

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-2-3-12

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА И МЕТОД ПРОЕКЦИЙ НЕЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

© **Срочко Владимир Андреевич**

доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
srochko@math.isu.ru

© **Аксенюшкина Елена Владимировна**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
aksenyushkinaev@bgu.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления относительно линейной системы с квадратичным функционалом общего вида. С помощью матричной функции Габасова проводится линеаризация функционала по фазовым переменным. Для полученной линейной задачи применяется технология принципа максимума, которая на основе нелокальных формул приращения функционала реализуется в рамках метода проекций на множестве допустимых управлений. Метод гарантирует сходимость по невязке принципа максимума и является наиболее экономичной процедурой по трудоемкости: каждое улучшение по функционалу с квадратичной оценкой уменьшения обеспечивается всего лишь одной задачей Коши для фазовой или сопряженной системы.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, линеаризация функционала, нелокальный метод приращений.

Для цитирования

Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Линеаризация квадратичного функционала и метод проекций нелокального поиска экстремальных управлений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 2. С. 3–12.

1 Постановка задачи

Пусть $t \in T = [t_0, t_1]$ — независимая переменная (время), $x(t) \in R^n$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u(t) \in R$ — управляющая функция (управление).

Рассмотрим задачу (P) минимизации квадратичного функционала

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \frac{1}{2} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\langle x(t), Qx(t) \rangle + 2\langle a, x(t) \rangle u(t) + u^2(t)) dt \end{aligned} \quad (1)$$

на множестве допустимых управлений

$$U = \{u(\cdot) \in PC(T) : |u(t)| \leq 1, t \in T\}$$

относительно линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(t_0) = x^0.$$

Здесь D, Q — симметричные матрицы, $PC(T)$ — пространство кусочно-непрерывных на T функций.

Проведем преобразование функционала $\Phi(u)$ с целью ликвидации фазовых квадратичных форм в его выражении.

Введем в рассмотрение матричную функцию Габасова $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ согласно линейному матричному уравнению [2]

$$\dot{\Psi}(t) = -A^T \Psi(t) - \Psi(t)A - Q, \quad \Psi(t_1) = D.$$

Отметим симметричность матрицы $\Psi(t)$ и свойство знакоопределенности: если $D \geq 0$, $Q \geq 0$, то $\Psi(t) \geq 0$, $t \in T$.

Найдем производную по t квадратичной формы $\langle x(t), \Psi(t)x(t) \rangle$ в силу соответствующих уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), \Psi(t)x(t) \rangle = & \langle x(t), (\dot{\Psi}(t) + A^T \Psi(t) + \Psi(t)A)x(t) \rangle + \\ & + 2\langle \Psi(t)b, x(t) \rangle u(t) = -\langle x(t), Qx(t) \rangle + \\ & + 2\langle \Psi(t)b, x(t) \rangle u(t). \end{aligned}$$

После интегрирования по $t \in T$ получаем

$$\begin{aligned} \langle x(t_1), Dx(t_1) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), Qx(t) \rangle dt = \\ = \langle x(t_0), \Psi(t_0)x(t_0) \rangle + 2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \Psi(t)b, x(t) \rangle u(t) dt. \end{aligned}$$

При этом выражение для функционала принимает вид:

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \frac{1}{2} \langle x(t_0), \Psi(t_0)x(t_0) \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} (\langle a + \Psi(t)b, x(t) \rangle u(t) + \frac{1}{2} u^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Введем обозначение: $c(t) = a + \Psi(t)b$, $t \in T$.

В результате получаем упрощенное представление для функционала (фазовая линеаризация):

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \int_{t_0}^{t_1} (\langle c(t), x(t) \rangle u(t) + \frac{1}{2} u^2(t)) dt$$

вместе с соответствующей линейной задачей

$$\Phi(u) \rightarrow \min, \quad u \in U. \quad (2)$$

Приведем соотношения принципа максимума для задачи (2): функция Понтрягина —

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, Ax + bu \rangle - \langle c(t), x \rangle u - \frac{1}{2} u^2;$$

сопряженная система —

$$\dot{\psi} = -A^T \psi + c(t)u, \quad \psi(t_1) = 0;$$

максимизирующее управление —

$$\begin{aligned} u_*(\psi, x, t) &= \arg \max_{|u| \leq 1} H(\psi, x, u, t) = \\ &= \text{sat}(\langle b, \psi \rangle - \langle c(t), x \rangle). \end{aligned}$$

Здесь функция «насыщения» $\text{sat}(\cdot)$ (сатуратор [3]) определяется формулой:

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq 1, \\ \text{sign } y, & |y| > 1. \end{cases}$$

Понятно, что значение $\text{sat}(y)$ есть проекция точки $y \in R$ на отрезок $[-1, 1]$.

