

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Научная статья

УДК 51-7, 519.1

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-2-13-28

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА И ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ, ИНТЕРПРЕТАЦИИ И СООТНОШЕНИЯ

© Кузьмин Олег Викторович

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики,
Иркутский государственный университет,
Институт математики и информационных технологий
Россия, 664003, г. Иркутск, б-р Гагарина, 20
quzminov@mail.ru

© Стрихарь Марина Валерьевна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной механики и математики,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
Забайкальский институт железнодорожного транспорта
Россия, 672040, г. Чита, ул. Магистральная, 11
mseryogina@mail.ru

Аннотация. Комбинаторные объекты, являющиеся неотъемлемой частью методологии моделирования и анализа данных, позволяют создавать современные инструменты для решения сложных задач в различных прикладных областях. В данном исследовании рассматриваются геометрические свойства и комбинаторные интерпретации центральных элементов треугольника и пирамиды Паскаля, которые являются примерами плоских и пространственных числовых конфигураций с иерархическими структурами. В результате исследования была найдена формула, обобщающая сумму квадратов биномиальных коэффициентов исходя из геометрических и комбинаторных свойств этих объектов. В основу доказательства положен тот факт, что каждый центральный элемент треугольника и пирамиды Паскаля интерпретируется как число путей с заданными начальными и конечными точками в целочисленной сетке с единичными шагами. Основные положения работы проиллюстрированы рядом примеров.

Ключевые слова: треугольник Паскаля, пирамида Паскаля, иерархическая структура, биномиальные коэффициенты, триномиальные коэффициенты, центральный элемент, числовая последовательность, число путей в целочисленной сетке, сумма квадратов биномиальных коэффициентов, моделирование, обработка данных, шифрование, криптографическая схема.

Для цитирования

Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Центральные элементы треугольника и пирамиды Паскаля, интерпретации и соотношения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 2. С. 13–28.

Введение

Одними из важнейших комбинаторных структур, которые находят широкое применение в различных областях математики, информатики и анализе данных, являются треугольник и пирамида Паскаля [2]. Каждая из них представляет собой мощный инструмент для решения задач, связанных с комбинаторикой, алгоритмизацией и оптимизацией. Центральные элементы этих структур, такие как центральные биномиальные коэффициенты в треугольнике Паскаля, обладают уникальными свойствами, которые делают их полезными для анализа путей на целочисленных сетках, моделирования вероятностных процессов [1] и разработки криптографических алгоритмов. Центральные триномиальные коэффициенты позволяют эффективно подсчитывать количество путей в трехмерных сетках, что имеет важное значение для задач оптимизации маршрутов и анализа данных. Кроме того, как и треугольник Паскаля, пирамида Паскаля может служить основой для создания сложных криптографических схем, обеспечивая высокую степень защиты информации благодаря своим комбинаторным свойствам. В данной статье рассматриваются некоторые геометрические свойства этих структур, а также их возможные приложения и перспективы дальнейших исследований.

1 Треугольник и пирамида Паскаля

Треугольник Паскаля — это классическая комбинаторная структура, которая представляет собой бесконечный треугольный массив чисел (рис. 1), где каждый элемент равен сумме двух элементов, расположенных над ним слева и справа в предшествующей строке, т. е. для целых неотрицательных n, k удовлетворяет рекуррентному соотношению (правилу Паскаля) [3]:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\binom{0}{0} = 1; \binom{n}{k} = 0, \text{ если } \min(n, k, n-k) < 0,$$

а также граничным условиям

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

и равенству симметрии относительно центральной оси

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (2)$$

Элементы $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ треугольника Паскаля соответствуют биномиальным коэффициентам, то есть коэффициентам разложения степени бинома:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

что является полезным инструментом для решения задач, связанных с комбинаторикой и вероятностью.

