Тогда с учетом выражения для $F(\eta,\mu)$:

$$\mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu) Y(\mu) = \mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu) Y_1(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu) Q(\mu)\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta +$$
$$+\Lambda(\mu)\mu a(\mu), \mu > 0. \quad (6)$$

Введя в рассмотрение вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta - z}d\eta,$$

определенную во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной действительной полуоси, и применяя к ней и к дисперсионной матрице $\Lambda(z)$ формулы Сохоцкого на полуоси $(0,+\infty)$, можем записать:

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta, N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\cdot i\mu a(\mu),$$

$$\Lambda^{+}(\mu)+\Lambda^{-}(\mu)=2\Lambda(\mu),\Lambda^{+}\left(\mu\right)-\Lambda^{-}\left(\mu\right)=2\sqrt{\pi}\cdot i\mu e^{-\mu^{2}}Q_{l}\left(\mu\right)Q\left(\mu\right),$$

то есть в результате соотношение (6) перепишется в виде:

$$\Lambda^{+}\left(\mu\right)N^{+}\left(\mu\right)-\Lambda^{-}\left(\mu\right)N^{-}\left(\mu\right)+2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^{2}}Q_{l}\left(\mu\right)Y_{1}\left(\mu\right)=$$

$$=2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^{2}}Q_{l}(\mu)Y(\mu),$$

или, иначе,

$$\Lambda^{+}(\mu)\left[N^{+}(\mu)+Q^{-1}(\mu)Y_{1}(\mu)\right]-\Lambda^{-}(\mu)\left[N^{-}(\mu)+Q^{-1}(\mu)Y_{1}(\mu)\right]=$$

$$=2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^{2}}Q_{l}(\mu)Y(\mu)\mu>0.$$

Решение построенной краевой задачи Римана позволит определить коэффициенты непрерывного и дискретного спектра, что докажет возможность требуемого представления функции $Y_1(\mu)$. *Лемма доказана.*

2 Матричная задача Римана

Рассмотрим задачу: найти матрицу канонических решений $X(z)$ [1] для краевой задачи, поставленной на берегах разреза $(0,+\infty)$:

$$X^{+}\left(\mu\right)=\Lambda^{+}\left(\mu\right)\left[\Lambda^{-}\left(\mu\right)\right]^{-1}X^{-}\left(\mu\right),\quad\mu>0,$$

то есть

$$\left[X^{+}\left(\mu\right)\right]^{-1}\Lambda^{+}\left(\mu\right)=\left[X^{-}\left(\mu\right)\right]^{-1}\Lambda^{-}\left(\mu\right),\quad\mu>0.\quad(7)$$

Матрица $\Lambda(\mu)$ определена в предыдущем разделе, в частном случае зависит от положительного действительного параметра l. Матрица-функция $G(\mu)=\Lambda^{+}(\mu)\left[\Lambda^{-}(\mu)\right]^{-1}$ называется матричным коэффициентом краевой задачи (7). Величина $\kappa(G)=\frac{1}{2\pi}\left[arg\ detG(\mu)\right]_{(0,+\infty)}$, где под $[f]_C$ понимается приращение функции $f(z)$ при полном обходе кривой C в положительном направлении, называется индексом краевой задачи. Домножив (7) справа на $Q^{-1}(\mu)Q_1^{-1}(\mu)$ и, обозначая

$$W(z)=\Lambda(z)Q^{-1}(z)Q_1^{-1}(z),$$

получим новую краевую задачу:

$$\left[X^{+}(\mu)\right]^{-1}W^{+}(\mu)=\left[X^{-}(\mu)\right]^{-1}W^{-}(\mu),\mu>0.$$

Из свойств 1-2 можно получить представление $W(z)$ в явном виде для случая, когда $\deg\left(Q_1\left(z\right)Q\left(z\right)\right)\geq 2$:

$$W\left(z\right)=\lambda_{C}\left(z\right)I+\Pi(z),$$

где $\Pi(z) = Q_2(z)Q^{-1}(z)Q_1^{-1}(z)$. В частности, для задачи Смолуховского в случае одно-, двух- и многоатомного газов будем иметь:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2l}\begin{bmatrix} 1 & -\gamma(z^2 - l - 1/2) \\ 1/\gamma & 1/2 - z^2 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что матричный коэффициент задачи (7)

$$G(\mu) = \Lambda^+(\mu)\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1} = W^+(\mu)\left[W^-(\mu)\right]^{-1}.$$

