

Научная статья

УДК 51-7, 519.1

DOI: 10.18101/2304-5728-2024-3-56-70

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПОЛНЫХ ПОКРЫТИЙ ОТРЕЗКА НА ОСНОВЕ СУММ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕРХНИХ ОТСЕЧЕНИЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© Кузьмин Олег Викторович

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики
Иркутский государственный университет,
Институт математики и информационных технологий
Россия, 664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 20
quzminov@mail.ru

© Стрихарь Марина Валерьевна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной механики и математики
Иркутский государственный университет путей сообщения,
Забайкальский институт железнодорожного транспорта
Россия, 672040, г. Чита, ул. Магистральная, 11
mseryogina@mail.ru

Аннотация. Комбинаторные объекты являются одним из важнейших инструментов для решения задач, связанных с анализом и хранением данных, созданием и оптимизацией алгоритмов их обработки. При этом возникает необходимость моделирования как отдельных комбинаторных чисел, так и их последовательностей. В данной работе изучаются некоторые геометрические свойства и интерпретации верхних отсечений пирамиды Паскаля, представляющей собой пространственную комбинаторную конфигурацию иерархической структуры. Получена обобщенная последовательность комбинаторных чисел, для каждого из которых представлена формула вычисления в явном виде, а также рекуррентное соотношение и производящая функция. Доказано, что сумма элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля равна количеству неполных покрытий соответствующего ей отрезка. В силу симметрии пирамиды Паскаля получены различные формулы для подсчета числа таких покрытий, а также рассмотрены некоторые наиболее важные частные случаи на примере известных комбинаторных чисел.

Ключевые слова: моделирование, обработка данных, покрытие отрезка, иерархическая структура, пирамида Паскаля, плоское сечение пирамиды Паскаля, верхнее отсечение пирамиды Паскаля, числовая последовательность, рекуррентное соотношение, производящая функция.

Для цитирования

Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Моделирование неполных покрытий отрезка на основе сумм элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 56–70.

Вводные замечания

При моделировании различных процессов и/или исследовании тех или иных явлений мы часто обращаемся к важному разделу дискретной математики, каким является комбинаторика. В вопросах анализа и хранения данных, создании и оптимизации алгоритмов их обработки возникают все новые и новые комбинаторные числа и последовательности. Все они со временем аккумулируются в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. «The on-line encyclopedia of integer sequences», сокращенно OEIS) [9], которую в 1964 г. основал Нил Слоун. Занимаясь вопросами исследования самих последовательностей было замечено, что многие из них обладают схожими свойствами, а значит могут представлять собой числовые классы или системы [1, 5, 6]. Так в 1993 г. О. В. Кузьмин предложил получать и изучать комбинаторные объекты при помощи многоуровневой структуры обобщенной пирамиды Паскаля, которая состоит из числовых слоев со схожими характеристиками [2]. Данная работа является продолжением исследования сечений пирамиды Паскаля и полных покрытий отрезка [4], рассматриваются верхние отсечения пирамиды Паскаля и неполные покрытия отрезка. Определяются количество неполных покрытий отрезка, рекуррентные соотношения и производящие функции, которым удовлетворяют эти числа. В частных случаях получены известные числовые последовательности.

1 Полные и неполные покрытия отрезка

Полным $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытием отрезка длины m тремя отрезками, длины которых равны m_1, m_2 и m_3 называем [4] полное заполнение длины m исходного отрезка длинами m_1, m_2, m_3 меньших отрезков. Перекрытие допускается только в граничных точках. При этом оговариваем, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3, m, m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и в случае совпадения двух или всех трех длин покрывающих отрезков, полагаем их разных цветов и граничные точки тогда оставляем неокрашенными. Таким образом различными будут те покрытия, которые отличаются либо составом покрывающих отрезков, либо их порядком.

В отличие от полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия отрезка, *неполным $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытием отрезка* длины m тремя отрезками, длины которых равны m_1, m_2 и m_3 будем называть неполное правостороннее

заполнение длины t исходного отрезка длинами m_1, m_2, m_3 меньших отрезков, то есть слева и только слева может остаться непокрытая область размера от 0 до t включительно. Перекрытие аналогично допускается только в граничных точках (рис. 1). При этом $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, $t, m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и в случае совпадения двух или всех трех длин покрывающих отрезков, полагаем их разных цветов, граничные точки в этом случае оставляем неокрашенными (рис. 2). Таким образом различными будут те неполные $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия, которые отличаются либо размером непокрытой области, либо составом покрывающих отрезков, либо их порядком и в число неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка обязательно будет входить полное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие отрезка, получающееся при нулевой длине непокрытой области.