				1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
			1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
		1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
	1	3	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
	1	4	6	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-	4
	1	5	10	10	5	1	-	-	-	-	-	-	-	5
	1	6	15	20	15	6	1	-	-	-	-	-	-	6
	1	7	21	35	35	21	7	1	-	-	-	-	-	7
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	-	-	-	-	8
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	n

Рис. 1. Треугольник Паскаля

Пирамида Паскаля является трехмерным обобщением треугольника Паскаля. В этой структуре элементы располагаются в виде бесконечной трехгранной пирамиды (рис. 2), где каждый элемент равен сумме трех элементов, расположенных над ним в предыдущем слое, т. е. для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяет рекуррентному соотношению [2]:

$$\binom{n+1}{k,l} = \binom{n}{k-1,l} + \binom{n}{k,l-1} + \binom{n}{k,l}, \quad (3)$$

при выполнении начальных условий:

$$\binom{0}{0,0} = 0; \binom{n}{k,l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0,$$

граничных условий:

$$\binom{n}{0,0} = \binom{n}{n,0} = \binom{n}{0,n} = 1$$

и равенств симметрии в каждом слое [2]:

$$\binom{n}{k,l} = \binom{n}{l,k} = \binom{n}{n-k-l,l} = \binom{n}{k,n-k-l}.$$

Числа $\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$ называются триномиальными коэффициентами, то есть коэффициентами разложения степени тринома:

$$(x + y + 1)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x^k y^l,$$

что позволяет обрабатывать многомерные данные, моделировать сложные системы, где требуется учитывать взаимодействие между несколькими переменными.

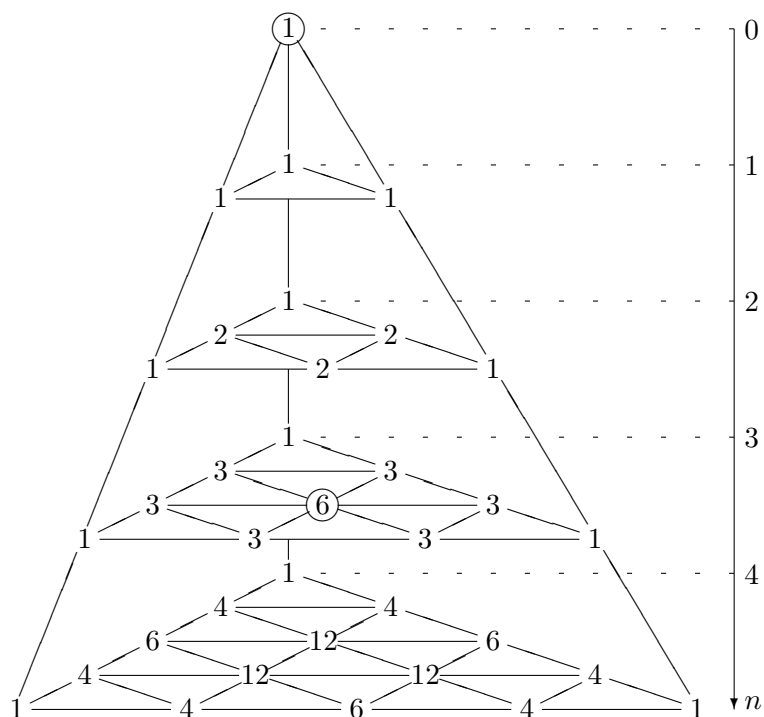


Рис. 2. Пирамида Паскаля

2 Пути на целочисленной сетке

Треугольник и пирамида Паскаля тесно связаны с задачами подсчета путей на целочисленной сетке [2]. Рассмотрим каждую из этих структур подробнее.

Треугольник Паскаля напрямую связан с задачей подсчета путей в двумерной целочисленной сетке. Рассмотрим сетку, где можно перемещаться только вправо или вверх, выполняя шаги $(1; 0)$ или $(0; 1)$ (рис. 3). Путь из точки $(0; 0)$ в точку $(n; k)$ можно представить как последовательность таких шагов.