Для диагонализации или приведения к жордановой нормальной форме матрицы-функции $W(z)$ достаточно привести к такому виду $\Pi(z)$. Далее будем рассматривать случай, когда $\Pi(z)$ приводится к диагональному виду. Тогда диагонализирующая матрица $S(z)$ существует и строится в явном виде, однако зависит от радикала $r(z)$, что может порождать точки ветвления в конечной части комплексной плоскости. Очевидно, что точки ветвления, не лежащие на действительной оси, будут образовывать комплексно-сопряженные пары. В частном случае диагонализующая матрица-функция имеет вид:

$$S(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{2} + r(z)\right) & \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{2} - r(z)\right) \\ 1/\gamma & 1/\gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда $S^{-1}(z)W(z)S(z) = \Omega(z) = diag\left\{\Omega_1(z), \Omega_2(z)\right\}$, где $\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{4l}\left[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1}r(z)\right], \alpha = 1, 2, r(z) = \sqrt{q(z)}, q(z) = \left(z^2 - 3/2\right)^2 + 4l$. Матрица-функция $S(z)$ является аналитической в комплексной плоскости за исключением точек ветвления радикала $\pm a$, $\pm\overline{a}$ (здесь $a = \sqrt{0.75 + 0.25\sqrt{9 + 16l}} + i\sqrt{-0.75 + 0.25\sqrt{9+16l}}$), в которых функция $r(z)$ обращается в нуль.

Заметим, что в общем случае $r(z) = \sqrt{q(z)}$ является двузначной функцией, поэтому для однозначности $S(z)$ выделим одну ветвь радикала [1]: для этого проведем в комплексной плоскости дополнительные разрезы, соединяющие попарно конечные точки ветвления, обозначим совокупность этих разрезов Γ. В частном случае Γ будет представлять собой пару отрезков, соединяющих точки $\pm a, \pm\overline{a}$ без пересечения с вещественной осью.

Лемма 2. Функция $r(z) = \sqrt{q(z)}, z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ такая что $\sqrt{q(z_0)} = r_0$, где $r_0 = \left|\sqrt{q(z_0)}\right| exp(i\phi_0/2)$, а ϕ_0 есть главное значение аргумента $\sqrt{q(z_0)}$, является однозначной.

Доказательство. Положим, что γ есть простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. В результате обхода по γ получаем значение $\sqrt{q(z_0)} = r_0 exp(i\phi/2)$, где $\phi = arg[(z-a)(z-a)(z+a)(z+a)]_?$. При этом $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$. Если разрезы Γ_1 и Γ_2 не лежат внутри

γ, то все $\phi_i = 0$, так что $\sqrt{q(z_0)} = r_0$. Если только Γ_1 лежит внутри γ, то в силу положительной ориентированности γ

$$\phi_1 = \phi_4 = 2\pi, \quad \phi_2 = \phi_3 = 0,$$

так что $\phi = 4\pi$ и снова получаем $\sqrt{q(z_0)} = r_0$. Аналогичные результаты получаются в случаях, когда внутри γ оказывается Γ_2 или же сразу оба дополнительных разреза. *Лемма доказана.*

Решение задачи факторизации будем искать в виде

$$X(z) = S(z)U(z)S^{-1}(z),$$

причем $S^{-1}(z)W(z)S(z) = \Omega(z) = diag\,\{\Omega_1(z), \Omega_2(z)\}$. В частном случае $\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{4l}\left[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1} r(z)\right], \alpha = 1, 2$. Таким образом, $U(z)$ можем считать новой неизвестной диагональной матрицей-функцией: $U(z) = diag\,\{U_1(z), U_2(z)\}$. Методика решения задач такого рода описана в [7], $U(z)$ строится в явном виде и представляет собой функцию интегралов типа Коши на действительной положительной полуоси, в структуру которой входит множитель $(z - \mu_l)$, причем величина μ_l определяется как решение задачи обращения эллиптических интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{b(x)}{r(x)}dx = \int_0^{\mu_l} \frac{dx}{r(x)},$$

где $b(x) = \theta_2(x) - \theta_1(x)$. Таким образом, разрешимость задачи обращения является одним из необходимых условий применимости метода. В частном случае величина μ_l вычисляется непосредственно. Построим каноническую матрицу решений задачи. Алгоритм, изложенный в [7], опирается на следующие факты.

