УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2024-4-58-68

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОИСКУ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

© Курохтин Вениамин Юрьевич
кандидат технических наук,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
kurokhtin91@gmail.com

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
buldaev@mail.ru

© Мижидон Арсалан Дугарович
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
miarsdu@mail.ru

© Анахин Владимир Дмитриевич
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
anakhin@mail.ru

Аннотация. В рассматриваемом классе дискретно-непрерывных управляемых систем строится аналог классических формул приращения целевой функции стандартного вида с остаточными членами разложений с линейной по приращению управления главной частью приращения. На основе полученной формулы строится условие оптимальности управления в виде задачи о неподвижной точке в пространстве допустимых управляющих параметров. Предложенный подход позволяет применять известную теорию и методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений. Приводятся иллюстрирующие примеры поиска экстремальных управлений предлагаемым методом неподвижных точек в дискретно-непрерывных задачах на экстремум нормы конечного состояния линейной управляемой системы. Полученные экстремальные управления сравниваются с известными решениями, полученными в рамках применения к рассматриваемым примерам альтернативного подхода параметризации управлений.

Ключевые слова: дискретно-непрерывная система, условие оптимальности управления, задача о неподвижной точке, экстремальное управление.

Для цитирования
Об одном подходе к поиску экстремальных управлений в дискретно-непрерывных системах / *В. Ю. Курохтин, А. С. Булдаев, А. Д. Мижидон, В. Д. Анахин* // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 4. С. 58–68.

Введение

Дискретно-непрерывные модели управляемых процессов имеют актуальность, поскольку многие современные приложения (экономические, технические и другие) не могут быть соответствующим образом описаны неизменными в течение рассматриваемого временного интервала дифференциальными уравнениями. В этом случае распространенным методом моделирования является дискретизация по управлению и состоянию, в результате чего появляются модели, неоднородные по своей структуре [1–5].

Такие дискретные модели также могут служить для анализа соответствующих непрерывных задач и поиска их приближенных решений, которые в дальнейшем могут быть использованы как начальные приближения для решений исходных задач. Этот подход прошел апробацию в различных областях [6; 7]. В некоторых объектах управление технически может изменяться лишь дискретным образом [8; 9].

Дискретизация только по управлению была рассмотрена во многих исследованиях (например, [10; 11]). В [12; 13] рассматриваются дискретно-непрерывные модели с кусочно-линейными аппроксимациями управления, в которых состояние системы на интервалах аппроксимации представляется в виде дифференциальных уравнений. В [12] задачи решаются при помощи градиентных методов, которые применяются к эквивалентным конечномерным задачам в пространстве управлений. В [13] для решения эквивалентных конечномерных квадратичных задач используются модификации методов принципа максимума.

В данной статье рассматривается новый подход к решению дискретно-непрерывных задач оптимального управления на основе представления условия оптимальности в форме задачи о неподвижной точке в пространстве управлений. Подход иллюстрируется примерами нахождения экстремальных управлений в задачах на экстремум нормы конечного состояния линейных динамических систем.

1 Метод неподвижных точек

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_N)) \to \inf_{u=\{u_1,\dots,u_N\}\in\Omega}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u_k, t),\ x(t_0) = x^0,\ u_k \in U_k \subset R^{m(k)},\ t \in T_k = [t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1, N}, \tag{2}$$

в которой функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n, функции $f_k(x, u_k, t), k = \overline{1, N}$ и их частные производные по переменным x, u_k

непрерывны на множествах $R^n \times U_k \times T_k,\, k=\overline{1,N}$. Допустимые управления рассматриваются в виде N-мерных наборов $m(k)$-мерных векторов $u=\{u_1,\dots,u_N\},\, u_k \in U_k,\, k=\overline{1,N}$. Обозначим Ω множество допустимых наборов векторов управлений. Множества $U_k \subset R^{m(k)},\, k=\overline{1,N}$ компактны и выпуклы. Начальное состояние x^0 и интервалы $T_k,\, k=\overline{1,N}$ фиксированы.

