Научная статья

УДК 51-7
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-3-71-78

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**
кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра «Математика им. Ц. Б. Шойнжурова»,
Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления,
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1,
кафедра фундаментальной математики,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова,
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
hanhvladnick@mail.ru

© **Пластинина Валентина Михайловна**
аспирант кафедры «Математика им. Ц. Б. Шойнжурова»,
Восточно-Сибирский государственный университет
технологий и управления,
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1
plastininav@yandex.ru

Аннотация. В работе представлена вычислительная модель решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных параболо-гиперболического типа в двумерном пространственном случае по явной и неявной разностным схемам. Математическая модель и эти конечно-разностные схемы разработаны для исследования тепловых процессов при отключении электрической дуги в спутном потоке газа. Анализируются недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая. Приводятся результаты работы программ, реализованных в MathCad-15, которые позволяют рассчитать изменение поля температуры в указанный период времени в прямоугольной области для переменных по пространственным координатам и времени бокового теплоотвода и внутреннего источника тепла. Для дискретизации по времени смешанного уравнения теплопроводности был использован метод локально-одномерной схемы.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, уравнения смешанного типа, локально-одномерный метод, краевые условия первого рода.

Благодарности
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-21-00269, https://rscf.ru/project/23-21-00269/.

Для цитирования

Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Математическая модель первой краевой задачи для двухмерного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 71–78.

Введение

В исследованиях, посвященных математическому моделированию процесса гашения электрической дуги в спутном газовом потоке, были проведены как аналитические, так и численные решения различных математических моделей гиперболического уравнения теплопроводности [1], выведенного на основе обобщения гипотезы Фурье [2]. Дифференциальное уравнение переноса в частных производных, полученное из классического закона Фурье, в двухмерном пространственном контексте принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Формула (1) является уравнением в частных производных параболического типа, и её точные решения демонстрируют известный характер бесконечно высокой скорости распространения температурного возмущения. Каждый локальный скачок температурной величины провоцирует немедленные изменения во всех точках окружающей среды, независимо от удаленности от отправной точки. Это расходится с теорией относительности и всеми известными принципами передачи тепла. Основанием данной ошибки в логической последовательности является то обстоятельство, что уравнение теплопередачи имеет первый порядок по временной переменной. Второй недостаток, связанный с этим — это ограничение задачи с начальными значениями. В задаче Коши допускается определение температуры Т исключительно на начальном этапе времени, то есть при t=0. В ходе экспериментов возможно адаптировать производную температуры по времени $\partial T/\partial t$ в момент времени t=0 согласно условиям эксперимента. Это достижимо в гиперболическом уравнении теплопроводности второго порядка во времени. Эксперименты, проведенные с использованием второго звука в твердом гелии и других кристаллических твердых телах при крайне низких температурах и короткой продолжительности, наглядно продемонстрировали, что тепло распространяется в виде затухающей волны. В случае практически бездефектной (идеальной) кристаллической структуры и соблюдения условий для второго звука, после импульсного нагрева можно наблюдать образование горбовидной области с повышенной температурой, которая перемещается с постоянной скоростью через материал [3]. Волна отражается от границ, постепенно теряя свою энергию в процессе движения. Затухающая тепловая волна описывается гиперболическим уравнением в частных производных, которое было впервые выведено Максвеллом, а затем предложено Верноттом и Каттанео [2]. Используя обобщенный закон Фурье, мы можем получить гиперболическое уравнение теплопроводности для двухмерного пространственного случая:

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

1 Постановка точной начально-краевой задачи

Вносим изменения в математическую модель, изучая уравнение теплопроводности параболо-гиперболического типа:

$$b(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+c(x,y,t)u+f(x,y,t), \tag{3}$$

в области $G=[0,X]\times[0,Y]\times[-T,T]$, T>0. При этом, $b(x,y,t)=0$, при $t\le 0$; $b(x,y,t)>0, t>0$; a(x,y,t)>0, для всех (x,y,t) из области G, т. е. при $t\le 0$ уравнение (3) — параболическое, а при t>0 — гиперболическое.

Начально-краевая задача. Для выполнения конкретного численного расчета в программе Mathcad-15 температурного поля в однородной мембране с X=Y=π и промежутком времени [-T,T] используются следующие значения коэффициентов: b(x,y,t)=0 при $t\le 0$; b(x,y,t)=1 при t>0; a=1, c(x,y,t)=const<0, $\lambda=const>0$ и переменный источник тепла f(x,y,t).