Утверждение 1. *Количество путей длины $n + k$ в сетке $n \times k$ от $(0; 0)$ до $(n; k)$ с использованием шагов $(1; 0)$ и $(0; 1)$ равно биномиальному коэффициенту $\binom{n+k}{k}$.*

Этот коэффициент можно найти в треугольнике Паскаля в строке с номером $n + k$ на k -й позиции, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

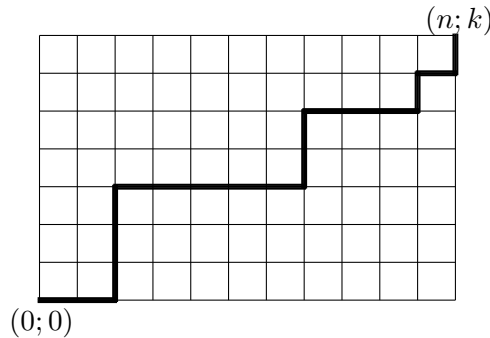


Рис. 3. Путь на двумерной целочисленной сетке

Например, количество путей из точки $(0; 0)$ в точку $(2; 2)$ равно $\binom{4}{2} = 6$, что соответствует элементу треугольника Паскаля на четвертой строке и второй позиции (рис. 1).

Пирамида Паскаля обобщает эту концепцию на трехмерную сетку. В трехмерной сетке можно перемещаться в трех направлениях: вправо, вверх и в глубину. Путь из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(n; k; l)$ можно представить как последовательность шагов в этих трех направлениях.

Утверждение 2. *Количество путей длины $n + k + l$ в сетке $n \times k \times l$ от $(0; 0; 0)$ до $(n; k; l)$ с использованием шагов $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$ равно триномиальному коэффициенту $\binom{n+k+l}{k, l}$.*

Этот коэффициент можно найти в пирамиде Паскаля в горизонтальном слое с номером $n + k + l$ на k -й горизонтальной позиции и l -й вертикальной позиции, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Например, количество путей из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(1; 1; 1)$ равно $\binom{3}{1,1} = 6$, что соответствует элементу пирамиды Паскаля в третьем горизонтальном слое на 1-й горизонтальной и 1-й вертикальной позиции (рис. 2).

3 Центральные элементы

Центральные элементы треугольника и пирамиды Паскаля представляют собой важные комбинаторные объекты, которые находят применение в различных областях математики и информатики. Рассмотрим их подробнее.

Центральные элементы треугольника Паскаля, также известные как центральные биномиальные коэффициенты, располагаются в середине четных строк треугольника (рис. 1). Эти элементы обозначаются как $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ и представляют собой количество способов выбрать n из $2n$ различных элементов.

Центральные элементы пирамиды Паскаля располагаются в слоях, номера которых кратны трем (рис. 2), и представляют собой обобщение центральных биномиальных коэффициентов на трехмерный случай. Эти элементы обозначаются как $\binom{3n}{n,n} = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ и представляют собой количество способов выбрать n элементов из каждого из трех множеств по n элементов.

Центральные элементы треугольника и пирамиды Паскаля используются для решения задач, связанных с различными двумерными, трехмерными и многомерными комбинаторными структурами, в том числе и подсчетом путей в целочисленных сетках.

Центральные элементы треугольника Паскаля образуют последовательность чисел 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432 ... (A000984 в [4]) и подсчитывают, согласно утверждению 1, количество путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n; n)$ при движении по двумерной целочисленной сетке. Первые 5 чисел этой последовательности обведены на рисунке 1.

Утверждение 3. *Количество путей длины $2n$ в сетке $n \times n$ от $(0; 0)$ до $(n; n)$ с использованием шагов $(1; 0)$ и $(0; 1)$ равно биномиальному коэффициенту $\binom{2n}{n}$.*

Центральные элементы пирамиды Паскаля образуют последовательность чисел 1, 6, 90, 1680, 34650, 756756, ... (A006480 в [4]) и подсчитывают, согласно утверждению 2, количество путей из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(n; n; n)$ при движении по трехмерной целочисленной сетке. Первые два числа указанной последовательности обведены на рисунке 2.