Обозначим через $x(t,v),\, t\in T=[t_0,t_N]$ решение системы (2) при управлении $v=\{v_1,\dots,v_N\}\in\Omega$. Значения $x(t,v),\, t\in T_k,\, k=\overline{1,N}$ определяются путем последовательного интегрирования системы (2) на интервалах T_k при $u_k=v_k,\, t\in T_k,\, k=\overline{1,N}$.

Задача (1)–(2) может рассматриваться как задача математического программирования, в которой необходимо найти такой набор векторов $u=\{u_1,\dots,u_N\}$ при заданном разбиении интервала времени T на подынтервалы $T_k=[t_{k-1},t_k],\, k=\overline{1,N}$, чтобы выполнялось условие (1).

Введя следующее обозначение частного приращения вектор-функции $g(y_1,\dots,y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2}:

$$\Delta_{z_{s_1},z_{s_2}} g(y_1,\dots,y_l)=g\left(y_1,\dots,z_{s_1},\dots,z_{s_2},\dots,y_l\right)-\\ -g\left(y_1,\dots,y_{s_1},\dots,y_{s_2},\dots,y_l\right),$$

приращение функции (1) на управлениях u, v можно записать:

$$\Delta_v\Phi(u)=\Delta_{x(t_N,v)}\varphi\left(x(t_N,u)\right). \tag{3}$$

Также обозначим $\Delta x(t)=x(t,v)-x(t,u),\, \Delta u(t)=v(t)-u(t)$.

Рассмотрим кусочно-дифференцируемую вектор-функцию $\psi(t)=\left(\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)\right),\, t\in T$ с условием:

$$\psi(t_N)=-\varphi_x\left(x(t_N,u)\right).$$

Тогда приращение (3) можно записать в виде:

$$\Delta_v\Phi(u)=-\left\langle\psi(t_N),\Delta x(t_N)\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x(t_N)\right\|\right).$$

Рассмотрим тождество:

$$\left\langle\psi(t_N),\Delta x(t_N)\right\rangle-\left\langle\psi(t_0),\Delta x(t_0)\right\rangle=\\ =\sum_{k=1}^{N}\left(\left\langle\psi(t_k),\Delta x(t_k)\right\rangle-\left\langle\psi(t_{k-1}),\Delta x(t_{k-1})\right\rangle\right)=\sum_{k=1}^{N}J_k. \tag{4}$$

Дифференциальная сопряженная система на интервалах $T_k,\, k=\overline{1,N}$ с переменными $\psi_k(t)=\left(\psi_{k_1}(t),\dots,\psi_{k_n}(t)\right)$ может быть определена при помощи функции Понтрягина H_k в следующем виде:

$$\dot{\psi}_k(t) = -H_{k_x}\left(\psi_k(t), x(t,u), u_k, t\right), t \in T_k$$

с условиями:

$$\psi_N(t_N) = \psi(t_N), \psi_k(t_k) = \psi_{k+1}(t_k), k = \overline{1, N-1}.$$

Определим функцию $\psi(t), t \in T$ следующим образом:

$$\psi(t) = \psi_k(t), t \in T_k, k = \overline{1, N}.$$

Каждое из слагаемых $J_k, k = \overline{1, N}$ в тождестве (4) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} J_k &= \left\langle \psi_k(t_k), \Delta x(t_k) \right\rangle - \left\langle \psi_k(t_{k-1}), \Delta x(t_{k-1}) \right\rangle = \int_{T_k} \frac{d}{dt} \left\langle \psi_k(t), \Delta x(t) \right\rangle dt = \\ &= \int_{T_k} \left\{ \left\langle \dot{\psi}_k(t), \Delta x(t) \right\rangle + \left\langle \psi_k(t), \Delta_{x(t,v), v_k} f_k\left(x(t,u), u_k, t\right) \right\rangle \right\} dt = \\ &= \int_{T_k} \left\{ \begin{aligned} -\left\langle H_{k_x}\left(\psi_k(t), x(t,u), u_k, t\right), \Delta x(t) \right\rangle + \\ +\Delta_{x(t,v), v_k} H_k\left(\psi_k(t), x(t,u), u_k, t\right) \end{aligned} \right\} dt. \end{aligned} \tag{5}$$