Теорема 1. Если $\Phi(z)$ – каноническая матрица задачи (7), а дисперсионная матрица-функция $\Lambda(z)$ четна, то справедливо представление:

$$\Lambda(z) = \Phi(z)P(z)\Phi^T(-z).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы исследуем на аналитичность и поведение на бесконечности вспомогательную матрицу-функцию:

$$\Psi(z) = \Lambda(z)[\Phi^T(-z)]^{-1},$$

Рассмотрим поведение $\Psi(-z)$ на границах разреза: с учетом четности матрицы-функции $\Lambda(z)$ очевидно равенство между собой ее граничных значений на положительной действительной полуоси

$$\Psi^-(-\mu) = \Lambda^+(\mu)[\Phi^+(\mu)]^{-T}, \ \Psi^+(-\mu) = \Lambda^-(\mu)[\Phi^-(\mu)]^{-T}, \mu > 0.$$

С учетом аналитичности функции $\Psi(z)$ во всей комплексной плоскости за исключением действительной оси (по построению) и конечности ее порядка в окрестности бесконечно удаленной точки можем утверждать, что:

$$\Psi(z) = \Phi(z)P(z),$$

где $P(z)$ — некоторая полиномиальная матрица-функция. *Теорема доказана.*

Для окончательной факторизации матрицы канонических решений принципиальным оказывается факт равенства между собой частных индексов задачи Римана. Можно показать, что в частном случае эти значения равны 1.

Лемма 3. Индекс задачи (7) не зависит от величины действительного положительного параметра l и равен двум: $\kappa(G) = 2$.

Доказательство. Мы доказали, что

$$detG(\mu) = detW^{+}(\mu)\left[detW^{-}(\mu)\right]^{-1}.$$

Следовательно, можем утверждать, что

$$\kappa(G) = \frac{1}{2\pi}\left[arg\ detW^{+}(\mu)\right]_{(0,+\infty)} - \frac{1}{2\pi}\left[arg\ detW^{-}(\mu)\right]_{(0,+\infty)}.$$

При этом значение функций $W^{\pm}(\mu)$ можно определить в явном виде. Поскольку разрыв на положительной действительной полуоси испытывает только функция Черчиньяни $\lambda_C(z)$, то будет выполняться цепочка равенств: $W^{\pm}(\mu) = W(\mu) + \lambda_C^{\pm}(\mu)I = W(\mu) \pm i\cdot\sqrt{\pi}\mu\ e^{-\mu^2}I, \mu > 0$. Вычисляя требуемый определитель, получаем:

$$detW^{\pm}(\mu) = detW(\mu) + \lambda_C^{\pm}(\mu)\cdot trW(\mu) + \left[\lambda_C^{\pm}(\mu)\right]^2,$$

или, иначе говоря, $detW^{\pm}(\mu) = \left[detW(\mu) - \pi\mu^2 e^{-2\mu^2}\right] \pm i\sqrt{\pi}\mu\ e^{-\mu^2}\cdot trW(\mu)$.

В точке $\mu = 0$ мнимая часть определителя обращается в нуль, а его действительная часть положительна: $Re\ detW^{\pm}(0) = 1 + (2l)^{-1}$. В то же время во всех остальных нулях мнимой части действительная составляющая оказывается отрицательной. В силу положительности выражения $\sqrt{\pi}\mu\ e^{-\mu^2}\cdot trW(\mu)$ в некоторой проколотой окрестности точки $\mu = 0$ можем утверждать, что в нуле $Re\ detW^{\pm}(\mu)$ мнимая составляющая функции $detW^{+}(\mu)$ будет строго положительной, в то время как $Im\ detW^{-}(\mu)$ строго меньше в силу симметричности их графиков. Следовательно, график функции $detW^{\pm}(\mu)$ в комплексной плоскости не совершает ни одного полного оборота вокруг начала координат.