Утверждение 4. *Количество путей длины $3n$ в сетке $n \times n \times n$ от $(0; 0; 0)$ до $(n; n; n)$ с использованием шагов $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$ равно триномиальному коэффициенту $\binom{3n}{n,n}$.*

4 Сумма квадратов биномиальных коэффициентов и ее обобщение в треугольнике Паскаля

Сумма квадратов биномиальных коэффициентов в n -й строке треугольника Паскаля равна центральному биномиальному коэффициенту, расположенному в строке с номером $2n$. Это известный результат в комбинаторике, который можно доказать несколькими способами. Приведем новое доказательство через подсчет путей на целочисленной сетке и покажем, как это соотношение возникает естественным образом. Этот подход продемонстрирует глубокую связь между комбинаторикой и геометрией, а также позволит обобщить рассматриваемое тождество на триномиальные коэффициенты.

Теорема 1. Для любого неотрицательного целого числа n выполняется равенство:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (4)$$

Доказательство.

Рассмотрим целочисленную сетку размером $n \times n$. Количество путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n; n)$, состоящих из n шагов вправо и n шагов вверх, согласно утверждению 3, равно $\binom{2n}{n}$. С другой стороны, можно разбить этот путь на два, равных по количеству шагов, этапа:

1) сначала выполнить n шагов, при этом k шагов вправо и $n - k$ шагов вверх;

2) затем выполнить еще n шагов, при этом остается $n - k$ шагов вправо и $n - (n - k) = k$ шагов вверх.

Количество способов прохождения первого этапа равно $\binom{n}{k}$, а второго этапа соответственно равно $\binom{n}{n-k}$. Таким образом, число способов выполнения по очереди обоих этапов равно их произведению $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

Поскольку на первом этапе в целочисленной сетке размером $n \times n$ можно выполнить $0 \leq k \leq n$ шагов вправо, то, суммируя все способы, получаем общее число путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n; n)$ за два этапа:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

Сравнивая общее количество путей, полученное согласно утверждению 3 и рассчитанное нами за два этапа, имеем:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}. \quad (5)$$

Принимая во внимание равенство симметрии (2), получаем равенство (4). Теорема доказана.

Рассуждая аналогично, путь можно разбить на два, не обязательно равных по количеству шагов, этапа. Получаем обобщение равенств (4) и (5) для биномиальных коэффициентов.

Теорема 2. Для любых неотрицательных целых чисел n и m , при $m \leq n$, выполняется равенство:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{2n-m}{n-k} = \binom{2n}{n}. \quad (6)$$

Доказательство.

Доказательство проведем аналогично теореме 1, рассматривая пути на целочисленной сетке размером $n \times n$. Количество путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n; n)$, состоящих из n шагов вправо и n шагов вверх (итого $2n$ шагов), согласно утверждению 3, равно $\binom{2n}{n}$. Получили правую часть равенства.

Левую часть равенства можно получить, разбивая этот путь на два этапа:

1) сначала выполнить m шагов, где $m \leq n$, при этом k шагов вправо и $m - k$ шагов вверх;

2) затем выполнить еще $2n - m$ шагов, при этом остается $n - k$ шагов вправо и $n - (m - k) = n - m + k$ шагов вверх.

Количество способов прохождения первого этапа равно $\binom{m}{k}$, а второго этапа соответственно равно $\binom{2n-m}{n-k}$.

Таким образом, число способов выполнения по очереди обоих этапов равно их произведению $\binom{m}{k} \binom{2n-m}{n-k}$.

Поскольку на первом этапе можно выполнить $0 \leq k \leq m$ шагов вправо, то, суммируя все способы, получаем общее число путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n; n)$ за два этапа, не равных по количеству шагов, т. е. левую часть равенства. Теорема доказана.

Представляет интерес геометрическая интерпретация равенств (4), (5) и (6) в треугольнике Паскаля. Каждое из них описывает способы получения центрального элемента $2n$ -й строки треугольника Паскаля:

1) согласно равенству (4) нужно:

- наложить элементы n -й строки на элементы этой же n -й строки;
- наложенные элементы между собой перемножить;
- сложить полученные произведения;

2) согласно равенству (5) нужно:

- наложить элементы n -й строки на элементы этой же n -й строки в обратном порядке, т. е. повернув ее на 180 градусов относительно центра этой строки;

- наложенные элементы между собой перемножить;
- сложить полученные произведения;

3) согласно равенству (6) нужно:

- наложить элементы произвольной строки с номером m на элементы строки с номером $2n - m$ в обратном порядке, т. е. повернув ее на 180 градусов относительно центра этой строки;
- наложенные элементы между собой перемножить;
- сложить полученные произведения.