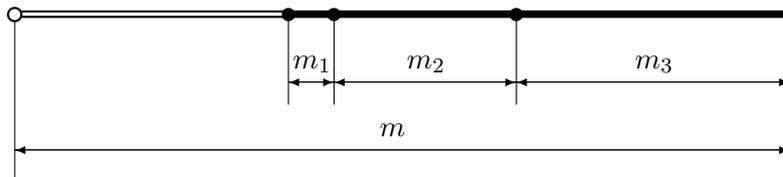


Рис. 1. Неполное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, все длины покрывающих отрезков m_1, m_2 и m_3 различны

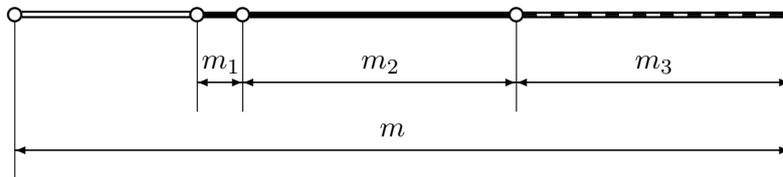


Рис. 2. Неполное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, длины m_2 и m_3 совпадают

Замечание 1. Если $\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = \mu \neq 1$, то есть наибольший общий делитель чисел m_1, m_2 и m_3 не равен единице, тогда и число полных и число неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий совпадает соответственно с числом полных либо неполных $(k; m_1/\mu, m_2/\mu, m_3/\mu)$ -покрытий отрезка в случае $t = \mu k, k \in \mathbf{N}$. В том случае, когда $t \neq \mu k, k \in \mathbf{N}$, не найдется полного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия, являющегося обязательным вариантом для перечисления всех неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий [4]. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только вариант, когда $\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = 1$.

2 Базисные понятия и соотношения

Пирамида Паскаля — это бесконечная трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям [2]:

$$\binom{n+1}{k, l} = \binom{n}{k-1, l} + \binom{n}{k, l-1} + \binom{n}{k, l},$$

то есть каждый внутренний элемент пирамиды Паскаля, представляет собой сумму трех элементов, расположенных над ним, при выполнении граничных условий:

$$\binom{0}{0,0} = 1; \binom{n}{k,l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0.$$

Числа $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$ называются *триномиальными коэффициентами* и для них справедливы равенства:

$$\binom{n}{0,0} = \binom{n}{n,0} = \binom{n}{0,n} = 1,$$

$$\binom{n}{k,l} = \binom{n}{l,k} = \binom{n}{n-k-l,l} = \binom{n}{k,n-k-l},$$

указывающие на три оси симметрии в пирамиде Паскаля [2].

Для нахождения количества всех неполных покрытий отрезка поместим пирамиду Паскаля в прямоугольную декартову систему координат в пространстве, при этом совместим вершину пирамиды с точкой начала координат $O(0;0;0)$, числа n отметим по оси абсцисс On , k — по оси ординат Ok , l — по оси аппликат Ol . Таким образом получаем биективное отображение всех элементов пирамиды Паскаля на точки $(n; k; l)$ целочисленной решетки первого октанта с неотрицательными координатами, ограниченные плоскостями $k=0$, $n=0$ и $n-k-l=0$.

Рассечем пирамиду Паскаля плоскостью, образующую углы ϕ_1 и ϕ_2 с осями Ok и Ol соответственно. Уравнение такого сечения [8]:

$$n + \operatorname{tg} \phi_1 \cdot k + \operatorname{tg} \phi_2 \cdot l = \operatorname{const}. \quad (1)$$

Все параллельные между собою сечения пирамиды Паскаля, заданные уравнением вида (1), занумеруем, начиная от вершины. Предметом наших исследований являются последовательности сумм элементов таких сечений:

$$\{S_N(\operatorname{tg} \phi_1, \operatorname{tg} \phi_2)\}, N \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Полагаем

$$\operatorname{tg} \phi_r = p_r/q_r, p_r \in \mathbf{Z}, q_r \in \mathbf{N}, \operatorname{НОД}(p_r, q_r) = 1, r = 1, 2.$$