Следовательно, проекционная функция $u_*(\psi, x, t)$ определяется однозначно и удовлетворяет условию Липшица по переменным ψ, x на множестве $R^n \times R^n \times T$ [5].

Принцип максимума для управления $u \in U$ с соответствующими траекториями $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ фазовой и сопряженной систем определяется выражением:

$$u(t) = u_*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T \quad (3)$$

и является в рамках невыпуклой задачи (2) только необходимым условием оптимальности. Управление $u \in U$ с условием (3) назовем экстремальным в задаче (2).

Установим связь между линейно-квадратичной задачей (P) и линейной задачей (2) на уровне соотношений принципа максимума.

Для задачи (P):
сопряженная система относительно вектор-функции $p(t)$ —

$$\dot{p} = -A^T p + Qx + au, \quad p(t_1) = -Dx(t_1);$$

операция на максимум функции Понтрягина —

$$(\langle p, b \rangle - \langle a, x \rangle)u - \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \max, \quad |u| \leq 1.$$

Для задачи (2):
сопряженная система —

$$\dot{\psi} = -A^T \psi + au + \Psi(t)bu, \quad \psi(t_1) = 0;$$

операция на максимум функции Понтрягина —

$$(\langle \psi, b \rangle - \langle a, x \rangle - \langle \Psi(t)b, x \rangle)u - \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \max, \quad |u| \leq 1.$$

Связь между сопряженными вектор-функциями имеет вид

$$p(t) = \psi(t) - \Psi(t)x(t), \quad t \in T$$

и проверяется непосредственно.

Следовательно, задачи на максимум функции Понтрягина совпадают. При этом сопряженная система в линейной задаче (2) не зависит от x .

2 Вспомогательные соотношения

Получим оценку для частного приращения функции Понтрягина

$$\Delta_{u_*} H(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, u_*(\psi, x, t), t) - H(\psi, x, u, t).$$

Согласно свойству проекции $u_*(\psi, x, t)$ имеет место неравенство

$$[u_*(\psi, x, t) - (\langle b, \psi \rangle - \langle c(t), x \rangle)](u_*(\psi, x, t) - u) \leq 0, \quad |u| \leq 1.$$

При этом из определения функции H

$$\langle b, \psi \rangle - \langle c(t), x \rangle = H_u(\psi, x, u, t) + u.$$

Следовательно,

$$H_u(\psi, x, u, t)(u_*(\psi, x, t) - u) \geq (u_*(\psi, x, t) - u)^2, \quad |u| \leq 1.$$

Отсюда, используя представление

$$\Delta_{u_*} H(\psi, x, u, t) = H_u(\psi, x, u, t)(u_*(\psi, x, t) - u) - \frac{1}{2}(u_*(\psi, x, t) - u)^2,$$

получаем итоговую оценку для частного приращения функции $H(\psi, x, u, t)$

$$\Delta_{u_*} H(\psi, x, u, t) \geq \frac{1}{2}(u_*(\psi, x, t) - u)^2, \quad (4)$$

$$\psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T, \quad |u| \leq 1.$$

Метод отыскания экстремальных управлений определяется двумя процедурами решения фазовой или сопряженной систем на основе H -максимизирующего отображения $u_*(\psi, x, t)$.

Процедура 1. Пусть $u(t)$ — допустимое управление с фазовой траекторией $x(t, u)$, $t \in T$.

Найдем решение $\psi(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T \psi + c(t)u_*(\psi, x(t, u), t), \quad \psi(t_1) = 0$$

вместе с управлением $v(t) = u_*(\psi(t), x(t, u), t)$, при этом $\psi(t) = \psi(t, v)$, $t \in T$.

Результат: допустимое управление $v(t) = u_*(\psi(t, v), x(t, u), t)$ с сопряженной траекторией $\psi(t, v)$.

Процедура 2. Пусть $u(t)$ — допустимое управление с сопряженной траекторией $\psi(t, u)$, $t \in T$.

