Научная статья

УДК 51-7
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-3-45-55

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХ ТЕЛ, УПРУГО ОПЕРТЫХ НА БАЛКУ

© Баргуев Сергей Гавриилович (Ганжурович)
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики и общепрофессиональных дисциплин,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций
и информатики,
Россия, 670031, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 152
barguev@yandex.ru

© Нестеров Андрей Сергеевич
кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой телекоммуникационных систем,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций
и информатики,
Россия, 670031, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 152
nesterov@biik.ru

© Васильев Алексей Александрович
преподаватель Дома научной коллаборации,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций
и информатики,
Россия, 670031, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 152
systems1@yandex.ru

Аннотация. В данной статье ставится задача о вынужденных колебаниях трех тел, упруго опертых на балку. Для решения поставленной задачи, в отличие от классического способа, когда система разбивается на части, для которых составляются уравнения движения, находятся их решения, а затем производится сшивка решений в местах разбивки, в данной статье применяется вариационный принцип Гамильтона, в результате чего получается система дифференциальных уравнений, три из которых представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно времени, описывающих движение твердых тел, и дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно времени и четвертого порядка относительно продольной координаты точек балки. Решение полученной системы ищется в виде произведения амплитуд на гармоническую функцию частоты внешнего возмущающего возмущения. При этом для твердых тел амплитуды постоянные величины, а для балки — переменные. Затем после некоторых преобразований полученной системы амплитудных уравнений, определяются коэффициенты передач в виде отношений указанных амплитуд к амплитуде возмущений.

Сказанное относится к методике исследования на вынужденные колебания трех, упруго закрепленных вдоль балки твердых тел, в основе которой лежит вариационный принцип Гамильтона. При этом решение полученной в результате применения вариационного принципа гибридной системы дифференциальных уравнений, включающей как обычные дифференциальные уравнения, так и в частных производных, понимается в обобщенном смысле. Применение понятия обобщенного решения вызвано присутствием в уравнениях дельта-функции Дирака, которую необходимо учитывать в местах присоединения тел к балке. По найденным коэффициентам передачи выявляются резонансные частоты, и производится их сравнение с собственными частотами указанной механической системы.

Ключевые слова: балка, упруго закрепленные тела, резонансные частоты, собственные частоты, коэффициенты передач.

Для цитирования

Баргуев С. Г., Нестеров А. С., Васильев А. А. О вынужденных колебаниях трех тел, упруго опертых на балку // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 45–55.

Введение

Упругие балки или стержни являются элементами многих конструкций и устройств в авиационной и космической технике, на зданиях и сооружениях, наземном и водном транспорте, опорах линий электропередач, башнях, мачтах, антеннах, трубопроводах и т.п. При вынужденных колебаниях в таких конструкциях возможен резонанс, то есть когда частота приложенных к ним внешних возмущений совпадает с частотой собственных колебаний конструкций. Поэтому возникает необходимость отстройки от резонанса, заключающемся в установке дополнительных гасителей колебаний в виде твердых тел или масс с упругими связями. В задачу исследования вынужденных колебаний входит определение коэффициентов передач, представляющих отношение амплитуд объектов конструкции к амплитуде внешних возмущений в зависимости от их частоты. Построение таких зависимостей позволяет определять резонансные, или то же самое собственные частоты. К теме вынужденных колебаний следует отнести начально-краевую задачу, то есть исследование поведения механической системы во времени при заданных начальных условиях. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая движение рассматриваемой механической системы, выведена с использованием вариационного принципа Гамильтона [1], при этом точечное взаимодействие балки с прикрепленной системой твердых тел учитывается дельта-функцией Дирака, что предусматривает применение понятия обобщенного решения обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка решении при описании амплитудных смещений точек оси балки.

В данной работе описывается методика исследования механической системы на вынужденные колебания с получением коэффициентов передач. Производится идентификация резонансных частот с собственными [2].