В соответствии с [14; 15] (5) может быть представлено в виде:

$$J_k = \int_{T_k} \Delta_{v_k} H_k\left(\psi_k(t), x(t,v), u_k, t\right) dt + o\left(\left\| \Delta u_k \right\|\right).$$

Тогда (3) принимает вид:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \Delta_{v_k} H_k\left(\psi_k(t), x(t,v), u_k, t\right) dt + o\left(\sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta u_k \right\| \right). \tag{6}$$

Введем следующую систему для переменной $\psi(t), t \in T$:

$$\dot{\psi}(t) = -H_{k_x}\left(\psi(t), x(t), w_k, t\right), t \in T_k, k = \overline{1, N} \tag{7}$$

с начальным условием:

$$\psi(t_N) = -\varphi_x\left(x(t_N)\right). \tag{8}$$

Пусть $\psi(t,v), t \in T = [t_0, t_N]$ — решение системы (7)–(8), полученное путем последовательного интегрирования на интервалах $T_k, k = \overline{1, N}$ при $w_k = v_k, t \in T_k, k = \overline{1, N}, x(t) = x(t,v), t \in T$. Тогда приращение (6) принимает вид:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \Delta_{v_k} H_k\left(\psi(t,u), x(t,u), u_k, t\right) dt + o\left(\sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta u_k \right\| \right). \tag{9}$$

Из (9) следует формула, в которой главная часть линейна по приращению управления:

$$\Delta_v \Phi(u) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u), x(t,u), u_k, t\right), \Delta u_k \right\rangle dt + o\left(\sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta u_k \right\| \right). \tag{10}$$

В линейной по управлению задаче (1)–(2), когда функции $f_k, k = \overline{1, N}$ линейны по u, формула (9) совпадает с формулой (10).

На основе формулы (10) получаем необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(2) для управления $u \in \Omega$ в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u),x(t,u),u_k,t\right),w_k-u_k\right\rangle dt\le 0,\ w=\{w_1,\dots,w_N\},\quad w_k\in U_k,\ k=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Представим неравенство (11) в виде эквивалентной системы:

$$\int_{T_k}\left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u),x(t,u),u_k,t\right),w-u_k\right\rangle dt\le 0,\ w\in U_k,\ k=\overline{1,N}.$$

Данную систему можно представить в виде системы уравнений

$$u_k=\operatorname*{arg\,max}_{w\in U_k}\int_{T_k}\left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u),x(t,u),u_k,t\right),w\right\rangle dt,\ k=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Для поиска экстремальных управлений можно использовать известные градиентные методы, основанные на формуле приращения (10).

В данной работе предлагается поиск экстремальных управлений на основе решения задачи о неподвижной точке (12) в пространстве допустимых управлений $u=\{u_1,\dots,u_N\}$.

2 Примеры

Рассмотрим иллюстрирующие примеры поиска экстремальных управлений, основанные на предлагаемом подходе неподвижных точек.

Пример 1. Рассматривается задача оптимального по энергии управления гармоническим осциллятором [16; 17]. Дискретно-непрерывная аппроксимация задачи рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений на интервале $T=[0;\pi]$ с точкой $\Theta_1=\frac{\pi}{2}$, разделяющей интервал T на два непересекающихся интервала $0=\Theta_0<\Theta_1<\Theta_2=\pi$:

$$\dot{x}_1=x_2;\quad \dot{x}_2=-x_1+u;\quad x_1(0)=-1;\quad x_2(0)=1;$$

$$|u(t)|\le 1;\quad t\in T=[0;\pi];$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi)+x_2^2(\pi)\right)\to\operatorname*{extr}_{u\in V}.$$

1.1. Задача на минимум целевой функции:

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi)+x_2^2(\pi)\right)\to\inf_{u\in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi,x,u,t)=\langle\psi,f(x,u,t)\rangle-F(x,u,t)=\psi_1x_2+\psi_2(u-x_1); \tag{13}$$

$$\dot{\psi}_k=-H_{x_k};\quad \begin{cases}\dot{\psi}_1=-H_{x_1}=\psi_2;\\ \dot{\psi}_2=-H_{x_2}=-\psi_1;\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\psi_k(t_1) = -\varphi_{x_k}\left(x(t_1)\right); \quad t_1 = \pi; \quad \varphi\left(x(t_1)\right) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right); \\ &\psi_1(\pi) = -\varphi_{x_1}\left(x(t_1)\right) = -x_1(\pi); \quad \psi_2(\pi) = -\varphi_{x_2}\left(x(t_1)\right) = -x_2(\pi). \end{aligned} \tag{15}$$

