Научная статья

УДК 531.36
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-3-19-30

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ СТЕКЛОВА

© Новиков Михаил Алексеевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

Аннотация. В статье методом Рауса — Ляпунова найдены стационарные движения механической автономной консервативной системы, для которой возможно существование дополнительного частного интеграла Стеклова.

В зависимости от количества интегралов, участвующих по методу Рауса — Ляпунова в связке из первых интегралов, установлен ряд свойств. В частности показано, что при последовательном уменьшении числа интегралов в функции Лагранжа анализ решений стационарности проводится с меньшими вычислительными операциями. При всех способах составления связки интегралов получаются одинаковыми стационарные движения. Последним свойством установлена теорема, согласно которой функция Лагранжа с наименьшим количеством участвующих необходимых интегралов получается при не включении в нее интеграла Стеклова, но при этом выполняются возникающие в случае условий Стеклова частные интегралы: $q = const$, $r = 0$. При таком построении связки интегралов решения стационарности почти полностью совпадают со стационарными движениями.

Ключевые слова: стационарное движение, частный интеграл, связка интегралов, решение стационарности.

Для цитирования
Новиков М. А. О стационарных движениях механической системы с частным интегралом Стеклова // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 19–30.

Введение

Отдельные динамические свойства механических автономных консервативных систем часто выявляются при исследовании стационарных движений. Хорошим объектом для этого может быть задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки [1–3]. Движение твердого тела описывается известными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B-C)qr + Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C-A)rp + Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A-B)pq + Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ, направленную к притягивающему центру (углы Пуассона), M — масса тела; g — ускорение свободного падения.

Для системы (1) известны три общих интеграла [3]:

$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = c_0 = const$ (интеграл энергии),

$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_1 = c_1 = const$ (интеграл кинетического момента),

$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ (интеграл Пуассона).

Проведем изучение стационарных движений для системы (1), содержащей дополнительный частный интеграл Стеклова. В работах [3, 4] показано существование дополнительных частных интегралов системы (1) при определенных значениях

$$x_0 = 0,\ z_0 = 0, \tag{2}$$

а для моментов инерции выполняются дополнительные условия. При условиях (2) предварительно записываются движения тела в форме шести обыкновенных дифференциальных уравнений. Вводя обозначения: $x = (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)'$ — фазовые переменные; $m = M\,g\,y_0 / A$; $k_1 = B / A$; $k_2 = C / A$ $(m \neq 0; 0 < k_1 \neq 1; k_2 > 0)$, уравнения движения задаются в виде:

$$\begin{cases} \dot{p} = (k_1 - k_2)\,qr + m\,\gamma_3, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{q} = (k_2 - 1)rp, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = -[(1-k_1)\,pq + m\gamma_1)] / k_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \tag{3}$$

Для системы (3) два первых интеграла запишутся в более короткой форме:

$$V_{00} = p^2 + k_1\,q^2 + k_2\,r^2 - 2m\,\gamma_2 = const,\ \ V_{10} = p\,\gamma_1 + k_1\,q\,\gamma_2 + k_2\,r\,\gamma_3 = const.$$

В системе с частным интегралом В. А. Стеклова дополнительно накладываются условия на моменты инерции.

1 Об известных решениях исследуемой задачи

Простейшая классификация частных решений системы (3) может быть проведена при обращении в нуль дифференциального равенства для $\dot{q} = 0$. В таком случае существует общий интеграл

$$V_3(x) = q = q_0 = const.$$

Это может достигаться в трех ситуациях: 1) $r = 0$; 2) $p = 0$; 3) $A = C$.