Оценим поведение функций $W^{\pm}(\mu)$ на бесконечности:

$$\arg detW^{+}(\mu) \to -\pi, \quad , \arg detW^{-}(\mu) \to -\pi, \quad \mu \to \infty.$$

В силу четности функций $detW^{\pm}(\mu)$ окончательно получим:

$$\left[arg\ detW^{+}(\mu)\right]_{(0,+\infty)} - \left[arg\ detW^{-}(\mu)\right]_{(0,+\infty)} = 4\pi,$$

что и доказывает наше утверждение. *Лемма доказана.*

Следствие. Задача (7) имеет не менее двух линейно независимых решений вне зависимости от величины параметра l.

Доказательство следствия очевидно следует из теоремы Н. П. Векуа [11].

Лемма 4. Частные индексы задачи факторизации (7) равны единице.

Доказательство. Покажем, что $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Во-первых, заметим, что $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$, причем в силу леммы 3 $\kappa_1 + \kappa_2 = 2$. Поведение функций при $|z| \to \infty$ позволяет утверждать, что

$$P(z) \to z^3 \begin{bmatrix} a_{11}z^{-\kappa_1} & a_{12}z^{-\kappa_2} \\ a_{21}z^{-\kappa_1} & a_{22}z^{-\kappa_2} \end{bmatrix},$$

откуда очевидно, что $\kappa_1, \kappa_2 > -2$ по определению канонической матрицы [1]. По построению $U_2(z)$ имеет нуль второго порядка в точке $z = 0$, а $U_1(z)$ в точке $\xi = \mu_l$. Исследуя поведение функций $U_{1,2}(z)$ в указанных точках, получаем [8] $\kappa_{1,2} \leq 1$, что автоматически дает $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. *Лемма доказана.*

Лемма 5. При любых значениях параметра $l > 0$ дисперсионная функция $\lambda(z)$ не имеет конечных корней в комплексной плоскости.

Доказательство. Непосредственно вычисляя, что

$$\lambda(z) = 2\gamma^2 \Omega_1(z)\Omega_2(z),$$

где $\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{4l}\left[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1} r(z)\right]$,

$\alpha = 1, 2, r(z) = \sqrt{(z^2 - 3/2)^2 + 4l}$,

получим представление на линии разрыва:

$$\Omega^{\pm}_\alpha(\mu) = \Omega_\alpha(\mu) \pm i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Мнимые части $\Omega^{\pm}_\alpha(\mu)$ обращаются в нуль лишь в точке $\mu = 0$, причем $\lambda(z) \neq 0$, то есть число нулей дисперсионной функции в комплексной плоскости с разрезом по действительной оси вычисляется как

$$N + \frac{1}{2}N_C = \frac{1}{2\pi}\left[arg\lambda(z)\right]_C,$$

где C – замкнутый контур вокруг разреза по действительной оси, ориентированный по часовой стрелке, под N_C подразумевается количество корней дисперсионного уравнения, принадлежащих контуру, а под N – лежащих внутри контура. Поскольку $N = 4$, то:

$$N = \nu_1 + \nu_2 - 2,$$

где $\nu_\alpha = [\theta_\alpha]_C /(2\pi), \theta_\alpha = \arg \Omega_\alpha^+$ (рассматриваются главные значения аргумента). Так как $\Omega_\alpha(z) = \Omega_\alpha(-z)$ и $\overline{\Omega}_\alpha^+(\mu) = \Omega_\alpha^-(\mu)$ при $\mu \in \mathbb{R}$, то $\nu_\alpha = \frac{2}{\pi} [\theta_\alpha(\mu)]_{(0,+\infty)}$. Исследуя поведение функций $\theta_\alpha(\mu)$, получаем, что $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 2$, а следовательно и дисперсионное уравнение не имеет конечных корней в комплексной плоскости. *Лемма доказана.*