Для допустимого $u = \{u_1; u_2\}$ определим:

— при $t \in T_1 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u) = -(1+u_1)\cos(t) + \sin(t) + u_1; \\ x_2(t,u) = (1+u_1)\sin(t) + \cos(t); \end{cases} \tag{16}$$

— при $t \in T_2 = \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u) = -(u_1+1)\cos(t) + (1+u_1-u_2)\sin(t) + u_2; \\ x_2(t,u) = (u_1+1)\sin(t) + (1+u_1-u_2)\cos(t). \end{cases} \tag{17}$$

Отсюда получаем систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = (u_1+u_2+1)\cos(t) + (u_2-u_1-1)\sin(t); \\ \psi_2(t,u) = -(u_1+u_2+1)\sin(t) + (u_2-u_1-1)\cos(t), \end{cases} \quad t \in T = [0; \pi].$$

Используя функцию $\operatorname{sign}(z)$, определяемую следующим образом:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} -1, \ z < 0; \\ +1, \ z > 0; \\ w \in [-1; 1], \ z = 0, \end{cases}$$

и с учетом того, что $H_u(\psi, x, u, t) = \psi_2(t,u)$, задача о неподвижной точке необходимого условия оптимальности (12) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_1} \psi_2(t,u)\,dt\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_2} \psi_2(t,u)\,dt\right). \end{cases}$$

Вычислив интегралы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(-2(u_1+1)\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(-2u_2\right). \end{cases} \tag{18}$$

Перебрав девять возможных случаев, определяющих значения правых частей системы (18), находим единственное решение $u = \{-1; 0\}$, являющееся оптимальным управлением рассматриваемой задачи. Соответствующее значение функционала составляет $\Phi(u) = 0$.

1.2. Задача на максимум целевой функции:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \sup_{u \in V}.$$

Преобразуем задачу на максимум в эквивалентную ей задачу на минимум:

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система сохраняют вид (13)–(14), а граничные условия (15) для сопряженной системы принимают вид:

$$\psi_1(\pi) = -\varphi_{x_1}\left(x(t_1)\right) = x_1(\pi); \quad \psi_2(\pi) = -\varphi_{x_2}\left(x(t_1)\right) = x_2(\pi).$$

Фазовые траектории на интервалах T_1 и T_2 сохраняют вид (16)–(17).

Получаем следующую сопряженную систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = -(u_1 + u_2 + 1)\cos(t) + (u_1 - u_2 + 1)\sin(t); \\ \psi_2(t,u) = (u_1 + u_2 + 1)\sin(t) + (u_1 - u_2 + 1)\cos(t), \end{cases} \quad t \in T = [0; \pi].$$

Соответственно получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(2(u_1 + 1)\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}(2u_2), \end{cases}$$

имеющую следующее множество решений:

$$\left\{u = \{1;1\};\, u = \{1;-1\};\, u = \{1;0\};\, u = \{-1;1\};\, u = \{-1;-1\};\, u = \{-1;0\}\right\}.$$

Из указанного множества максимум $\Phi(u) = 5$ исходному функционалу доставляют управления $u = \{1;1\}$ и $u = \{1;-1\}$.

Пример 2. Задача на экстремум нормы конечного состояния для двухступенчатой системы [16; 18]. Дискретно-непрерывная аппроксимация задачи рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений на интервале $T = [0; 2]$ с точкой $\Theta_1 = 1$, разделяющей интервал T на два непересекающихся интервала $0 = \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2 = 2$:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = -1;$$

$$|u(t)| \le 1; \quad t \in T = [0; 2];$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \operatorname*{extr}_{u \in V}.$$