1 Исследование вынужденных колебаний

Рассмотрим механическую систему (рис. 1), состоящую из трех тел с массами m_1, m_2, m_3, присоединенных к упругому стержню с помощью пружин жесткости c_1, c_2 и c_3 соответственно. Концы стержня жестко закреплены. Массы m_1, m_2, m_3 могут перемещаться только поступательно в направлении осей O_1z_1, O_2z_2, O_3z_3 соответственно. Здесь точки O_1, O_2, O_3 совпадают с положениями равновесия масс и являются фиксированными. Колебания масс характеризуются функциями $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$. Перемещения точек стержня описываются функцией $u(x,t)$. Пружины присоединены к стержню на расстояниях a_1, a_2, a_3 от левого конца стержня соответственно. На массы m_1, m_2, m_3 действуют гармонические силовые возмущения с частотой p и амплитудами F_1, F_2, F_3 .

Тогда вариационный принцип Гамильтона может быть выражен следующим соотношением:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T-U) + \delta W) dt = 0, \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия системы; U — потенциальная энергия системы; δW — виртуальная работа неконсервативных сил.

Потенциальная и кинетическая энергия системы складываются соответственно из энергии тел, стержня и пружин, т.е.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_б, \ U = U_1 + U_2 + U_3 + U_б,$$

где

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2}, \ T_2 = \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2}, \ T_3 = \frac{m_3 \dot{z}_3^2}{2}, \ T_б = \frac{1}{2}\int_0^l \rho F \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx,$$

$$U_1 = \frac{c_1\left(z_1 - u\left(a_1, t\right)\right)^2}{2}, \ U_2 = \frac{c_2\left(z_2 - u\left(a_2, t\right)\right)^2}{2}, \ U_3 = \frac{c_3\left(z_3 - u\left(a_3, t\right)\right)^2}{2},$$

$$U_б = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

Здесь ρ — плотность балки; F — площадь поперечного сечения стержня; EJ — жесткость балки на изгиб; T_i — кинетическая энергия i-ой массы; $T_б$ — кинетическая энергия балки; U_i — потенциальная энергия упругой деформации i-ой пружины; $U_б$ — потенциальная энергия упругой деформации балки.

Внешние гармонические силовые возмущения определяются по формулам:

$F_1(t) = F_1 \cos pt, F_2(t) = F_2 \cos pt, F_3(t) = F_3 \cos pt$,

следовательно:

$\delta W = F_1 \cos pt \delta z_1 + F_2 \cos pt \delta z_2 + F_3 \cos pt \delta z_3$

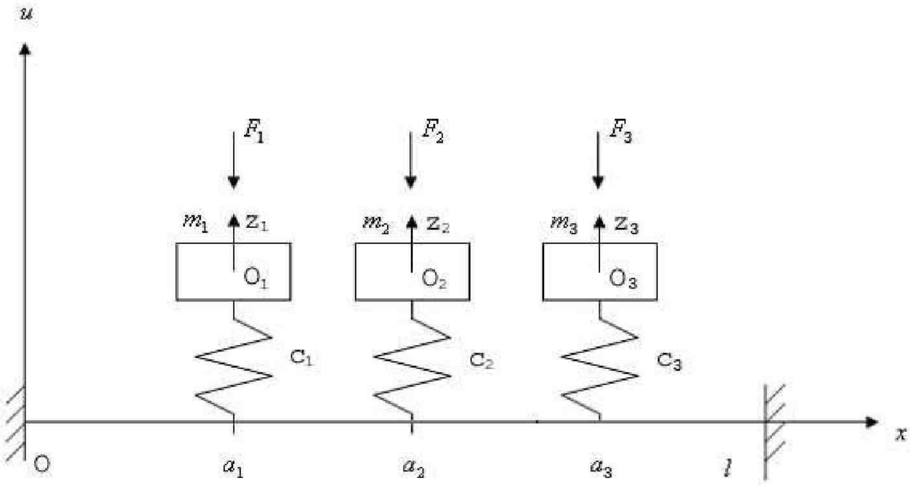


Рис. 1. Балка с тремя упруго закрепленными на ней телами, с действующими на них внешними гармоническими возмущениями.