В случае $p_r/q_r > -1$ сечения треугольные и замкнутые, уравнение (1) принимает вид [3]:

$$n + \frac{p_1}{q_1} \cdot k + \frac{p_2}{q_2} \cdot l = \frac{N}{\operatorname{НОК}(q_1, q_2)}. \quad (2)$$

Формула для определения суммы элементов N -го плоского сечения пирамиды Паскаля в явном виде [4]:

$$S_N \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{q_1 N}{q(p_1+q_1)} \right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q_2 N}{q(p_2+q_2)} \right] - i} \binom{\frac{N}{q} - \frac{p_1}{q_1} i - \frac{p_2}{q_2} j}{i, j}, \quad (3)$$

где $q = \operatorname{НОК}(q_1, q_2)$ — наименьшее общее кратное чисел q_1 и q_2 .

Продолжая исследование, найдем сумму элементов N -го плоского сечения пирамиды Паскаля и всех элементов пирамиды, расположенных над ним. Такой конечный массив элементов пирамиды Паскаля, ограниченных снизу плоскостью сечения, заданного уравнением вида (2), будем называть N -ым *верхним отсечением* [3] пирамиды Паскаля.

Зная, что сумма элементов N -го плоского сечения пирамиды Паскаля вычисляется по формуле (3), получаем соотношение для вычисления суммы элементов N -го верхнего отсечения пирамиды Паскаля:

$$U_N \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right) = \sum_{r=0}^N \sum_{i=0}^{\left[\frac{q_1 r}{q(p_1+q_1)} \right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q_2 r}{q(p_2+q_2)} \right] - i} \binom{\frac{r}{q} - \frac{p_1}{q_1} i - \frac{p_2}{q_2} j}{i, j}. \quad (4)$$

3 Количество полных и неполных покрытий

В предыдущей нашей работе [4] было доказано, что количество полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка задается равенством:

$$\begin{aligned} S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) &= \\ &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{m_1} \right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{m_2} \right] - i} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j}{i, j}, m \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (5)$$

для чего мы полагали в выражении (3):

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{p_2}{q_2} = \frac{m_2}{m_3} - 1.$$

Рассмотрим теперь сумму элементов m -го верхнего отсечения пирамиды Паскаля следующего вида

$$U_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = \sum_{r=0}^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{m_1} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{m_2} \rfloor - i} \binom{r}{\frac{r}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1 \right) i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1 \right) j} \binom{r}{i, j}, m \in \mathbf{N} \quad (6)$$

и докажем, что она задает количество всех неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка.

Теорема 1. *Количество всех неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий равно сумме (6) элементов m -го верхнего отсечения пирамиды Паскаля.*

Доказательство.

При рассмотрении всех возможных неполных покрытий отрезка длины m имеем следующие варианты:

- 1) область длины m полностью не покрыта;
- 2) область длины $(m - 1)$, находящаяся слева, не покрыта, область длины 1, находящаяся справа, полностью покрыта;
- 3) область длины $(m - 2)$, находящаяся слева, не покрыта, область длины 2, находящаяся справа, полностью покрыта;

...

$m - 1$) область длины $(m - (m - 1)) = 1$, находящаяся слева, не покрыта, область длины $m - 1$, находящаяся справа, полностью покрыта;

m) область длины $(m - m) = 0$, находящаяся слева, не покрыта, область длины m , находящаяся справа, полностью покрыта.

Поскольку количество полных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий задается равенством (5), то число неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий равно:

$$\begin{aligned} & 1 + S_1 \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) + S_2 \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) + \dots + \\ & + S_{m-1} \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) + S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = \\ & = \sum_{r=0}^m S_r \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = U_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Поскольку в вершине пирамиды Паскаля находится число

$$U_0 = \binom{0}{0,0} = 1, \quad (7)$$

то оно естественным образом определяет для нашего исследования количество неполных $(0; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка нулевой длины. Поэтому далее полагаем, что $m \in \mathbf{N}_0$, т.е. длина покрываемого отрезка условно может быть неотрицательным целым числом.

4 Рекуррентные соотношения

Рассмотрим последовательность $\{U_m\} = \left\{U_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right)\right\}$, $m \in \mathbf{N}_0$ неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка.