Обратные наложения во втором и третьем случаях также верны, согласно равенству симметрии (2), т. е. если поворачивать накладываемую строку на 180 градусов, а ту строку, на которую происходит наложение, оставлять на месте, результат не изменится. А можно поворачивать обе строки на 180 градусов, а затем производить наложение, согласно тому же равенству симметрии (2), результат останется прежним. Приведем пример.

Пример 1. Рассмотрим центральный элемент 70, находящийся в строке с номером $2n = 8$ (рис. 1). Этот элемент можно получить несколькими способами:

1) согласно равенствам (4) и (5) этот элемент можно получить путем наложения на строку с номером $n = 4$ этой же строки в прямом или перевернутом на 180 градусов положении относительно ее центра:

$$70 = 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2;$$

2) согласно равенству (6) этот элемент можно получить путем наложения в прямом или перевернутом на 180 градусов, относительно ее центра, положения, строки с номером 0 на строку с номером 8:

$$70 = 1 \cdot 70,$$

или путем наложения строки с номером 1 на строку с номером 7, что согласуется с правилом Паскаля (1) :

$$70 = 1 \cdot 35 + 1 \cdot 35,$$

или путем наложения строки с номером 2 на строку с номером 6:

$$70 = 1 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 15,$$

или путем наложения строки с номером 3 на строку с номером 5:

$$70 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 5,$$

или путем наложения строки с номером 4 на строку с номером 4:

$$70 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1.$$

Результаты, полученные в теоремах 1 и 2, можно обобщить на триномиальные коэффициенты, что позволяет расширить область применения комбинаторных методов в различных математических и прикладных задачах.

5 Сумма квадратов биномиальных коэффициентов и ее обобщения в пирамиде Паскаля

Проведя серию вычислений, мы установили, что равенство (4) не имеет прямого обобщения на триномиальные и полиномиальные коэффициенты. Приведем пример.

Пример 2. Рассмотрим центральный элемент 6, находящийся в слое с номером $3n = 3$ (рис. 2). Проверим, можно ли этот элемент получить, суммируя квадраты элементов слоя с номером $n = 1$.

Имеем:

$$\binom{1}{0,0}^2 + \binom{1}{0,1}^2 + \binom{1}{1,0}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \neq 6,$$

что показывает отсутствие прямого обобщения равенства (4) на триномиальные коэффициенты.

Проверим, можно ли этот элемент получить, суммируя третьи степени элементов слоя с номером $n = 1$:

Имеем:

$$\binom{1}{0,0}^3 + \binom{1}{0,1}^3 + \binom{1}{1,0}^3 = 1^3 + 1^3 + 1^3 = 3 \neq 6,$$

что еще раз показывает отсутствие прямого обобщения равенства (4) на триномиальные коэффициенты.

Несмотря на это равенства (5) и (6) имеют обобщения для триномиальных коэффициентов. Сначала приведем и докажем обобщение равенства (5).

Теорема 3. Для любого неотрицательного целого числа n выполняется равенство:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} \binom{2n}{n-k, n-l} = \binom{3n}{n,n}. \quad (7)$$

Доказательство.

Доказательство проведем рассматривая пути на целочисленной сетке размером $n \times n \times n$. Количество путей из точки $(0;0;0)$ в точку $(n;n;n)$, состоящих из n шагов вправо, n шагов вверх и n шагов в глубину (итого $3n$ шагов), согласно утверждению 4, равно $\binom{3n}{n,n}$, что дает нам правую часть равенства.