Найдем решение $x(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = Ax + bu_*(\psi(t, u), x, t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $v(t) = u_*(\psi(t, u), x(t), t)$, при этом $x(t) = x(t, v)$.

Результат: допустимое управление $v(t) = u_*(\psi(t, u), x(t, v), t)$ с фазовой траекторией $x(t, v)$.

Для компактной формализации представим данные процедуры схематично:

$$(v(t), \psi(t, v)) = P_1(u(t), x(t, u)), \quad (v(t), x(t, v)) = P_2(u(t), \psi(t, u)).$$

Укажем общие свойства описанных процедур.

1. Вычислительная трудоемкость: одна задача Коши для сопряженной или фазовой систем (глобальное решение $\psi(t, v)$ или $x(t, v)$ существует и единственно в силу глобального условия Липшица для функции $u_*(\psi, x, t)$).

2. Условие совпадения $v(t) = u(t)$, $t \in T$ означает, что управление $u(t)$ является экстремальным.

3. На основании общей оценки (4) для частного приращения функции $H(\psi, x, u, t)$ получаем следующие неравенства:

$$\Delta_{v(t)}H(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t) \geq \frac{1}{2}(v(t) - u(t))^2 \quad (5)$$

(первая процедура),

$$\Delta_{v(t)}H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t) \geq \frac{1}{2}(v(t) - u(t))^2 \quad (6)$$

(вторая процедура).

Построим итерационный метод поиска экстремальных управлений в задаче (2) со свойством нелокального улучшения по функционалу и наименьшей вычислительной трудоемкостью на итерацию по числу задач Коши.

3 Метод проекций

Теоретическую основу метода составляет симметричная пара формул приращения функционала Φ на управлениях $u, v \in U$ с траекториями $x(t, u)$, $x(t, v)$, $\psi(t, u)$, $\psi(t, v)$ [4]

$$\Phi(v) - \Phi(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)}H(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t)dt, \quad (7)$$

$$\Phi(v) - \Phi(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)}H(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t)dt. \quad (8)$$

Эти представления определяют, в первую очередь, правило построения управления $v(\cdot)$ через операцию на максимум функции H с целью обеспечения неравенства $\Phi(v) - \Phi(u) \leq 0$ для данного управления $u(\cdot)$.

При этом естественным образом используются обе представленные ранее процедуры. Проведем описание метода в безындексном формате.

Пусть получена пара $(u(t), x(t, u))$. Применяя первую процедуру, найдем пару $(v(t), \psi(t, v))$.

Применяя вторую процедуру для $(v(t), \psi(t, v))$, находим следующую пару $(w(t), x(t, w))$. Итерационный цикл завершен.

Схема итерации имеет вид:

$$\begin{aligned} (u(t), x(t, u)) &\Rightarrow P_1(u(t), x(t, u)) = (v(t), \psi(t, v)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_2(v(t), \psi(t, v)) = (w(t), x(t, w)). \end{aligned}$$

Укажем характеристику каждой процедуры с точки зрения функционала Φ .

На основании формулы (7) и неравенства (5) получаем оценку уменьшения функционала Φ после первой процедуры

$$\Phi(v) - \Phi(u) \leq -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))^2 dt. \quad (9)$$

Аналогично формула (8) и неравенство (6) после замены $u \Rightarrow v$, $v \Rightarrow w$ приводят к оценке уменьшения после второй процедуры

$$\Phi(w) - \Phi(v) \leq -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - v(t))^2 dt. \quad (10)$$

Таким образом, в рамках итерации ($u \Rightarrow v \Rightarrow w$) реализуется двойное улучшение функционала Φ с оценками (9), (10). При этом стоимость каждого улучшения – одна задача Коши для сопряженной или фазовой системы.

Из (9), (10) получаем оценку снизу

$$\Phi(u) - \Phi(w) \geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(v(t) - u(t))^2 + (w(t) - v(t))^2] dt.$$

Если $\Phi(u) - \Phi(w) = 0$, то $u(t) = v(t) = w(t)$, $t \in T$ и управление $u(t)$ является экстремальным.

Следовательно, величина приращения $[\Phi(u) - \Phi(w)]$ может служить невязкой принципа максимума для управления $u(\cdot)$.