Теорема 2. Последовательность чисел $\{U_m\}$, $m \in \mathbf{N}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$U_m = U_{m-m_1} + U_{m-m_2} + U_{m-m_3} + 1 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_{m_1-1} = 1; \quad (9)$$

U_m , при $m = m_1, \dots, m_{m_2-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$U_m = U_{m-m_1} + 1; \quad (10)$$

U_m , при $m = m_2, \dots, m_{m_3-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$U_m = U_{m-m_1} + U_{m-m_2} + 1. \quad (11)$$

Доказательство.

Рассмотрим рекуррентное соотношение (8). В нем указана сумма способов, которыми можно покрыть отрезок длины $m \geq m_3$. Очевидно, есть только четыре возможности неполного $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытия отрезка. В первом случае осуществляется неполное $(m-m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, после чего добавляется справа отрезок длины m_1 . Во втором случае производится неполное $(m-m_2; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие и добавляется справа отрезок длины m_2 . В третьем случае выполняется неполное $(m-m_3; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие и добавляется справа отрезок длины m_3 . В четвертом случае отрезок остается полностью непокрытым.

Начальные условия (9) свидетельствуют о том, что если длина покрываемого отрезка меньше минимального покрывающего, то невозможно осуществить полное покрытие этого отрезка, а значит отрезок оставляется полностью непокрытым.

В соотношениях (10) сказано, что в случае, когда длина покрываемого отрезка достигает длины m_1 наименьшего покрывающего отрезка, но меньше длины m_2 второго по величине отрезка, то неполное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие можно выполнить только отрезками длины m_1 , осуществив сначала неполное $(m - m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавив справа отрезок длины m_1 , либо оставить отрезок полностью непокрытым.

Соотношения (11) показывают, что в случае, когда длина покрываемого отрезка достигает длины m_2 второго по величине отрезка, но меньше длины m_3 максимального по величине покрывающего отрезка, то неполное $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие можно выполнить только отрезками длины m_1 и m_2 , осуществив сначала неполные $(m - m_1; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие и $(m - m_2; m_1, m_2, m_3)$ -покрытие, а затем добавив справа соответственно отрезки длины m_1 и m_2 , либо отрезок остается полностью непокрытым.

Теорема доказана.

Поскольку пирамида Паскаля имеет три оси симметрии, то получаем следствие из теорем 1 и 2, которое позволяет производить вычисление суммы элементов верхнего отсечения по любой из шести представленных формул.

Следствие. Для натуральных чисел m_1, m_2, m_3 , при условии что $\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = 1$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} & U_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = U_m \left(\frac{m_2}{m_3} - 1, \frac{m_1}{m_3} - 1 \right) = \\ & = U_m \left(\frac{m_1}{m_2} - 1, \frac{m_3}{m_2} - 1 \right) = U_m \left(\frac{m_3}{m_2} - 1, \frac{m_1}{m_2} - 1 \right) = \\ & = U_m \left(\frac{m_2}{m_1} - 1, \frac{m_3}{m_1} - 1 \right) = U_m \left(\frac{m_3}{m_1} - 1, \frac{m_2}{m_1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

5 Производящие функции

Если последовательности чисел $\{U_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$, сопоставить формальный степенной ряд, то становится возможным нахождение производящей функции этих чисел.

Теорема 3. Для последовательности чисел $\{U_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$ производящей функцией является

$$F_U(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^{m_1}-x^{m_2}-x^{m_3})}. \quad (13)$$

Доказательство.

Зная, что последовательность чисел $\{U_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$ удовлетворяет соотношениям (8) – (11), согласно теореме 2, представим рекуррентное соотношение (8) в более удобном виде

$$U_{m+m_3} = U_{m+m_3-m_1} + U_{m+m_3-m_2} + U_m + 1.$$

Выполним почленное умножение этого соотношения на x^{m+m_3} и просуммируем по m в пределах от нуля до бесконечности:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} U_{m+m_3} x^{m+m_3} &= x^{m_1} \sum_{m=0}^{\infty} U_{m+m_3-m_1} x^{m+m_3-m_1} + \\ &+ x^{m_2} \sum_{m=0}^{\infty} U_{m+m_3-m_2} x^{m+m_3-m_2} + x^{m_3} \sum_{m=0}^{\infty} U_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+m_3}. \end{aligned}$$