2.1. Задача на минимум целевой функции:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t) \rangle - F(x,u,t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u; \tag{19}$$

$$\dot{\psi}_k = -H_{x_k}; \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -H_{x_1} = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -H_{x_2} = -\psi_1; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\psi_k\left(t_1\right)=-\varphi_{x_k}\left(x\left(t_1\right)\right); \quad t_1=2; \quad \varphi\left(x\left(t_1\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right);\\ &\psi_1(2)=-\varphi_{x_1}\left(x\left(t_1\right)\right)=-x_1(2); \quad \psi_2(2)=-\varphi_{x_2}\left(x\left(t_1\right)\right)=-x_2(2).\end{aligned} \tag{21}$$

Для допустимого $u=\{u_1;u_2\}$ определим:

— при $t\in T_1=[0;1]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u)=u_1\dfrac{t^2}{2}-t+2;\\ x_2(t,u)=u_1t-1;\end{cases} \tag{22}$$

— при $t\in T_2=(1;2]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u)=u_2\dfrac{t^2}{2}+\left(u_1-u_2-1\right)t+\dfrac{u_2}{2}-\dfrac{u_1}{2}+2;\\ x_2(t,u)=u_2t+u_1-u_2-1.\end{cases} \tag{23}$$

Отсюда получаем систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u)=-\dfrac{3}{2}u_1-\dfrac{1}{2}u_2;\\ \psi_2(t,u)=\left(\dfrac{3}{2}u_1+\dfrac{1}{2}u_2\right)t-4u_1-2u_2+1,\end{cases} \qquad t\in T=[0;2].$$

Поскольку $H_u(\psi,x,u,t)=\psi_2(t,u)$, задача о неподвижной точке принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u_1=\operatorname{sign}\left(\int_{T_1}\psi_2(t,u)\,dt\right);\\ u_2=\operatorname{sign}\left(\int_{T_2}\psi_2(t,u)\,dt\right).\end{cases}$$

Вычислив интегралы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1=\operatorname{sign}\left(-\dfrac{13}{4}u_1-\dfrac{7}{4}u_2+1\right);\\ u_2=\operatorname{sign}\left(-\dfrac{7}{4}u_1-\dfrac{5}{4}u_2+1\right).\end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $u=\left\{-\dfrac{3}{13};1\right\}$, являющееся оптимальным управлением рассматриваемой задачи. Соответствующее значение функционала составляет $\Phi(u)\approx 0{,}038$.

2.2. Задача на максимум целевой функции:

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right)\to\sup_{u\in V}.$$

Преобразуем задачу на максимум в эквивалентную ей задачу на минимум:

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система сохраняют вид (19)–(20), а граничные условия (21) для сопряженной системы принимают вид:

$$\psi_1(2) = -\varphi_{x_1}\left(x(t_1)\right) = x_1(2); \quad \psi_2(2) = -\varphi_{x_2}\left(x(t_1)\right) = x_2(2).$$

Фазовые траектории на интервалах T_1 и T_2 сохраняют вид (22)–(23).

Получаем следующую сопряженную систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = \dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2; \\ \psi_2(t,u) = -\left(\dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2\right)t + 4u_1 + 2u_2 - 1, \end{cases} \qquad t \in T = [0; 2].$$

Соответственно получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(\dfrac{13}{4}u_1 + \dfrac{7}{4}u_2 - 1\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(\dfrac{7}{4}u_1 + \dfrac{5}{4}u_2 - 1\right), \end{cases}$$

имеющую следующее множество решений:

$$\left\{ u = \{1; 1\};\, u = \{1; -1\};\, u = \left\{1; -\frac{3}{5}\right\};\, u = \{-1; -1\};\, u = \left\{\frac{11}{13}; -1\right\} \right\}.$$

Из указанного множества максимум $\Phi(u) = 6{,}5$ исходному функционалу доставляет управление $u = \{-1; -1\}$.

Рассмотренные примеры демонстрируют возможность определения оптимальных экстремальных управлений предлагаемым методом неподвижных точек в рассматриваемом классе дискретно-непрерывных задач.

Во всех рассмотренных примерах полученные оптимальные управления совпадают с оптимальными решениями, полученными в работе [16] в рамках альтернативного подхода параметризации управляющей функции.