Левую часть равенства можно получить разбивая этот путь на два этапа:

1) сначала выполнить n шагов, при этом k шагов вправо, l шагов вверх и $n - k - l$ шагов в глубину;

2) затем выполнить еще $2n$ шагов, при этом остается $n - k$ шагов вправо, $n - l$ шагов вверх и $n - (n - k - l) = k + l$ шагов в глубину.

Количество способов прохождения первого этапа равно $\binom{n}{k,l}$, а второго этапа соответственно равно $\binom{2n}{n-k, n-l}$.

Таким образом, число способов выполнения по очереди обоих этапов равно их произведению $\binom{n}{k,l} \binom{2n}{n-k, n-l}$.

Поскольку на первом этапе можно выполнить $0 \leq k \leq n$ шагов вправо и $0 \leq l \leq n - k$ шагов вверх, то, суммируя все способы, получаем общее число путей из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(n; n; n)$ за два этапа, т. е. левую часть равенства. Теорема доказана.

А теперь приведем и докажем обобщение равенства (6) для триномиальных коэффициентов.

Теорема 4. Для любых неотрицательных целых чисел n и m , при $m \leq n$, выполняется равенство:

$$\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m}{k,l} \binom{3n-m}{n-k, n-l} = \binom{3n}{n,n}. \quad (8)$$

Доказательство.

Доказательство проведем аналогично доказательству теоремы 3, рассматривая пути на целочисленной сетке размером $n \times n \times n$. Количество путей из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(n; n; n)$, состоящих из n шагов вправо, n шагов вверх и n шагов в глубину (итого $3n$ шагов), согласно утверждению 4, равно $\binom{3n}{n,n}$, что дает нам правую часть равенства.

Левую часть равенства можно получить разбивая этот путь на два этапа:

1) сначала выполнить m шагов, при этом k шагов вправо, l шагов вверх и $m - k - l$ шагов в глубину;

2) затем выполнить еще $3n - m$ шагов, при этом остается $n - k$ шагов вправо, $n - l$ шагов вверх и $n - (m - k - l) = n - m + k + l$ шагов в глубину.

Количество способов прохождения первого этапа равно $\binom{m}{k,l}$, а второго этапа соответственно равно $\binom{3n-m}{n-k, n-l}$.

Таким образом, число способов выполнения по очереди обоих этапов равно их произведению $\binom{m}{k,l} \binom{3n-m}{n-k, n-l}$.

Поскольку на первом этапе можно выполнить $0 \leq k \leq m$ шагов вправо и $0 \leq l \leq m - k$ шагов вверх, то, суммируя все способы, получаем общее число путей из точки $(0; 0; 0)$ в точку $(n; n; n)$ за два

рассматриваемых этапа, т. е. левую часть равенства. Теорема доказана.

Как и для биномиальных коэффициентов, интересна геометрическая интерпретация равенств (7) и (8) для триномиальных коэффициентов в пирамиде Паскаля. Каждое из них описывает способы получения центрального элемента $3n$ -го слоя пирамиды Паскаля:

1) согласно равенству (7) нужно наложить элементы n -го слоя на элементы $2n$ -го слоя, повернув его на 180 градусов так, чтобы вершины $\binom{n}{n,0}$, $\binom{n}{0,n}$ и $\binom{n}{0,0}$ меньшего треугольника оказались над элементами $\binom{2n}{0,n}$, $\binom{2n}{n,0}$ и $\binom{2n}{n,n}$ большего треугольника, наложенные элементы между собой перемножить и затем сложить полученные произведения;

2) согласно равенству (8) нужно наложить элементы произвольного слоя с номером m на элементы слоя с номером $3n - m$, повернув его на 180 градусов так, чтобы вершины $\binom{m}{m,0}$, $\binom{m}{0,m}$ и $\binom{m}{0,0}$ меньшего треугольника оказались соответственно над элементами $\binom{3n-m}{n-m,n}$, $\binom{3n-m}{n,n-m}$ и $\binom{3n-m}{n,n}$ большего треугольника, наложенные элементы между собой перемножить и затем сложить полученные произведения.

Приведем пример.

Пример 3. Рассмотрим центральный элемент $\binom{12}{3,3} = 34650$, находящийся в горизонтальном слое пирамиды Паскаля с номером 12.