Полагая

$$F_U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m x^m,$$

получаем:

$$\begin{aligned} F_U(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} U_m x^m &= x^{m_1} \left(F_U(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} U_m x^m \right) + \\ &+ x^{m_2} \left(F_U(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^m \right) + x^{m_3} F_U(x) + \sum_{m=m_3}^{\infty} x^m. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и выполним перенос слагаемых:

$$\begin{aligned} F_U(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} U_m x^m &= x^{m_1} F_U(x) - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} U_m x^m + \\ &+ x^{m_2} F_U(x) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^m + x^{m_3} F_U(x) + \sum_{m=m_3}^{\infty} x^m, \\ F_U(x) - x^{m_1} F_U(x) - x^{m_2} F_U(x) - x^{m_3} F_U(x) &= \\ = \sum_{m=0}^{m_3-1} U_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} U_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^m + \sum_{m=m_3}^{\infty} x^m. \end{aligned}$$

Согласно начальным условия (9) и соотношениям (10) – (11), выпишем отдельно правую часть последнего равенства и выполним для нее преобразования:

$$\sum_{m=0}^{m_3-1} U_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} U_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^m + \sum_{m=m_3}^{\infty} x^m =$$

О. В. Кузьмин, М. В. Стрихарь. Моделирование неполных покрытий отрезка на основе сумм элементов верхних отсечений пирамиды ...

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{m=0}^{m_1-1} U_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} U_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} U_m x^m \right) - \\
&- x^{m_1} \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} U_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} U_m x^m \right) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^m + \\
&+ \left(\sum_{m=m_1}^{\infty} x^m - \sum_{m=m_1}^{m_2-1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} x^m \right) = \\
&= \sum_{m=0}^{m_1-1} x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} U_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} U_m x^m - \\
&- \sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} U_m x^{m+m_1} - \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} U_m x^{m+m_1} - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} U_m x^{m+m_2} + \\
&+ \sum_{m=m_1}^{\infty} x^m - \sum_{m=m_1}^{m_2-1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} x^m = \\
&= \sum_{m=0}^{m_1-1} x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} U_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} U_m x^m - \\
&- \sum_{m=m_1}^{m_2-1} U_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} U_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} U_{m-m_2} x^m + \\
&+ \sum_{m=m_1}^{\infty} x^m - \sum_{m=m_1}^{m_2-1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} x^m = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (U_m - U_{m-m_1} - 1) x^m + \\
&+ \sum_{m=m_2}^{m_3-1} (U_m - U_{m-m_1} - U_{m-m_2} - 1) x^m = \\
&= \frac{1}{1-x} + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m = \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к тому моменту, когда была выписана отдельно правая часть, получаем:

$$F_U(x) (1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}) = \frac{1}{1-x},$$

то есть производящая функция последовательности $\{U_m\}$, $m \in \mathbf{N}_0$, имеет вид:

$$F_U(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^{m_1}-x^{m_2}-x^{m_3})},$$

что и требовалось доказать.

6 Известные числовые последовательности

В первых трех столбцах таблицы 1 приведены 10 троек значений чисел m_1 , m_2 и m_3 неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка.

В четвертом столбце — соответствующие последовательности U_m , $m \in \mathbf{N}_0$ количества неполных $(m; m_1, m_2, m_3)$ -покрытий отрезка длины m . Здесь первое число показывает количество неполных покрытий отрезка длины 0, второе число отвечает за количество покрытий отрезка длины 1 и так далее.

В пятом и шестом столбце указаны углы верхних отсечений пирамиды Паскаля, в которых были выявлены эти последовательности, а в последнем столбце приведены номера полученных последовательностей в [9]. Символ * рядом с номером последовательности был добавлен в случаях, когда полученные нами числа совпали с указанными в [9], начиная с определенного номера.

m_1	m_2	m_3	$U_m, m \in \mathbf{N}_0$	$\text{tg } \phi_1$	$\text{tg } \phi_2$	№ в [9]
1	2	2	1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, ...	1	1	A000975*
1	1	1	1, 4, 13, 40, 121, 364, 1093, 3280, ...	0	0	A003462*
1	3	3	1, 2, 3, 6, 11, 18, 31, 54, 91, 154, ...	2	2	A003479
1	2	3	1, 2, 4, 8, 15, 28, 52, 96, 177, ...	2	1	A008937*
2	3	4	1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 16, 24, 35, ...	1	1/2	A023435*
1	1	2	1, 3, 8, 20, 49, 119, 288, 696, ...	-1/2	-1/2	A048739
2	2	3	1, 1, 3, 4, 8, 12, 21, 33, 55, 88, ...	-1/3	-1/3	A052952
1	1	3	1, 3, 7, 16, 36, 80, 177, 391, 863, ...	-2/3	-2/3	A077852
2	3	3	1, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 20, 33, 49, 74, ...	1/2	1/2	A077882*
1	3	4	1, 2, 3, 5, 9, 15, 24, 39, 64, 104, ...	3	2	A097083

Таблица 1. Неполные покрытия отрезка длины m и некоторые известные комбинаторные числа

Рассмотрим подробнее некоторые последовательности из таблицы 1.