Для частного случая справедливо следующее представление:

Теорема 2. Для любого $l > 0$ существует каноническая матрица задачи (7) $\Phi_0(z)$, для которой выполняется тождество:

$$\Lambda\left(z\right) = \Phi_0\left(z\right)\Phi_0^T(-z).$$

Доказательство. Из теоремы 1 знаем, что $\Lambda(z) = \Phi(z)P(z)\Phi^T(-z)$, при этом $\Phi(z)$ – произвольная каноническая матрица задачи (7), а $P(z)$ – матричный полином, определяемый частными индексами задачи. Для любой матрицы канонических решений будет выполняться:

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}.$$

Применяя произвольно выбранную каноническую матрицу $\Phi(z)$ для факторизации дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ аналогично теореме 1, и учитывая свойства дисперсионной матрицы-функции, для соответствующей полиномиальной матрицы $P(z)$ получим:

$$P(z) = P^T(z), \quad P(z) = \overline{P(\overline{z})}.$$

По определению канонической матрицы $\Phi(z) \to K diag\{z^{-\kappa_1}, z^{-\kappa_2}\}$, $det K \neq 0$, при $|z| \to \infty$, т.е. с учетом (5) получаем соотношение:

$$P(z) \to -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & z^{\kappa_2}\end{bmatrix} K^{-1}\begin{bmatrix} \frac{5+2l}{2+4l} & \frac{1}{\sqrt{2+4l}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+4l}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} K^{-T}\begin{bmatrix} (-z)^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & (-z)^{\kappa_2}\end{bmatrix}.$$

Положим

$$\Phi_0(z) = \Phi(z)K^{-1}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+2l}{2+4l}} & \frac{1}{\sqrt{1+2l}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Матрица-функция $\Phi_0(z)$ является каноническим решением задачи (7), но в силу леммы 4 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, следовательно, факторизация теоремы

1 для матрицы $\Phi_0(z)$ переписывается в виде $\Lambda(z) = \Phi_0(z)\,\Phi_0^T(-z)$. *Теорема доказана.*

Замечание. Из доказательства теоремы 2 очевидно, что вторым необходимым условием для выполнимости алгоритма поиска канонической матрица решений задачи (7) является равенство частных индексов задачи друг другу.

3 Теорема о полноте

Теорема 3. Для любой вектор-функции $Y(\mu)$, удовлетворяющей условию Гельдера на замкнутой полуоси $[0,+\infty]$, имеет место следующее разложение по собственным функциям характеристического уравнения

$$Y(\mu) = Y_1(\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)\,a(\eta)\,d\eta,$$

где $Y_1(\mu) = (A_0 + A_1\mu + A_3\mu)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (A_2 - A_3\mu)\begin{bmatrix}\mu^2-1/2\\1\end{bmatrix}$ – линейная комбинация собственных функций дискретного спектра.

Иначе говоря, система собственных функций уравнения (2) $\{F(\eta,\mu),\ \eta \in (0,+\infty);\ F_\alpha(\mu), F_\beta(0,\mu),\ \alpha,\beta = 1,2\}$ является полной в пространстве функций, гельдеровых на отрезке $[0,+\infty]$.

Замечание. Интеграл $\int_0^\infty F(\eta,\mu)\,a(\eta)\,d\eta$ понимается как функционал, в котором первое слагаемое интерпретируется как главное значение в смысле Коши, второе — согласно определению дельта-функции Дирака, $a(\eta)$ имеет своим носителем множество $[0,+\infty]$.

Доказательство. В силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно доказать разрешимость соответствующей краевой задачи Римана. Предыдущий раздел был посвящен исследованию алгоритма построения аналитической матрицы-функции $\Phi_0(z)$ такой, что

$$\left[\Lambda^+(\mu)\right]^{-1}\Phi_0^+(\mu) = \left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1}\Phi_0^-(\mu).$$

Воспользовавшись полученными результатами, в силу симметричности дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ после очевидной подстановки получаем:

$$\left[\Phi_0^+(\mu)\right]^T\left[N^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_1(\mu)\right] - \left[\Phi_0^-(\mu)\right]^T\left[N^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_1(\mu)\right] =$$
$$= 2i\sqrt{\pi}\mu e^{-\mu^2}\left[\Phi_0^-(\mu)\right]^T\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1}Q_l(\mu)Y(\mu), \quad \mu > 0.$$