После ряда преобразований (1) примет вид:

$$\int_{t_0}^{t_1}[(-m_1z_1''-c_1(z_1-u(a_1,t))+F_1\cos pt)\delta z_1+(-m_2z_2''-c_2(z_2-u(a_2,t))+F_2\cos pt)\delta z_2+$$

$$+(-m_3z_3''-c_3(z_3-u(a_3,t))+F_3\cos pt)\delta z_3+\int_0^L(c_1(z_1-u(x,t))\delta(x-a_1)+ \tag{2}$$

$$+c_2(z_2-u(x,t))\delta(x-a_2)+c_3(z_3-u(x,t))\delta(x-a_3)-\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})\delta u dx]dt=0$$

Таким образом, получим уравнение движения системы

$$\begin{aligned}
&m_1 \ddot{z}_1 + c_1(z_1 - u(a_1,t)) = F_1 \cos pt \\
&m_2 \ddot{z}_2 + c_2(z_2 - u(a_2,t)) = F_2 \cos pt \\
&m_3 \ddot{z}_3 + c_3(z_3 - u(a_3,t)) = F_3 \cos pt \\
&\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^{3} c_i (z_i - u(x,t)) \delta(x - a_i)
\end{aligned} \tag{3}$$

Поделив первое уравнение на m_1, второе на m_2, а третье на m_3, четвертое на ρF, получим:

$$\begin{aligned}
&z_1''(t) + p_1^2(z_1 - u(a_1,t)) = H_1 \cos pt, \\
&z_2''(t) + p_2^2(z_2 - u(a_2,t)) = H_2 \cos pt, \\
&z_3''(t) + p_3^2(z_3 - u(a_3,t)) = H_3 \cos pt \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^{3} e_i (z_i - u(x,t)) \delta(x - a_i)),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $p_i = \sqrt{\dfrac{c_i}{m_i}}, e = \dfrac{EJ}{\rho F}, H_i = \dfrac{F_i}{m_i}, e_i = \dfrac{c_i}{\rho F}, i = 1,2,3$

На $u(x,t)$ наложены граничные условия:

$$\begin{aligned}
&u(0,t) = u(l,t) = 0, \\
&\frac{du}{dx}(0,t) = \frac{du}{dx}(l,t) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставив в (4) $z_i(t)$, $u(x,t)$ в виде

$$z_i(t) = A_i \cos pt, u(x,t) = V(x) \cos pt, i = 1,2,3$$

после преобразования получим:

$$\begin{aligned}
&-p^2 A_1 + p_1{}^2 (A_1 - V(a_1)) = H_1, \\
&-p^2 A_2 + p_2{}^2 (A_2 - V(a_2)) = H_2, \\
&-p^2 A_3 + p_3{}^2 (A_3 - V(a_3)) = H_3, \\
&-p^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^{3} e_i (A_i - V(x)) \delta(x - a_i).
\end{aligned} \tag{6}$$

Последнее уравнение в (6) имеет решение

$$V(x) = \overline{V}_1(x - a_1) e_1 (A_1 - V(a_1)) + \overline{V}_2(x - a_2) e_2 (A_2 - V(a_2)) + \tag{7}$$

$$+\overline{V}_3(x - a_3) e_3 (A_3 - V(a_3))$$

где $\overline{V}_i(x - a_i), i = 1,2,3$ — решения основной краевой задачи [1].