6.1 Суммы чисел Якобсталя

В первой строке таблицы 1 показаны неполные $(m; 1, 2, 2)$ -покрытия при $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$. Поскольку $m_2 = m_3$, то покрывающие отрезки длины 2 окрашены разными цветами. При этом цвета отрезков длин m_1 и m_2 совпадают.

Количества неполных $(m; 1, 2, 2)$ -покрытий U_m , $m \in \mathbf{N}_0$ образуют последовательность чисел 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, 682, 1365, ..., и выявляются при суммировании элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля, для которых один из шести вариантов расположения, согласно (6) и (12), будет при $\operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \phi_2 = 1$.

Соотнеся полученные числа с указанными в [9], получаем последовательность сумм чисел Якобстала [7], указанной под номером A000975, которая определяется при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + 2 \cdot a_{m-2} + 1, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2,$$

со сдвигом на единицу относительно U_m , т.е. $U_m = a_{m+1}$.

Число неполных $(m; 1, 2, 2)$ -покрытий при этом вычисляется по формуле (6):

$$U_m(1, 1) = \sum_{r=0}^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - i} \binom{r-i-j}{i, j},$$

и удовлетворяет, согласно (8) – (11), рекуррентному соотношению

$$U_m = U_{m-1} + 2U_{m-2} + 1, S_0 = 1, S_1 = 2.$$

Соответствующая производящая функция, согласно (13), имеет вид

$$F_U(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x-2x^2)}.$$

6.2 Суммы степеней числа 3

Во второй строке таблицы 1 показаны неполные $(m; 1, 1, 1)$ -покрытия при $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Поскольку длины всех трех покрывающих отрезков совпадают, то окрашиваем их тремя разными цветами.

Количества неполных $(m; 1, 1, 1)$ -покрытий U_m , $m \in \mathbf{N}_0$ образуют последовательность чисел 1, 4, 13, 40, 121, 364, 1093, 3280, 9841, ..., и выявляются при суммировании элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля с горизонтальными плоскими основаниями, для которых, согласно (6) и (12) $\operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \phi_2 = 0$.

Соотнеся полученные числа с указанными в [9], получаем последовательность сумм степеней числа 3, указанной под номером A003462:

$$a_m = (3^m - 1)/2,$$

со сдвигом на единицу относительно U_m , т.е. $U_m = a_{m+1}$.

Число неполных $(m; 1, 1, 1)$ -покрытий вычисляется по формуле (6):

$$U_m(0, 0) = \sum_{r=0}^m \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} \binom{r}{i, j},$$

и удовлетворяет, согласно (8) – (11), рекуррентному соотношению

$$U_m = 3U_{m-1} + 1, S_0 = 1.$$

Производящая функция, согласно (13), имеет вид

$$F_U(x) = \frac{1}{(1-x)(1-3x)}.$$

6.3 Суммы чисел Трибоначчи

Четвертая строка таблицы 1 содержит информацию по неполным $(m; 1, 2, 3)$ -покрытиям отрезками разных длин одного цвета.

Количества неполных $(m; 1, 2, 3)$ -покрытий U_m , $m \in \mathbf{N}_0$ образуют последовательность чисел 1, 2, 4, 8, 15, 28, 52, 96, 177, 326, 600, ..., и выявляются при суммировании элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля, для которых, согласно (6) и (12) один из шести вариантов расположения имеем при $\text{tg } \phi_1 = 1$, $\text{tg } \phi_2 = 2$.

Соотнеся полученные числа с указанными в [9], получаем последовательность сумм чисел Трибоначчи, указанной под номером A008937, которая определяется соотношением:

$$a_m = 1 + a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2,$$

со сдвигом на единицу относительно U_m , т.е. $U_m = a_{m+1}$.