Можно доказать, что в условиях теоремы правая часть тождества будет удовлетворять условию Гельдера на промежутке $[0,+\infty]$. В силу этого можно воспользоваться интегралом типа Коши:

$$\Delta(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mu e^{-\mu^2}\left[\Phi_0^-(\mu)\right]^T\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1}Q_l(\mu)Y(\mu)\frac{d\mu}{\mu - z}.$$

В новых обозначениях

$$\left[\Phi_0^+(\mu)\right]^T\left[N^+(\mu)+Q^{-1}(\mu)Y_1(\mu)\right]-\Delta^+(\mu)=$$

$$=\left[\Phi_0^-(\mu)\right]^T\left[N^-(\mu)+Q^{-1}(\mu)Y_1(\mu)\right]-\Delta^-(\mu)$$

на полуоси $\mu>0$. Учитывая поведение на бесконечности матриц и векторов с использованием обобщенной теоремы Лиувилля можем записать общее решение неоднородной задачи:

$$N\left(z\right)=-\left(A_0+A_1z\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\frac{A_2}{\gamma}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-A_3z\begin{bmatrix}-\frac{1}{\gamma}\\1\end{bmatrix}+\Phi_0^{-T}\left(z\right)\left[\Delta\left(z\right)+\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}\right].$$

Построив матрицу, обратную к полиномиальной $P(z)$, получим:

$$\Phi_0^{-T}\left(z\right)=\frac{1}{c_{11}c_{22}}X^{-T}(z)\Xi(z)$$

где матрица-функция

$$\Xi(z)=\begin{bmatrix}-\delta(a_{12}+b_{12}z)+c_{22}p_0z^2 & \delta(a_{11}+b_{11}z)\\ -a_{12}-b_{12}z-c_{12}p_0z^2 & a_{11}+b_{11}z+c_{11}q_0z^2\end{bmatrix}.$$

Здесь $c_{11}=\sqrt{\frac{3+2l}{2+4l}}, c_{12}=\frac{1}{\sqrt{1+2l}}, c_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $p_0=U_1^{(0)}(\infty)$, $q_0=U_2^{(0)}(\infty)$, а величины a_{ij}, b_{ij} вычисляются непосредственно и зависят от перечисленных величин.

Используя полученные значения и выписывая лорановское разложение в окрестности точки $z=\infty$ матрицы-функции $\Phi_0^{-T}\left(z\right)$, приравняем к нулю коэффициенты при z и z^2 в верхней и нижней строках и как результат получим:

$$A_0=A_1\left[\mu_l+q_0q_{-1}+\frac{b_{11}}{c_{11}}\left(p_0\left(1+\delta\gamma\right)-q_0\delta\gamma\right)\right]+$$

$$+A_3\left[\mu_l+p_0p_{-1}+\frac{b_{12}}{c_{12}}\left(p_0\left(1+\delta\gamma\right)-q_0\delta\gamma\right)\right],$$

$A_2=A_1\frac{b_{11}}{c_{11}}q_0\delta\gamma-A_3\left[\mu_l+p_0p_{-1}-\frac{b_{12}}{c_{12}}q_0\delta\right]$, где

$$q_0=exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau-\int_0^{\mu_l}\frac{\tau d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$p_0=exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau+\int_0^{\mu_l}\frac{\tau d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$q_0q_{-1}=exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(a(\tau)+\frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\right)d\tau+\int_0^{\mu_l}\frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$p_0 p_{-1} = exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(-a(\tau) + \frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\right) d\tau - \int_0^{\mu_l} \frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right].$$

Коэффициент непрерывного спектра разложения также находится однозначно на основании формул Сохоцкого:

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = i\sqrt{\pi}\cdot \mu a(\mu).$$

Таким образом, коэффициенты разложения произвольной гельдеровской функции $\Upsilon(\mu)$ по собственным функциям характеристического уравнения (2) определены. *Теорема доказана.*

Заключение

Метод канонической матрицы [7] решения граничных задач кинетической теории газов, подробно описанный в работе [1], может быть обобщен для решения более широкого класса задач с опорой на работы [8]–[9]. Границы применимости метода в его неизменном виде определяются частными индексами краевой задачи Римана, лежащей в основе построения решения, разрешимостью вспомогательной задачи обращения интегралов, а также поведением на бесконечности дисперсионной матрицы-функции, входящей в структуру матричного коэффициента соответствующей задачи.