Как показано в [4], при условиях $r = 0$ и $B = 2A$ $(k_1 = 2k_2)$ в системе (3) существует другой дополнительный интеграл В. А. Стеклова

$$V_4(x) = m\gamma_1^2 - 2q_0^2\gamma_2 = const\,. \tag{1.1}$$

В этом случае решения для фазовых переменных [3, 4] записываются при помощи эллиптического интеграла. Последний интеграл может быть в системе (3) и при $A = C$, когда имеются другие решения. Поэтому отделение решений с частным интегралом (1.1) от других возможных решений, существующих без интеграла Стеклова, можно осуществить при условиях

$$C \neq A = B/2\,. \tag{1.2}$$

Такое отделение необходимо для выделения стационарных движений, содержащих только дополнительный интеграл (1.1).

2 Некоторые свойства систем с частным интегралом Стеклова

Существование частного интеграла (1.1) в системе (3) обеспечивается условиями $r = 0, k_1 = 2, k_2 \neq 1$. Любое алгебраическое равенство в фазовых переменных можно рассматривать дополнительным множеством (условием), наравне первому интегралу. Поэтому введем в качестве частного интеграла

$$V_{41}(x) = r = 0\,.$$

Нахождение стационарных движений традиционно проводится методом Рауса — Ляпунова [5–7]. Как в [2] этот метод опирается на известные первые интегралы или дополнительные условия. Его основу составляет отыскание фазовых переменных при поиске экстремума одного из первых интегралов движения системы (3), когда выполняются остальные интегралы. По общей теории экстремумов [8] условный экстремум можно свести к безусловному, вводя функцию Лагранжа, составленную связкой из всех известных первых интегралов и дополнительных условий. Тогда экстремум ищется по всем фазовым переменным, включая в их число вещественные множители Лагранжа, входящие в связку интегралов. Конечно, здесь возникает частично условная задача экстремума, так как общие интегралы, принимающие постоянные, но неопределенные значения, дополнительных числовых условий не доставляют.

Вначале проведем нахождение стационарных движений при полном наборе всех известных первых интегралов и дополнительных соотношений:

$$V_{00}(x) = const, V_{10}(x) = const\,,\ V_2(x) = 1, V_3(x) = const\,,$$
$$V_4(x) = const, V_{41}(x) = r = 0\,.$$

Искомая функция Лагранжа имеет вид

$$K_0(x,\lambda) = V_{00}(x) - \lambda_1 V_{10}(x) - \lambda_2 V_2(x) - \lambda_3 V_3(x) - \lambda_4 V_4(x) - \lambda_5 V_{41}(x)$$

с вещественными множителями λ_i $(i = 1, 2, \cdots, 5)$.

Уравнения стационарности составляются обращением в нуль частных производных от функции $K_0(x,\lambda)$ по всем фазовым переменным и множителям Лагранжа. Притом учитываются только соотношения, соответствующие интегралам с фиксированными константами, в данном случае $V_2(x)=1, V_{41}(x)=0$. Особо следует выделить особенность, что в выражениях $\dfrac{\partial V_4(x)}{\partial \gamma_1}$ и $\dfrac{\partial V_4(x)}{\partial \gamma_2}$ уравнений стационарности величина q_0 используется одинаково с переменной q. Поэтому уместно изучить вопрос о выражении $\dfrac{\partial V_4(x)}{\partial q}$: считать его обычной производной при замене q_0 на q, или полагать равным нулю. С этой целью изучим оба варианта.

Пусть вначале q_0 рассматривается переменной, равной q. С учетом этого уравнения стационарности запишутся восьмью алгебраическими уравнениями от одиннадцати переменных:

$$\begin{cases} \partial K_0(x,\lambda)/\partial p = 2p - \lambda_1\gamma_1 = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial q = 4q - 2\lambda_1\gamma_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 q\gamma_2 = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial r = 2k_2 r - \lambda_1 k_2\gamma_3 - \lambda_5 = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial \gamma_1 = -(\lambda_1 p + 2\lambda_2\gamma_1 + 2m\lambda_4\gamma_1) = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial \gamma_2 = -2(m + \lambda_1 q + \lambda_2\gamma_2 - \lambda_4 q^2) = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial \gamma_3 = -(k_2\lambda_1 r + 2\lambda_2\gamma_3) = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial \lambda_2 = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1) = 0, \\ \partial K_0(x,\lambda)/\partial \lambda_5 = -r = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