Подставляя в (7) последовательно $x = a_1, x = a_2, x = a_3$ получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_1), V(a_2), V(a_3)$

$$\left(1+\bar{V}_1(0)e_1\right)V\left(a_1\right)+\bar{V}_2\left(a_1-a_2\right)e_2V\left(a_2\right)+\bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3V\left(a_3\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\bar{V}_i\left(a_1-a_i\right)e_iA_i,$$

$$\bar{V}_1\left(a_2-a_1\right)e_1V\left(a_1\right)+\left(1+\bar{V}_2(0)e_2\right)V\left(a_2\right)+\bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3V\left(a_3\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\bar{V}_i\left(a_2-a_i\right)e_iA_i,$$

$$\bar{V}_1\left(a_2-a_1\right)e_1V\left(a_1\right)+\bar{V}_2\left(a_3-a_2\right)e_2V\left(a_2\right)+\left(1+\bar{V}_3(0)e_3\right)V\left(a_3\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\bar{V}_i\left(a_3-a_i\right)e_iA_i.$$

(8)

Решая систему (8), получаем

$$\begin{aligned} V\left(a_1\right)&=\beta_{11}A_1+\beta_{12}A_2+\beta_{13}A_3,\\ V\left(a_2\right)&=\beta_{21}A_1+\beta_{22}A_2+\beta_{23}A_3,\\ V\left(a_3\right)&=\beta_{31}A_1+\beta_{32}A_2+\beta_{33}A_3. \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\beta_{11}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2\left(a_1-a_2\right)e_2 & \bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_1\left(a_2-a_1\right)e_1 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3\left(a_2-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_1\left(a_3-a_1\right)e_1 & \bar{V}_2\left(a_3-a_2\right)e_2 & 1+\bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{12}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \bar{V}_2\left(a_1-a_2\right)e_2 & \bar{V}_2\left(a_1-a_2\right)e_2 & \bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_2(0)e_2 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3\left(a_2-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_2\left(a_3-a_2\right)e_2 & \bar{V}_2\left(a_3-a_2\right)e_2 & 1+\bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{13}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3 & \bar{V}_2\left(a_1-a_2\right)e_2 & \bar{V}_3\left(a_1-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_3\left(a_2-a_3\right)e_3 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3\left(a_2-a_3\right)e_3 \\ \bar{V}_3(0)e_3 & \bar{V}_2\left(a_3-a_2\right)e_2 & 1+\bar{V}_3(0)e_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta_{21}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & 1+\bar{V}_3(0)e_3\end{vmatrix},$$

$$\beta_{22}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & \bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2 & 1+\bar{V}_3(0)e_3\end{vmatrix},$$

$$\beta_{23}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_3(0)e_3 & 1+\bar{V}_3(0)e_3\end{vmatrix},$$

$$\beta_{31}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2 & \bar{V}_1(0)e_1\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2 & \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1\end{vmatrix},$$

$$\beta_{32}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_2(0)e_2\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2\end{vmatrix},$$

$$\beta_{33}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2 & \bar{V}_3(0)e_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+\bar{V}_1(0)e_1 & \bar{V}_2(a_1-a_2)e_2 & \bar{V}_3(a_1-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_2-a_1)e_1 & 1+\bar{V}_2(0)e_2 & \bar{V}_3(a_2-a_3)e_3\\ \bar{V}_1(a_3-a_1)e_1 & \bar{V}_2(a_3-a_2)e_2 & 1+\bar{V}_3(0)e_3\end{vmatrix}.$$

Подставляя (9) в первые три уравнения системы (6), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}&(p_1^2-p^2-p_1^2\beta_{11})A_1-p_1^2\beta_{12}A_2-p_1^2\beta_{13}A_3=H_1,\\&-p_2^2\beta_{21}A_1+(p_2^2-p^2-p_2^2\beta_{22})A_2-p_2^2\beta_{23}A_3=H_2,\\&-p_3^2\beta_{31}A_1-p_3^2\beta_{32}A_2+(p_3^2-p^2-p_3^2\beta_{33})A_3=H_3.\end{aligned}\tag{10}$$