Литература

1. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитические методы в кинетической теории. Москва: Изд-во МГОУ, 2008. 280 с.

2. Case K. M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *Annals of physics*. 1960; 9 (l): 1–23.

3. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem. *Annals of physics*. 1962; 20 (2): 219–233.

4. Гермидер О. В., Попов В. Н. Вычисление коэффициента трения Дарси с использованием эллипсоидально-статистической модели // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 4 (380). С. 108–117. DOI: 10.15372/PMTF202215230. EDN ZATBIS.

5. Гермидер О. В., Попов В. Н. Оценка влияния эффекта разрежения на число Пуазейля в длинном кольцевом канале при неполной аккомодации молекул газа // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2022. № 5. С. 119–128. DOI: 10.31857/S056852812205005X. EDN AFGYIH.

6. Квантовая электронная плазма и взаимодействие S-волны с металлическим полупространством / Е. А. Бедрикова, Н. В. Зверев, В. И. Паренкина, А. А. Юшканов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 4. С. 54–65.

7. Latyshev A. V., Sushkov V. V. Canonical matrix of the vector boundary value Riemann-Hilbert problem and its application to boundary value problems in kinetic theory. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2002; 42 (6): 850–860. EDN LHECGT.

8. Siewert C. E., Kelley C. T. An analytical solution to a matrix Riemann-Hilbert problem. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).* 1980; 31: 344–351.

9. Siewert C. E., Kelley C. T., Garcia R. D. M. An analytical expression for the H-matrix relevant to Rayleigh scattering. *J. Math. Analys. and Appl.* 1981; 84 (12): 509–518.

10. Сушков В. В. О структуре и свойствах собственных функций при решении одного класса интегродифференциальных уравнений // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2024. Т. 39, вып. 2. С. 45–51.

11. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: Наука, 1970. 380 с.

Статья поступила в редакцию 21.10.2024; одобрена после рецензирования 06.11.2024; принята к публикации 12.11.2024.

ON THE RIEMANN MATRIX BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE ANALYTICAL SOLUTION OF GAS THEORY BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Vladislav V. Sushkov
Cand. Sci. (Phys. and Math.)
Department of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Exact Sciences and Information Technology
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
55 Oktyabrsky Prospect, Syktyvkar, 167001, Komi Republic

Abstract. The paper discusses the issue of generalizing and expanding the method of the canonical matrix for solving boundary value problems for an equation like the linearized Boltzmann equation with a collision integral in the form of Bhatnagar-Gross-Kruk (BGK-equation) depending on the properties of the corresponding Riemann matrix boundary value problem. The eigenvalues of the characteristic equation constitute a discrete and continuous spectrum, and the eigenfunctions of the continuous spectrum belong to the class of generalized functions, the use of which leads to the need to solve the Riemann matrix edge problem. Described is an algorithm for constructing a canonical matrix of a problem, its properties are investigated. The necessary conditions for the applicability of the method for the general case are formulated. For the Smolukhovsky problem, a canonical matrix is constructed for the BGK equation in the case of a one-, two-, and polyatomic gas. The theorem on the completeness of the set of eigenfunctions in the space of functions Gelder on the positive real half-axis is proved.

Keywords: Riemann boundary value problem, matrix of canonical solutions, kinetic theory of gases, BGK equation, eigenvalues, generalized functions, completeness theorem.

For citation

Sushkov V. V. On the Riemann Matrix Boundary Value Problem in the Analytical Solution of Gas Theory Boundary Value Problems // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 3. P. 3–18.

The article was submitted 21.10.2024; approved after reviewing 06.11.2024; accepted for publication 12.11.2024.