Число неполных $(m; 1, 2, 3)$ -покрытий вычисляется по формуле:

$$U_m(1, 2) = \sum_{r=0}^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{3} \rfloor - i} \binom{r-i-2j}{i, j},$$

и удовлетворяет, согласно (8) – (11), рекуррентному соотношению

$$U_m = U_{m-1} + U_{m-2} + U_{m-3} + 1, U_0 = 1, U_1 = 2, U_2 = 4.$$

Производящая функция, исходя из (13), имеет вид

$$F_U(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x-x^2-x^3)}.$$

Заключительные положения

В данной работе были исследованы некоторые геометрические свойства пирамиды Паскаля и доказано, что сумма элементов верхних отсечений пирамиды Паскаля равна количеству неполных покрытий соответствующего ей отрезка. Найдены формула вычисления количества неполных покрытий отрезка в явном виде, рекуррентные соотношения

и производящие функции для этих чисел. Результаты, представленные в данной работе, могут быть использованы в построении моделей машинного обучения как для анализа больших объемов данных, так и при их проектировании. Подсчитав количество возможных комбинаций данных, либо различного рода связанных с ними событий, можно определять требования к хранению данных и прогнозировать их изменения для принятия более обоснованных решений и оптимизации производственных процессов. Дальнейшее исследование предполагает рассмотрение различных обобщений пирамиды Паскаля и их частей.

Литература

1. Бондаренко Л. Н. Моделирование комбинаторных последовательностей // Образовательные ресурсы и технологии. 2019. № 2 (27). С. 64–73. DOI: 10.21777/2500-2112-2019-2-64-73
2. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000. 294 с.
3. Кузьмин О. В., Серёгина М. В. Верхние отсечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. «Математика и физика». 2010. Т. 3, вып. 4. С. 533–543.
4. Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Моделирование полных покрытий отрезка на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 38–52.
5. Платонов М. Л., Докин В. Н. Треугольная схема развития популяций // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 1975. № 35. С. 26–31.
6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
7. Ćerin Z. Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers. *Journal of Integer Sequences*. 2007; 10. Article 07.2.5. 15 p., electronic only: <https://www.maths.tcd.ie/EMIS/journals/JIS/VOL10/Cerin/cerin45.pdf> (дата обращения: 22.10.2023)
8. Kuzmin O. V., Seregina M. V. Plane section of generalized Pascal pyramid and their interpretations. *Discrete Mathematics and Applications*. 2010; 20 (4): 377–389. DOI: <https://doi.org/10.1515/DMA.2010.023>
9. Sloane N. J. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at <http://oeis.org>. (дата обращения: 22.10.2023)

Статья поступила в редакцию 21.10.2024; одобрена после рецензирования 11.11.2024; принята к публикации 12.11.2024.

MODELING OF A SEGMENT'S INCOMPLETE COVERINGS BASED
ON THE SUMS OF PASCAL'S PYRAMID UPPER UNITS ELEMENTS

Oleg V. Kuzmin

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
The Department Head of Probability Theory and Discrete Mathematics
Institute of Mathematics and Information Technologies
Irkutsk State University
20 Gagarin Blvd., Irkutsk, 664003, Russia

Marina V. Strikhar

Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Department of Applied Mechanics and Mathematics
Zabaikal'sk Rail Transport Institute
Irkutsk State Transport University
11 Magistralnaya st., Chita, 672040, Russia

Abstract. Combinatorial objects are one of the most important tools for solving problems related to data analysis and storage, creation and optimization of algorithms for their processing. In this case, there is a need to model both individual combinatorial numbers and their sequences. In this paper we study some geometric properties and interpretations of the Pascal's pyramid upper units, which is a spatial combinatorial configuration of a hierarchical structure. We obtain the generalized sequence of combinatorial numbers and present a calculation formula in explicit form for each of this number, as well as a recurrence relation and a generating function. We prove that the sum of the Pascal's pyramid upper unit elements is equal to the number of incomplete covers of the corresponding segment. Due to the symmetry of Pascal's pyramid we obtain some various formulas for calculating the number of such covers, and consider some of the most important special cases using the example of known combinatorial numbers.

Keywords: modeling, data processing, coverage of a segment, hierarchical structure, Pascal's pyramid, plane section of Pascal's pyramid, upper unit of Pascal's pyramid, numerical sequence, recurrence relation, generating function.

For citation

Kuzmin O. V., Strikhar M. V. Modeling of a Segment's Incomplete Coverings Based on the Sums of Pascal's Pyramid Upper Units Elements // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 3. P. 56–70.

The article was submitted 21.10.2024; approved after reviewing 11.11.2024; accepted for publication 12.11.2024.