После подстановки $r=0$ в (2.1) получается система упрощенных уравнений

$$\begin{cases} F_1 = 2p - \lambda_1\gamma_1 = 0, \\ F_2 = 4q - 2\lambda_1\gamma_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 q\gamma_2 = 0, \\ F_3 = \lambda_1 k_2\gamma_3 + \lambda_5 = 0, \\ F_4 = \lambda_1 p + 2\gamma_1(\lambda_2 + m\lambda_4) = 0, \\ F_5 = m + \lambda_1 q + \lambda_2\gamma_2 - \lambda_4 q^2 = 0, \\ F_6 = \lambda_2\gamma_3 = 0, \\ F_7 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из $F_3=0$ можно определить $\gamma_3 = -\lambda_5/(k_2\gamma_2)$. Равенство $F_6=0$ предоставляет две ветви решений стационарности: 1) $\lambda_2=0$, 2) $\gamma_3=0$. В первом случае $\lambda_2=0$ уравнения (2.2) становятся проще:

$$\begin{cases} F_{10} = 2p - \lambda_1\gamma_1 = 0, \qquad F_{20} = 4q - 2\lambda_1\gamma_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 q\gamma_2 = 0, \\ F_{40} = \lambda_1 p + 2m\lambda_4\gamma_1 = 0, \qquad F_{50} = m + \lambda_1 q - \lambda_4 q^2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из $F_{10}=0$ величину $p=\lambda_1\gamma_1/2$ и подставим в $F_{40}=0$:

$$\gamma_1(\lambda_1^2+4m\lambda_4)=0. \tag{2.3}$$

Одним из возможных решений стационарности отсюда является $\gamma_1=0$, из него можно заключить $p=0$. Предполагая в общем случае $\lambda_4\neq 0$, равенство $F_{50}=0$ имеет решение $q_*=(\lambda_1\pm\sqrt{\lambda_1^2+4m\lambda_4})/(2\lambda_4)$. При $\lambda_4=0$ решением будет $q_*=-m/\lambda_1$.

Равенство $F_{20}=0$ используем для определения величины λ_3. Легко видеть, что ввиду отличных от нуля произвольных параметров λ_1 и λ_4 величина q_* может принимать любые вещественные значения. Тогда одним из решений стационарности (2.2) можно записать:

$(P.C.1)$ $p=0, q=q_*=const, r=0, \gamma_1=0, 0<|\gamma_2|\leq\sqrt{1-\gamma_3^2}, \gamma_3=-\lambda_5/(k_2\lambda_1)$.

Конечно, не каждое решение стационарности должно быть стационарным движением. Согласно [2, 7] к стационарному движению выдвигается требование постоянства решений (или не зависимость от времени), что означает равные нулю правые части уравнений движения (3). Приведенные к простому виду они здесь будут такими:

$$\begin{cases} f_1=(2-k_2)qr+m\gamma_3=0, \quad f_2=rp=0, \quad f_3=pq+m\gamma_1=0, \\ f_4=q\gamma_3=0, \quad f_5=p\lambda_3=0, \quad f_6=q\gamma_1-p\gamma_2=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для выполнения $f_1=0$ необходимо $\gamma_3=0$, откуда следует $\lambda_5=0$. Тогда одним из видов стационарных движений будет

$(I.1)$ $p_0=0, q_0=const, r_0=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=\pm 1, \gamma_{30}=0$.

Частным движением к нему будет состояние покоя

$(I.0)$ $p_0=0, q_0=0, r_0=0, \gamma_{10}=0, \gamma_{20}=\pm 1, \gamma_{30}=0$,

которое легко проверяется равенствами (2.4).