Таким образом уравнение (3) примет вид:

$$b(x,y,t)u_{tt}+a(x,y,t)u_t=\lambda(u_{xx}+u_{yy})+c(x,y,t)u+f(x,y,t). \tag{4}$$

Начальные условия:

$$u(x,y,t)|_{t=T}=u_0(x,y), u_0=10sinx\cdot siny \tag{5}$$

$$\begin{gathered}u(0,y,t)=0, u(\pi,y,t)=0, u(x,0,t)=0,\\ u(x,\pi,t)=0, 0\le x,y\le\pi, -T<t\le T.\end{gathered} \tag{6}$$

2 Численное решение поставленной задачи по явной конечно-разностной схеме

Мы применим метод конечно-разностной аппроксимации [4] к формулировке начально-краевой задачи (4-6) для получения дискретного решения функции u(x,y,t). Дискретная функция $U^k_{i,j}$, будет определена

в узле, заданном координатами: $x_i = ih, y_j = jh, t^k = k$.
Рассмотрим явную разностную схему для уравнения (3):

$$b(x,y,t)\frac{U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k} + U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} + a(x,y,t)\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^{k}}{\tau} =$$
$$= \lambda\frac{U_{i+1,j}^{k} - 4U_{i,j}^{k} + U_{i-1,j}^{k} + U_{i,j-1}^{k} + U_{i,j+1}^{k}}{h^2} + c(x,y,t)U_{i,j}^{k} + f(x,y,t).$$

Для уравнения (4) получим:

$$b\frac{U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k} + U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} + \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^{k}}{\tau} =$$
$$= \lambda\frac{U_{i+1,j}^{k} - 4U_{i,j}^{k} + U_{i-1,j}^{k} + U_{i,j-1}^{k} + U_{i,j+1}^{k}}{h^2} + cU_{i,j}^{k} + f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Из предыдущего уравнения далее выводим расчетную формулу для параболического уравнения при $t \leq 0$:

$$U_{i,j}^{k+1} = (1 - \frac{4\lambda\tau}{h^2} + c\tau)U_{i,j}^{k} + \frac{\lambda\tau}{h^2}(U_{i+1,j}^{k} + U_{i-1,j}^{k} + U_{i,j-1}^{k} + U_{i,j+1}^{k}) + \tau f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Итоговые формулы для расчета в среде программирования для гиперболического уравнения при t>0 принимают следующий вид:

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{1+\tau}(2 + \tau - \frac{4\lambda\tau^2}{h^2} + c\tau^2)U_{i,j}^{k} - \frac{1}{1+\tau}U_{i,j}^{k-1} +$$

$$+ \frac{\lambda\tau^2}{(1+\tau)h^2}(U_{i+1,j}^{k} + U_{i-1,j}^{k} + U_{i,j-1}^{k} + U_{i,j+1}^{k}) + \frac{\tau^2}{1+\tau}f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Проводим дискретизацию первых краевых условий:

$$U_{i,0}^{k} = 0, U_{i,n}^{k} = 0, U_{0,j}^{k} = 0, U_{n,j}^{k} = 0.$$

Метод решения данного уравнения с использованием явной разностной схемы в среде MathCAD-15 описан в работах [10, 11, 12].

3 Численное решение поставленной задачи по неявной конечно-разностной схеме

Применяя метод конечно-разностной аппроксимации [4] к точной формулировке начально-краевой задачи (4-6), рассмотрим дискретную реализацию по неявной разностной схеме для уравнения (4) с использованием локально-одномерного метода [5, 6]:

$$\frac{U_{i,j}^{k+1}-2U_{i,j}^{k}+U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2}+\frac{U_{i,j}^{k+1}-U_{i,j}^{k}}{\tau}=$$

$$=\lambda\frac{U_{i+1,j}^{k+1}-4U_{i,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2}+cU_{i,j}^{k+1}+f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Тогда, формулы для параболического уравнения при $t\leq 0$ имеют вид:

$$\frac{U_{i,j}^{k+1}-U_{i,j}^{k}}{\tau}=\lambda\frac{U_{i+1,j}^{k+1}-4U_{i,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2}+$$

$$+cU_{i,j}^{k+1}+f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Приводим к канонической форме для определения коэффициентов метода прогонки [4].

$$\frac{\lambda}{h^2}(U_{i+1,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1})-(\frac{1}{\tau}+\frac{4\lambda\tau}{h^2}-c)U_{i,j}^{k+1}+\frac{\lambda}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1})=$$

$$=-\frac{1}{\tau}U_{i,j}^{k}-f(x_i,y_j,t_{k+1})$$

Обозначим коэффициенты в этом уравнении для дальнейшего использования в программировании:

$$A=C=\frac{\lambda}{h^2},$$

$$B=\frac{1}{\tau}+\frac{4\lambda\tau}{h^2}-c,$$

$$D=-\frac{1}{\tau}U_{i,j}^{k}-f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Прогонку проводим сначала в направлении оси Ox, потом в направлении оси Oy. Формулы для гиперболического уравнения при t>0 так же приводим к канонической форме. Домножаем правую и левую часть уравнения на τ^2 и приводим подобные слагаемые:

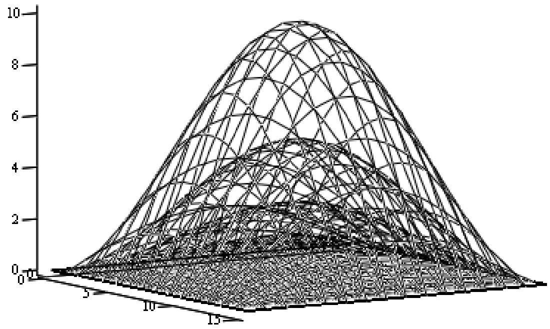

Рис. 1. График смещения поля температуры

$$U_{i,j}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k} + U_{i,j}^{k-1} + \tau(U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^{k}) =$$

$$= \frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i+1,j}^{k+1} - 4U_{i,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}) + c\tau^2 U_{i,j}^{k+1} + \tau^2 f(x_i, y_j, t_{k+1}),$$

$$\frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i+1,j}^{k+1}) - (1 + \tau + \frac{4\lambda\tau^2}{h^2} - c\tau^2)U_{i,j}^{k+1} + \frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1}) =$$

$$= -(2+\tau)U_{i,j}^{k} + U_{i,j}^{k-1} - \tau^2 f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Тогда, получаем коэффициенты для использования в системе программирования:

$$A = C = \frac{\lambda\tau^2}{h^2},$$

$$B = 1 + \tau + \frac{4\lambda\tau^2}{h^2} - c\tau^2,$$

$$D = -(2+\tau)U_{i,j}^{k} + U_{i,j}^{k-1} - \tau^2 f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Заключение

Эта модель адекватно описывает процессы, связанные с отключением электрической дуги в газовом потоке. В дальнейшем эта математическая модель может быть применена к более реалистичным задачам в трехмерном пространственном случае, с использованием методов теплового баланса.

Литература

1. Ханхасаев В. Н., Дармахеев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения // Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 89–97.

2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Москва: УРРС, 2004. 296 с.

3. Gunter Scharf. Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation // arXiv:1612.08527 [math-ph] (дата обращения: 01.02.2021).

4. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. Москва: Высшая школа, 1990. 207 с.

5. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. Изд. 2, испр., доп. Москва: Физматлит, 2006. 400 с.

6. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172 с.

7. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. 84 с.

8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 736 с.

9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.

10. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Двумерный пространственный случай первой краевой задачи для смешанного оператора теплопроводности // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23): материалы VIII Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2023. С. 241–244.

11. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Численное решение смешанного уравнения теплопроводности в двухмерном пространственном случае // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: материалы международной научной конференции. Ташкент: Изд-во Национального университета Узбекистана, 2023. С. 194–196. URL: https://mpdea.uz/web/ (дата обращения: 01.11.2023).

12. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024663689 «Программа решения первой краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения теплопроводности в двухмерном пространственном случае» от 10.06.2024.

13. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024667486 «Численное решение первой краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения по неявной схеме в двухмерном пространственном случае» от 25.07.2024.

Статья поступила в редакцию 02.09.2024; одобрена после рецензирования 11.11.2024; принята к публикации 12.11.2024.

MATHEMATICAL MODEL THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED EQUATION THERMAL CONDUCTIVITY

Vladislav N. Khankhasaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Math Department named after Ts. B. Shoynzhurov
East Siberia State University of Technology and Management
Klyuchevskaya St. 40V, Ulan-Ude 670013, Russia
Dorji Banzarov Buryat State University
Smolina St. 24a, Ulan-Ude, 670000, Russia
hanhvladnick@mail.ru

Valentina M. Plastinina
Graduate student (Phys. and Math.),
Math Department named after Ts. B. Shoynzhurov
East Siberia State University of Technology and Management
Klyuchevskaya St. 40V, Ulan-Ude, 670013, Russia
plastininav@yandex.ru

Abstract. The paper presents a computational model for solving the first boundary value problem for a partial differential equation of parabolic-hyperbolic type in a two-dimensional spatial case using explicit and implicit difference schemes. The mathematical model and these finite difference schemes are designed to study thermal processes when an electric arc is switched off in a satellite gas flow. The disadvantages of using the classical parabolic equation of thermal conductivity for this case are analyzed. The results of the work of programs implemented in MathCad-15, which allow us to calculate the change in the temperature field during a specified period of time in a rectangular area for variables in spatial coordinates and time of the lateral heat sink and internal heat source, are presented. To discretize the mixed thermal conductivity equation in time, the method of a locally one-dimensional scheme was used.

Keywords: hyperbolic equation of thermal conductivity, equation of mixed type, locally one-dimensional method, boundary conditions of the first kind.

For citation
Khankhasaev V. N., Plastinina V. M. Mathematical Model the First Boundary Value Problem for a Mixed Equation Thermal Conductivity // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 3. P. 71–78.

The article was submitted 02.09.2024; approved after reviewing 11.11.2024; accepted for publication 12.11.2024.