Заключение

В классе дискретно-непрерывных управляемых систем построено необходимое условие оптимальности в виде задачи о неподвижной точке в пространстве управляющих параметров. Полученная форма условия оптимальности позволяет находить экстремальные управления методом поиска неподвижных точек соответствующей задачи о неподвижной точке. Применение подхода неподвижных точек для решения дискретно-непрерывных задач оптимального управления определяет перспективное направление исследований в области методов оптимального управления.

Литература

1. Emelyanov S., Korovin S., Mamedov I. Variable Structure Control Systems. Discrete and Digital. CRC Press, USA. 1995: 316.

2. The Control Handbook: Control System Advanced Methods. In: Levine, W. (eds). CRC Press, London, 2010: 1798.

3. Van der Schaft A., Schumacher H. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Springer, London, 2000: 174.

4. Gurman V., Rasina I. Discrete-continuous Representations of Impulsive Processes in the Controllable Systems // Automation and Remote Control. 2012; 8 (73): 1290–1300. DOI: 10.1134/S0005117912080024.

5. Mastaliyev R. Necessary Optimality Conditions in Optimal Control Problems by Discrete-continuous Systems // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2015; 1 (30): 4–10. DOI: 10.17223/19988605/30/1.

6. Evtushenko Y. Numerical Optimization Techniques. Publications Division, New York, 1985: 562.

7. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. Москва: Наука, 1975. 279 с.

8. Gurman V., Ni Ming Kang. Degenerate Problems of Optimal Control I // Automation and Remote Control. 2011; 4 (72): 497–511. DOI: 10.1134/S0005117911030039.

9. Moiseev A. Optimal Control Under Discrete Control Actions // Automation and Remote Control. 1991; 9 (52): 1274–1280.

10. Teo K., Goh C., Wong K. A Unified Computational Approach to Optimal Control Problem. Longman Group Limited. New York, 1991: 329.

11. Rahimov A. On an Approach to Solution to Optimal Control Problems on the Classes of Piecewise Constant, Piecewise Linear, and Piecewise Given Functions // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2012; 2 (19): 20–30.

12. Gorbunov V. A Method for the Parametrization of Optimal Control Problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979; 2 (19): 292–303.

13. Srochko V., Aksenyushkina E. Parametrization of Some Control Problems by Linear Systems // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2019; 30: 83–98. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.30.83.

14. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.

15. Vasiliev O. Optimization Methods. World Federation Publishers Company INC, Atlanta, 1996: 276.

16. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 3. С. 19–31. DOI: 10.18101/2304-5728-2020-3-19-31.

17. Галяев А. А., Лысенко П. В. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 1. С. 21–37. DOI: 10.1134/S0005231019010021.

18. Стрекаловский А. С., Шаранхаева Е. В. Глобальный поиск в невыпуклой задаче оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 10. С. 1785–1800.

Статья поступила в редакцию 01.12.2024; одобрена после рецензирования 12.12.2024; принята к публикации 16.12.2024.

ON ONE APPROACH TO SEARCHING FOR EXTREME CONTROLS IN DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEMS

Veniamin Yu. Kurokhtin
Cand. Sci. (Engineering),
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Arsalan D. Mizhidon
Dr. Sci. (Engineering), Professor,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vladimir D. Anakhin
Dr. Sci. (Engineering), Professor,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. In the considered class of discrete-continuous controlled systems, an analogue of classical formulas for the increment of the objective function of the standard form with residual terms of expansions with the main part of the increment linear in the control increment is constructed. Based on the obtained formula, the optimality condition of control is constructed in the form of a problem about a fixed point in the space of admissible control parameters. The proposed approach allows applying the known theory and methods of fixed points to search for extremal controls. Illustrative examples of searching for extremal controls by the proposed method of fixed points in discrete-continuous problems on the extremum of the norm of the final state of a linear controlled system are given. The obtained extremal controls are compared with known solutions obtained within the framework of applying an alternative approach to control parameterization to the considered examples.

Keywords: discrete-continuous system, condition for control optimality, fixed point problem, extreme control.

For citation

Kurokhtin V. Yu., Buldaev A. S., Mizhidon A. D., Anakhin V. D. On One Approach to Searching for Extreme Controls in Discrete-Continuous Systems // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 4. P. 58–68.

The article was submitted 01.12.2024; approved after reviewing 12.12.2024; accepted for publication 16.12.2024.