В другом случае выполнения равенства (2.3), когда $\gamma_1\neq 0$, $\lambda_4=-\lambda_1^2/(4m)$, выражение F_5 приводится к к виду $(\lambda_1 q+2m)^2=0$. Для нетривиальных значений γ_2, q отсюда можно заключить $\lambda_1=-2m/q$. Подставляя найденные в $F_{10}=0$ значения, получим $pq+m\gamma_1=0$. Решением уравнений стационарности здесь будет:

$(P.C.2)$ $p=-\dfrac{m\gamma_1}{q}, q\neq 0, r=0, \gamma_1=\pm\sqrt{1-\gamma_2^2-\gamma_3^2}, 0<|\gamma_2|\leq 1, \gamma_3=-\lambda_5/(k_2\lambda_1)$.

Здесь параметрами следует рассматривать q, γ_2, λ_5. Значение $\lambda_2=0$ по предыдущей ветви решений, и из $F_{20}=0$ вычисляется $\lambda_3=0$. При подстановке найденных решений в (2.4) получается более общий вид стационарных движений:

$$(I.2)\ \ p_0 = q_0\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}}, q_0 = \pm\sqrt{-m\gamma_{20}}, r_0 = 0, \gamma_{10} = \pm\sqrt{1-\gamma_{20}^2}, 0 < \left[\gamma_{20}\right[\le 1, \gamma_{30} = 0 .$$

При этом должно выполняться $sign\,\gamma_{20} = -sign\,m$. Движения $(I.1)$ и $(I.0)$ различны, и совпадают между собой только при $q_0 = 0$.

Для другой возможности при $\gamma_3 = 0$ из $F_{30} = 0$ сразу следует $\lambda_5 = 0$. Исключение p из $F_{10} = 0$ приводит $F_{40} = 0$ к равенству:

$$\gamma_1[\lambda_1^2 + 4(\lambda_2 + m\lambda_4)] = 0 .$$

Здесь так же одним из решений является $\gamma_1 = 0$, которое сводится к стационарному движению вида $(I.1)$.

При подстановке другого решения $\lambda_4 = -(\lambda_1^2 + 4\lambda_2)/(4m)$ в $F_{10} = 0$ в предположении $\gamma_1 \ne 0$ получает равенство

$$(\lambda_1 q + 2m)^2 + 4\lambda_2 q^2 = 0 . \qquad (2.5)$$

Квадратное относительно q уравнение имеет вещественные решения

$$q_{**} = 2m\frac{(-\lambda_1 \pm 2\sqrt{-\lambda_2})}{\lambda_1^2 + 4\lambda_2} .$$

Решением стационарности здесь будет:

$$(P.C.3)\ \ p = \frac{\lambda_1\gamma_1}{2}, q = q_{**}, r = 0, \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}, 0 < |\gamma_2| \le 1, \gamma_3 = 0 .$$

При подстановке найденных решений в равенства (2.4) найдем $p = q\gamma_1/\gamma_2$. Тогда из равенства $f_3 = 0$ следует $\gamma_1(q^2 + m\gamma_2) = 0$.

При $\gamma_1 = 0$ уже получены стационарные движения вида $(I.1)$, а при $\gamma_1 \ne 0$, в частности, можно получить $\lambda_2 = 0$, и затем стационарные движения вида $(I.2)$.

Стационарные движения вида $(I.2)$ реализуются при следующих значениях множителей Лагранжа: λ_4 — вещественный параметр,

$$\lambda_1 = \pm 2\gamma\frac{\sqrt{-m\gamma_{20}}}{\gamma_{20}}, \lambda_2 = \frac{m}{\gamma_{20}} - m\lambda_4, \lambda_3 = 4q_0\lambda_4\gamma_{20}, \lambda_5 = 0 .$$

Для другого вида стационарных движений $(I.1)$ множители Лагранжа такие: λ_1, λ_4 — свободные параметры, $\lambda_2 = (\lambda_4 q_0^2 - \lambda_1 q_0 - m)/\gamma_{20}$; $\lambda_3 = 2\gamma_{20}(2\lambda_4 q_0 - \lambda_1)$; $\lambda_5 = 0$.