Согласно равенству (7) этот элемент можно получить путем наложения горизонтального слоя с номером 4 на горизонтальный слой с номером 8 в перевернутом на 180 градусов положении (рис. 4):

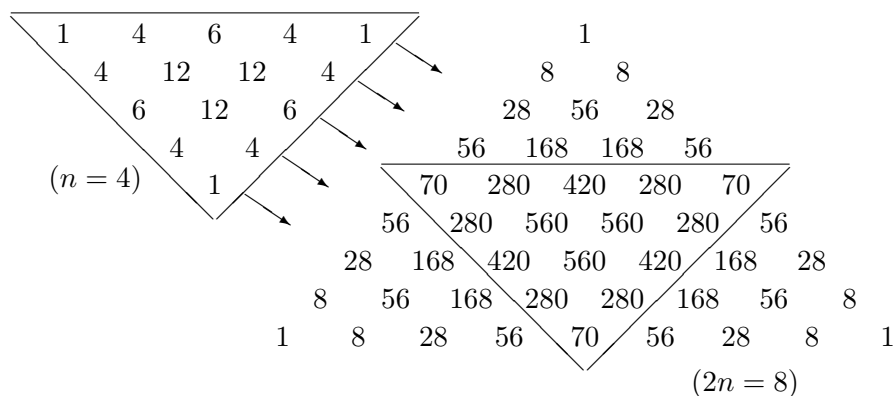


Рис. 4. Наложение перевернутого 4-го слоя на слой номер 8

$$\begin{aligned}
 34650 = & 1 \cdot 70 + 4 \cdot 280 + 6 \cdot 420 + 4 \cdot 280 + 1 \cdot 70 + \\
 & + 4 \cdot 280 + 12 \cdot 560 + 12 \cdot 560 + 4 \cdot 280 + \\
 & + 6 \cdot 420 + 12 \cdot 560 + 6 \cdot 420 + \\
 & + 4 \cdot 280 + 4 \cdot 280 + \\
 & + 1 \cdot 70.
 \end{aligned}$$

Согласно равенству (8), этот же элемент можно получить путем наложения горизонтального слоя с номером 3 на горизонтальный слой с номером 9 в перевернутом на 180 градусов положении (рис. 5):

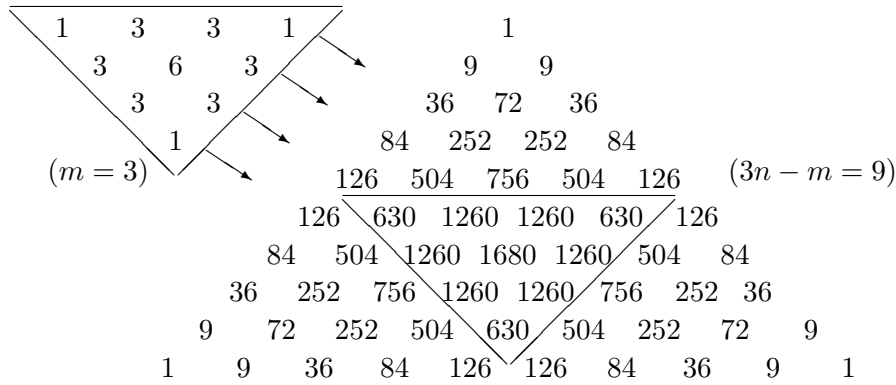


Рис. 5. Наложение перевернутого 3-го слоя на слой номер 9

$$\begin{aligned}
 34650 = & 1 \cdot 630 + 3 \cdot 1260 + 3 \cdot 1260 + 1 \cdot 630 + \\
 & + 3 \cdot 1260 + 6 \cdot 1680 + 3 \cdot 1260 + \\
 & + 3 \cdot 1260 + 3 \cdot 1260 + \\
 & + 1 \cdot 630,
 \end{aligned}$$