Отсюда, решая систему, найдем

$$A_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},A_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},A_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.\tag{11}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} H_1 & -p_1^2\beta_{12} & -p_1^2\beta_{13} \\ H_2 & p_2^2 - p^2 - p_2^2\beta_{22} & -p_2^2\beta_{23} \\ H_3 & -p_3^2\beta_{32} & p_3^2 - p^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1^2 - p^2 - p_1^2\beta_{11} & H_1 & -p_1^2\beta_{13} \\ -p_2^2\beta_{21} & H_2 & -p_2^2\beta_{23} \\ -p_3^2\beta_{31} & H_3 & p_3^2 - p^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1^2 - p^2 - p_1^2\beta_{11} & -p_1^2\beta_{12} & H_1 \\ -p_2^2\beta_{21} & p_2^2 - p^2 - p_2^2\beta_{22} & H_2 \\ -p_3^2\beta_{31} & -p_3^2\beta_{32} & H_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^2 - p^2 - p_1^2\beta_{11} & -p_1^2\beta_{12} & -p_1^2\beta_{13} \\ -p_2^2\beta_{21} & p_2^2 - p^2 - p_2^2\beta_{22} & -p_2^2\beta_{23} \\ -p_3^2\beta_{31} & -p_3^2\beta_{32} & p_3^2 - p^2 - p_3^2\beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Поделив A_1, A_2, A_3 соответственно на F_1, F_2, F_3 получим коэффициенты передачи

$$\chi_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta F_1}, \chi_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta F_2}, \chi_3(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta F_3}.$$

2 Расчеты коэффициентов передач

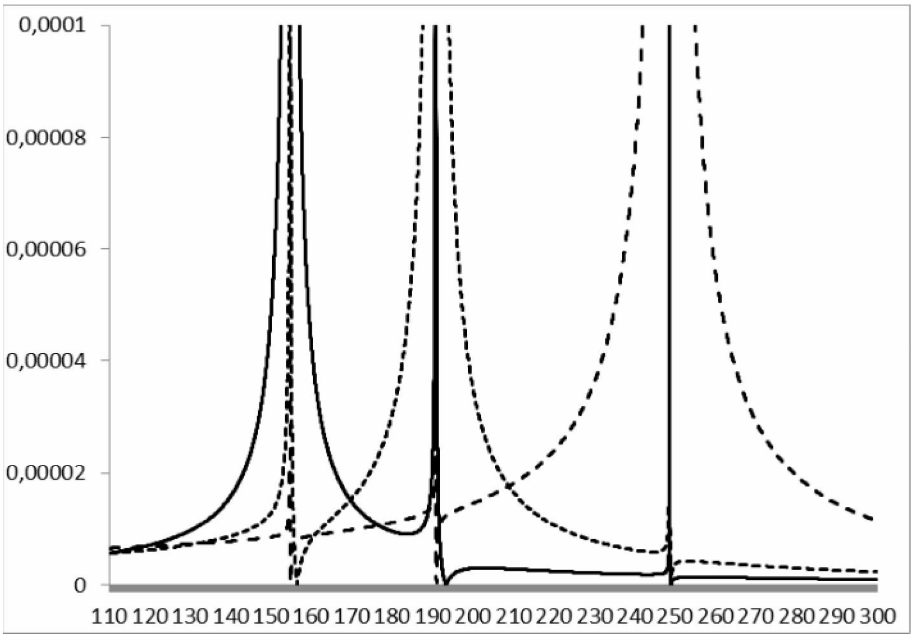
В работе рассчитаны коэффициенты передач с помощью Web-программы, разработанной авторами. При этом использованы параметры рассматриваемой механической системы, взятой из зарубежной статьи [2].

Параметры балки с упруго закрепленными тремя телами в системе СИ:

$$k_1 = 3k_b,\ m_1 = 0{,}2m_b,\ k_2 = 4{,}5k_b,\ m_2 = 0{,}5m_b,\ k_3 = 6k_b,\ m_3 = 1m_b,$$
$$k_b = 63476{,}1,\ m_b = 15{,}3875,\ a_1 = 0{,}1,\ a_2 = 0{,}4,\ a_3 = 0{,}8,$$
$$l = 1,\ EJ = 63476{,}1,\ \rho F = 15{,}3875.$$

Результаты работы программы.