Движения видов $(I.1)$ и $(I.2)$, вообще говоря, разные, и совпадают между собой в случае, когда для $(I.2)$ значение $\gamma_{10} = 0$, а для $(I.1)$ определено значение $q_0 = \pm\sqrt{-m\gamma_{20}}$.

Стационарное движение вида $(I.0)$ может быть осуществлено при множителях Лагранжа: λ_1, λ_4 — свободные параметры, $\lambda_2 = -m/\gamma_{20}$; $\lambda_3 = -2\gamma_{20}\lambda_1$; $\lambda_5 = 0$.

Рассмотрим теперь нахождение решений стационарности и стационарных движений при допущении $\frac{\partial V_4(x)}{\partial q} \equiv 0$. Единственным отличием от предыдущего будет замена выражения $F_2 = 0$ на $F_{21} = 4q - 2\lambda_1 \gamma_2 - \lambda_3 = 0$. Последнее равенство так же используется для определения λ_3. Проводя аналогичные вычисления , получим те же самые решения стационарности, соответственно — такие же стационарные движения.

Сопоставляя два способа задания $\frac{\partial V_4(x)}{\partial q}$, можно сформулировать следующее свойство.

С в о й с т в о 1

При отыскании стационарных движений методом Рауса — Ляпунова механической системы (3) с частным интегралом Стеклова при полной связке интегралов, составленные уравнения стационарности как для независимой переменной q_0, так и для q_0, используемой переменной q, одинаково приводят к стационарным движениям видов $(I.0)$ $(I.1)$ $(I.2)$.

При различных представлениях значений $\frac{\partial V_4(x)}{\partial q}$ имеется общее заключение для всех видов стационарных движений о равном нулю множителе Лагранжа λ_5. Фактически это означает отсутствие в связке интегралов $V_{41}(x)$. Поэтому предварительно исключим множество $V_{41}(x)$ из функции Лагранжа, и подставим $r = 0$ в общие интегралы

$$V_{00}(x) = const, V_{10}(x) = const .$$

При этом в уравнениях (2.2) не будут участвовать слагаемые с λ_5. Количество переменных при таком подходе уменьшается на два, и на единицу уменьшается число равенств в системе (2.2). В этом случае порядок нахождения решений стационарности остается прежним. Конечно, упрощается отыскание решений стационарности от меньшего числа переменных . Так как решения стационарности составляются из тех же равенств $F_1 = 0$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0$, то и стационарные движения остаются теми же $(I.0)$ $(I.1)$ $(I.2)$. При таком способе задания связки интегралов проводится значительно меньшее количество вычислений. Отсюда следует следующее свойство.

С в о й с т в о 2

При нахождении стационарных движений методом Рауса — Ляпунова механической системы (3) с частным интегралом Стеклова целесообразно предварительно выполнить подстановку $r = 0$ в исходные первые интегралы.

Можно показать, что и в получаемых решениях стационарности для $(I.0)$ $(I.1)$ $(I.2)$ получается $\lambda_4 = 0$. Следовательно, в связке интегралов не участвует интеграл Стеклова $V_4(x) = const$, но условия (1.2) и $r = 0$ предполагаются выполненными.

Выпишем отдельно получаемые здесь уравнения стационарности, и для ясного преставления результатов вместо $\lambda_1, \lambda_2\, \lambda_3$ введем новые множители Лагранжа $\mu_1, \mu_2\, \mu_3$:

$$\begin{cases} F_{11} = 2p - \mu_1\gamma_1 = 0, & F_{21} = 4q - 2\mu_1\gamma_2 - \mu_3 = 0, \\ F_{41} = \mu_1 p + 2m\mu_2 = 0, & F_{51} = m + \mu_1 q + \mu_2\gamma_2 = 0, \\ F_{61} = \eta_2\gamma_3 = 0, & F_7 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

Представленная система нелинейных уравнений состоит из шести уравнений, и зависит от восьми переменных.