или путем наложения горизонтального слоя с номером 2 на горизонтальный слой с номером 10 в перевернутом на 180 градусов положении:

$$\begin{aligned}
 34650 = & 1 \cdot 3150 + 2 \cdot 4200 + 1 \cdot 3150 + \\
 & + 2 \cdot 4200 + 2 \cdot 4200 + \\
 & + 1 \cdot 3150,
 \end{aligned}$$

или путем наложения горизонтального слоя с номером 1 на горизонтальный слой с номером 11 в перевернутом на 180 градусов положении, что согласуется с известной формулой (3):

$$34650 = 1 \cdot 11550 + 1 \cdot 11550 + \\ + 1 \cdot 11550,$$

или путем наложения горизонтального слоя с номером 0 на горизонтальный слой с номером 12 в перевернутом на 180 градусов положении:

$$34650 = 1 \cdot 34650.$$

Заключение

В данной работе исследовались некоторые геометрические свойства центральных элементов треугольника и пирамиды Паскаля. Были получены выражения центральных биномиальных коэффициентов через суммы произведений элементов строк треугольника Паскаля и центральных триномиальных коэффициентов через суммы произведений элементов слоев пирамиды Паскаля соответственно, которые обобщают известное равенство о сумме квадратов биномиальных коэффициентов, а также рекуррентные соотношения на основе правила Паскаля. В силу приведенного геометрического алгоритма их получения доказанные равенства могут служить основой сложных многоуровневых криптографических схем и процедур сжатия больших объемов данных. Для иллюстрации технологии выполнения произведений приведены подробные примеры. Дальнейшее исследование предполагает рассмотрение обобщений полученных равенств на гиперпирамиды Паскаля, а также изучение взаимосвязей других частей треугольника, пирамиды и гиперпирамид Паскаля.

Литература

1. Бондаренко Л. Н. Моделирование комбинаторных последовательностей // Образовательные ресурсы и технологии. – 2019. № 2 (27). С. 64–73. DOI: 10.21777/2500-2112-2019-2-64-73
2. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000. 294 с.
3. Платонов М. Л., Докин В. Н. Треугольная схема развития популяций // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 1975. № 35. С. 26–31.
4. Sloane N. J. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at <http://oeis.org>. (дата обращения: 22.10.2023)

Статья поступила в редакцию 15.05.2025; одобрена после рецензирования 30.05.2025; принята к публикации 03.09.2025.

CENTRAL ELEMENTS IN PASCAL'S TRIANGLE AND PYRAMIDS: INTERPRETATIONS AND RELATIONSHIPS

Oleg V. Kuzmin

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
The Department Head of Probability Theory and Discrete Mathematics
Institute of Mathematics and Information Technologies
Irkutsk State University
20 Gagarin Blvd., Irkutsk, 664003, Russia

Marina V. Strikhar

Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Department of Applied Mechanics and Mathematics
Zabaikal'sk Rail Transport Institute
Irkutsk State Transport University
11 Magistralnaya st., Chita, 672040, Russia

Abstract. Combinatorial structures, being an integral part of data modeling and analysis methodology, enable the creation of modern tools for solving complex problems in various applied fields. This study examines the geometric properties and combinatorial interpretations of the central elements of Pascal's triangle and pyramid, which represent examples of planar and spatial numerical configurations with hierarchical structures. As a result of the research, a formula generalizing the sum of squares of binomial coefficients was derived based on the geometric and combinatorial properties of these objects. The proof is founded on the fact that each

central element of Pascal's triangle and pyramid can be interpreted as the number of paths with given initial and terminal points in an integer lattice with unit steps. The main propositions of the work are illustrated by a series of examples.

Keywords: Pascal's triangle, Pascal's pyramid, hierarchical structure, binomial coefficients, trinomial coefficients, central element, numerical sequence, number of paths in integer lattice, sum of squares of binomial coefficients, modeling, data processing, encryption, cryptographic scheme.

For citation

Kuzmin O. V., Strikhar M. V. Central Elements in Pascal's Triangle and Pyramids: Interpretations and Relationships // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 2. P. 13–28.

The article was submitted 15.05.2025; approved after reviewing 30.05.2025; accepted for publication 03.09.2025.