Ниже показаны графики зависимости коэффициентов передач от частоты внешних гармонических возмущений при равных амплитудах F1=F2=F3=F.



Собственные частоты, полученные в зарубежной статье

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Зарубежная статья [2]	156,6703	190,6994	248,6622	1454,2932	3968,4732

Графики показывают, что несколько первых резонансных частот по порядку величины совпадают с собственными частотами, приведенные в таблице.

Заключение

В результате исследования вынужденных колебаний рассматриваемой механической системы выведены соотношения для коэффициентов передач в зависимости от частоты внешних гармонических возмущений. Определены резонансные частоты, которые совпали по порядку величины с собственными, что говорит об эффективности предложенной методики. Отметим, что определение резонансных частот производится с меньшими усилиями, чем определение собственных частот, которое требует применения громоздкого аппарата.

Литература

1. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2013. № 9. С. 130–137.

2. Wu J.S., Chou H. M. A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses. *Journal of Sound and Vibration.* 1999; 220 (3): 451–468.

Статья поступила в редакцию 27.09.2024; одобрена после рецензирования 11.11.2024; принята к публикации 12.11.2024.

ON THE FORCED VIBRATIONS OF THREE
BODIES ELASTICALLY SUPPORTED ON A BEAM

© Barguev Sergey Gavriilovich (Ganzhurovich)
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
and General Professional Disciplines,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Informatics,
670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, st. Trubacheeva, 152
barguev@yandex.ru

© Nesterov Andrey Sergeevich
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Head of the Department of Telecommunications Systems,
Buryat Institute of Information Communications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Information,
670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude, st. Trubacheeva, 152
nesterov@biik.ru

© Vasiliev Alexey Alexandrovich
lecturer at the House of Scientific Collaboration,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch)
152 Trubacheeva str., Siberian State University of
Telecommunications and Informatics,
670031, Republic of Buryatia, Ulan-Ude
systems1@yandex.ru

Abstract. In this article, the problem of forced vibrations of three bodies elastically supported on a beam is posed. To solve this problem, in contrast to the classical method, when the system is divided into parts for which equations of motion are compiled, their solutions are found, and then solutions are stitched together in the breakdown methods, Hamilton's variational principle is applied in this article, resulting in a system of differential equations, three of which are ordinary second-order differential equations with respect to time describing the motion of solids, and the partial differential equation of the second order with respect to time and the fourth order with respect to the longitudinal coordinate of the beam. The solution of the resulting system is sought in the form of the product of the amplitudes on the harmonic function of the frequency of the external disturbing disturbance. At the same time, for solids, the amplitudes are constant values, and for a beam, they are variable. Then, after some transformations of the resulting system of amplitude equations, the transmission coefficients are determined in the form of ratios of these amplitudes to the amplitude of disturbances. The above refers to the method of investigating the forced vibrations of three solids elastically fixed along the beam, which is based on the Hamilton variational principle. At the same time, the solution of the hybrid system of differential equations obtained as a result of the application of the variational principle, which includes both ordinary differential equations and partial derivatives, is understood in a generalized sense. The application of the concept of a generalized solution is caused by the presence in the equations of the Dirac delta function, which must be taken into account at the places where bodies are connected to the beam. According to the found transmission coefficients, resonant frequencies are determined, and they are compared with their own frequencies of the specified mechanical system.

Keywords: beam, elastically fixed bodies, resonant frequencies, natural frequencies, transmission coefficients.

For citation

Barguev S. G., Nesterov A. S., Vasiliev A. A. On the Forced Vibrations of Three Bodies Elastically Supported on a Beam // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 3. P. 45–55.

The article was submitted 27.09.2024; approved after reviewing 11.11.2024; accepted for publication 12.11.2024.