Из $F_{11} = 0$ выразим $p = \mu_1\gamma_1 / 2$ и подставим в $F_{41} = 0$:

$$\gamma_1(m\mu_1^2 + 4\mu_2) = 0.$$

При $\gamma_1 = 0$ в предположении $\mu_1 \neq 0$ из $F_{51} = 0$ найдем $q = -(m + \mu_2\gamma_2)/\mu_1$. Равенство $F_{21} = 0$ предназначено для вычисления $\mu_3 = 2(q - \mu_1\gamma_2)$.

Решением стационарности в этом случае будет

$(P.C.4)$ $p = 0, q = -m/\mu_1, r = 0, \gamma_1 = 0, 0 < |\gamma_2| \le 1, \gamma_3 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}$.

Здесь μ_1, γ_2 рассматриваются параметрами. При подстановке найденных решений стационарности в (2.4) получается: $\gamma_3 = 0, \gamma_2 = \pm 1$. А ввиду неопределенных значений $\mu_2 \in R$ полагаем q произвольным. Следовательно, в этом случае стационарными движениями получаются движения вида $(I.1)$.

При $\gamma_3 = 0$ в предположении $\mu_1 \neq 0$ решением стационарности будет

$(P.C.5)$ $p = \dfrac{\mu_1\gamma_1}{2}, q = -\dfrac{m - \mu_1^2\gamma_2/4}{\eta_1}, r = 0, \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}, 0 < |\gamma_2| \le 1, \gamma_3 = 0$

Несложной проверкой равенств (2.4) для последнего решения стационарности получаются стационарные движения вида $(I.2)$.

Таким образом, справедливо следующее свойство.

Свойство 3

Нахождение стационарных движений механической системы (3) с частным интегралом Стеклова методом Рауса — Ляпунова можно проводить при неполной связке интегралов, исключая интеграл Стеклова, $V_4(x) = const$, сохраняя лишь условия его существования (1.2) и $r = 0$.

Для такой функции Лагранжа выполняется еще меньше вычислений. В такой форме составленной связки интегралов стационарными движениями получаются только виды $(I.0)$ $(I.1)$ $(I.2)$. Наиболее общие стационарные движения вида $(I.2)$ соответствуют следующим значениям множителей Лагранжа: $\mu_1 = \pm\sqrt{-m/\gamma_{20}}; \mu_2 = m; \mu_3 = 0$. В остальных стационарных движениях так же $\mu_3 = 0$. Последнее соответствует не включению общего интеграла $V_3 = q = const$ в состав связки интегралов. Тогда в уравнениях (2.6) следует изначально полагать $\mu_3 = 0$.Такая же ситуация может возникать и в других системах с аналогичными частными интегралами выше приведенного вида $V_3(x) = q = const$. Поэтому проведем полные выкладки вычислений стационарных движений в этом конкретном случае. Уравнения стационарности здесь будут представлены системой (2.6), в которой будет изменен только полином $F_{21} = 0$, имеющий вид $F_{22} = 2q - \mu_1 \gamma_2 = 0$.

При $\mu_2 = 0$ для системы стационарности имеется такое решение

$(P.C.6)$ $p = r = \gamma_3 = 0, q = \pm\sqrt{\dfrac{-m\gamma_2}{2}},\ \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}, 0 < |\gamma_2| \le 1$.

В результате подстановки найденных решений в (2.4) получаются стационарные движения вида
$p_0 = 0, q_0 = \pm\sqrt{-m\gamma_{20}/2}, r_0 = 0, \gamma_{10} = 0, \gamma_{20} = \pm 1, \gamma_{30} = 0$, являющиеся частным случаем $(I.1)$.