Завершим презентацию метода стандартной формализацией с индексом $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} (u^k(t), x(t, u^k)) &\Rightarrow P_1(u^k(t), x(t, u^k)) = (v^k(t), \psi(t, v^k)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_2(v^k(t), \psi(t, v^k)) = (u^{k+1}(t), x(t, u^{k+1})). \end{aligned}$$

Оценка улучшения по функционалу:

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \leq -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(v^k(t) - u^k(t))^2 + (u^{k+1}(t) - v^k(t))^2] dt.$$

Невязка принципа максимума для управления $u^k(\cdot) : \delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$.

В условиях задачи (2) множество фазовых траекторий $\{x(t, u), u \in U\}$ ограничено. Следовательно, функционал $\Phi(u)$ ограничен на множестве U , т. е. монотонная последовательность $\{\Phi(u^k), k = 1, 2, \dots\}$ является сходящейся. В результате имеет место сходимость метода проекций по невязке принципа максимума: $\delta_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Усиление результата по сходимости допустимо для выпуклой задачи, которая определяется функционалом (1) с условиями

$$a = 0, \quad D \geq 0, \quad Q \geq 0.$$

В этом случае принцип максимума приобретает свойство достаточного условия оптимальности и последовательность $\{\Phi(u^k), k = 1, 2, \dots\}$ метода проекций сходится по невязке оптимальности (является минимизирующей): $\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, где u^* — оптимальное управление.

Заключение

Представлена численно-аналитическая технология решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления, которая определяется следующими фрагментами:

- 1) фазовая линейаризация функционала на основе матричной функции Габасова с редукцией к линейной задаче оптимального управления;
- 2) последовательное использование двух формул приращения функционала для построения двухэтапного метода с операцией на максимум функции Понтрягина;
- 3) корректность метода по части интегрирования дифференциальных систем (существование и единственность глобального решения) гарантируется условием Липшица для оператора проецирования;
- 4) экономичность метода обусловлена минимальными затратами на каждое улучшение по функционалу — одна задача Коши;
- 5) метод ориентирован на поиск экстремальных управлений и сходится по невязке принципа максимума.

Альтернативные интерпретации и модификации проекционных методов нелокального улучшения на уровне билинейных систем рассмотрены в [1].

Литература

1. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Методы оптимизации билинейных управляемых систем на основе задач о неподвижной точке // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2025. Т. 238. С. 36–48. DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-36-48.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. Москва: Наука, 1973. 256 с.
3. Морозов Ю. В., Пестерев А. В. Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сигмoids // Известия РАН. Теория и системы управления. 2024. № 3. С. 5–10. DOI: 10.31857/S0002338824030016.
4. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
5. Срочко В. А., Аксеньюшкина Е. В. Линейно-квадратичная задача оптимального управления: обоснование и сходимость нелокальных методов решения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2013. Т. 6, № 1. С. 89–100.

Статья поступила в редакцию 13.05.2025; одобрена после рецензирования 30.05.2025; принята к публикации 03.09.2025.

LINEARIZATION OF A QUADRATIC FUNCTIONAL AND THE PROJECTION METHOD OF NON-LOCAL SEARCH FOR EXTREMAL CONTROLS

Vladimir A. Srochko

Dr. Sci. (Phys. and Math.). Professor,
Department of Computational Mathematics and Optimization
Irkutsk State University
1, K. Marx str., Irkutsk, 664003, Russia

Elena V. Aksenyushkina

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Department of Mathematical Methods and Digital Technologies
Baikal State University
11 Lenin Street, Irkutsk, 664003, Russia

Abstract. The optimal control problem with respect to a linear system with a quadratic functional of general form is considered. Using the matrix Gabasov function, the functional is linearized with respect to phase variables. For the resulting linear problem, the maximum principle technology

is applied, which is implemented in the form of a projection method on a set of admissible controls based on nonlocal formulas for the increment of the functional. The method guarantees convergence in the residual of the maximum principle and is the most economical procedure in terms of labor intensity: each improvement in the functional with a quadratic estimate of the decrease is provided by only one Cauchy problem for the phase or adjoint system.

Keywords: linear-quadratic problem, linearization of functional, non-local increment method.

For citation

Srochko V. A., Akseniyushkina E. V. Linearization of a Quadratic Functional and the Projection Method of Non-Local Search for Extremal Control // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 2. P. 3–12.

The article was submitted 13.05.2025; approved after reviewing 30.05.2025; accepted for publication 03.09.2025.