При $\gamma_3 = 0$ исключение η_1 из равенств $\{F_{11} = 0, F_{22} = 0\}$ приводит к $p\gamma_2 = q\gamma_1$. Далее из $\{F_{11} = 0, F_{41} = 0\}$ исключение p составляет равенство

$$\gamma_1(\mu_1^2 + 4\mu_2) = 0.$$

Полагая $\gamma_2 \ne 0$ исключение η_1 из $\{F_{22} = 0, F_{51} = 0\}$ получает равенство $2q^2 + m\gamma_2 + \mu_2\gamma_2^2 = 0$. Тогда уравнения стационарности приводятся к более простой системе:

$$\begin{cases} p\gamma_2 = q\gamma_1, \\ \gamma_1(\mu_1^2 + 4\mu_2) = 0, \\ 2q^2 + m\gamma_2 + \mu_2\gamma_2^2 = 0, \\ 2q - \mu_1\lambda_2 = 0, \\ \gamma_1^2 + \lambda_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Второе равенство (2.7) при $\gamma_1 = 0$ выделяет часть решений стационарности. Этому соответствуют значения:

$$p = \gamma_2 = 0, q = \pm\sqrt{-\gamma_2(m + \mu_2\gamma_2)/2}.$$

Из множества всех вещественных значений $\mu_2 \in (-\infty; +\infty)$ всегда можно подобрать такие, что для q получаются произвольные вещественные значения. Отсюда возникает решение стационарности
$(P.C.7)$ $p = r = \gamma_1 = \gamma_3 = 0, q = const,\ \gamma_1 = \pm 1$.

Легко видеть, оно включает в себя решения стационарности (Р.С.6), и в точности соответствует стационарным движениям вида $(I.1)$.

Другое решение второго соотношения (2.7) $\mu_2 = -\mu_1^2 / 4$ приводит третье равенство (2.7) к виду: $2q^2 + m\gamma_2 - \mu_1^2 \gamma_2^2 / 4 = 0$. Последнее при подстановке $\mu_1 = 2q / \gamma_2$ сводится к $q^2 = m\gamma_2 = 0$. Окончательно получается решение стационарности

$$p = q\frac{\gamma_1}{\gamma_2}, q = \pm\sqrt{-m\gamma_2}, r = \gamma_3 = 0, \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}, 0 < |\gamma_2| \le 1,$$

в точности совпадающее со стационарным движением вида $(I.2)$.

Как видно из приведенных выкладок, имеет место следующее свойство.

С в о й с т в о 4

Нахождение стационарных движений механической системы (3) с частным интегралом Стеклова методом Рауса — Ляпунова при неполной или не совсем полной связке интегралов необходима постоянства решений стационарности равенствами (2.4).

Вместе с тем справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а

В механической системе (3) с частным интегралом Стеклова при нахождении стационарных движений методом Рауса — Ляпунова с неполной связкой интегралов, в которой участвуют только интеграл энергии, кинетического момента и Пуассона, получаемые решения стационарности почти полностью совпадают с стационарными движениями.

Кроме системы (3) имеются другие механические системы, содержащие общие интегралы вида $V_3(x) = q = q_0 = const$, где так же может оказаться $p = const$, или $r = const$. Для таких систем могут быть полезны изученные здесь свойства. Конечно, важный интерес представляют системы с четвертым дополнительным интегралом, у которых решения стационарности в точности совпадают с стационарными движениями.

3 Обсуждение полученных результатов

С учетом знаков γ_{20} стационарные движения видов $(I.0)$ и $(I.1)$ каждое содержит два простых движения. Для стационарных движений вида $(I.2)$ ввиду двух знаков подкоренных выражений для q_0 различаются четыре простейших движения. В совокупности для систем с частным интегралом Стеклова допускается восемь простых стационарных движений.

Выявленные свойства для систем с частным интегралом Стеклова связаны с вычислительными вопросами применения метода Рауса — Ляпунова. В статье последовательно устанавливается тенденция уменьшения вычислительных операций: первоначально — при исключении множества $r = 0$, затем — при уменьшении числа первых интегралов в функции Лагранжа (сначала исключается частный интеграл Стеклова, далее исключается общий интеграл $V_3(x) = q = const$). При этом уточняется обязательное участие основных общих интегралов: энергии, кинетического момента, Пуассона. Показано предельно наименьшее число первых интегралов в связке, равное трем. Вместе с тем отмечается обязательное выполнение необходимых условий существования частного интеграла Стеклова, выраженных соотношениями (1.2) и $r = 0$.

Существует предположение, что полный набор стационарных движений выявляется при участии связки из наибольшего числа первых интегралов. Демонстрируемые в статье способы составления функций Лагранжа для системы с частным интегралом Стеклова показательны тем, их участие в методе Рауса — Ляпунова не добавляет стационарных движений, а только усложняет вычислительный процесс. Хотя это не противоречит исходному высказыванию о наибольшем количестве стационарных движений, но выражает другое предположение, что наибольшее число стационарных движений по методу Рауса — Ляпунова находится не обязательно при полной связке всех первых интегралов изучаемой системы.

В исследуемой задаче оказалось необязательным формальное выражение дополнительного интеграла Стеклова, а требовались лишь условия его существования. Такое обстоятельство не встречается в системах с другими дополнительными общими или частными интегралами, ранее изученными.

Заключение

В статье разными способами получены три вида стационарных движений для механической системы, в которой существует частный интеграл Стеклова. Установлено несколько свойств для таких систем. Прежде всего они составляют вычислительные аспекты применения метода Рауса — Ляпунова. Они показывают как можно упростить процесс нахождения стационарных движений в подобных и других системах. Основное свойство выражается последней теоремой, согласно которой все стационарные движения можно получить при неполной связке интегралов.

Литература

1. Аппель П. Теоретическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 487 с.
2. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1999. 584 с.
3. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
4. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. (сообщение в заседании Харьковского математического общества 5 марта 1893 г.) // Сочинения. Москва: Тип. М. Г. Волчанинова, 1896. 9 с.
5. Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. London: McMillan, 1877. 108 p.
6. Routh E. J. The advanced part of a treatiseon the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
7. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Москва: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Статья поступила в редакцию 08.10.2024; одобрена после рецензирования 06.11.2024; принята к публикации 12.11.2024.

ON STEADY-STATE MOTIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH THE PARTIAL STEKLOV'S INTEGRALS

Mikhail A. Novickov
Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS)
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia
nma@icc.ru

Abstract. The Routh-Lyapunov's method has been applied to find steady-state motions of a conservative autonomous mechanical system, for which the existence of an additional partial V. A. Steklov's integral is possible.

Depending on the number of integrals involved in the bundle of first integrals according to the Routh-Lyapunov method, several properties have been determined. In particular, it is shown that in case of a consequent lowering of the number of integrals in the Lagrange function, analysis of stationary solutions is conducted with fewer computational operations. Under all the methods of constructing the bundle of integrals, the stationary motions are the same. The last property formulates the theorem, in accordance with which the Lagrange function (with the minimum number of participating integrals) is obtained, when the Steklov integral is not included in it, but under the conditions of fulfillment of the integrals arising in the case of Steklov's conditions: $q = const$, $r = 0$. In case of such a construction of the bundle of integrals, the stationary solutions exactly coincide with the steady-state motions.

Keywords: steady-state motion, partial integral, bundle of integrals, stationary solution.

For citation

Novickov M. A. On Steady-State Motions of a Mechanical System With the Partial Steklov's Integrals // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 3. P. 19–30.

The article was submitted 08.10.2024; approved after reviewing 06.11.2024; accepted for publication 12.11.2024.