

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.95+538.955

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-3-3-16

ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

© Денисенко Валерий Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор,

ведущий научный сотрудник,

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50

denisen@icm.krasn.ru

Аннотация. Исходная краевая задача магнитостатики представляет собой систему квазилинейных уравнений первого порядка для неизвестной векторной функции. Рассмотрен случай, когда за границей рассматриваемой области находится идеальный проводник, что соответствует обращению в нуль нормальной компоненты магнитной индукции на границе. Эта задача с помощью построения решения вспомогательной линейной задачи преобразована в задачу для одного квазилинейного эллиптического уравнения для скалярного потенциала. Рассмотрены только однозначные зависимости магнитной индукции от напряженности магнитного поля, то есть исключен гистерезис. В рамках энергетического метода доказано существование и единственность обобщенного решения задачи для потенциала. Такое решение позволяет построить являющееся решением исходной задачи магнитное поле, обладающее конечной энергией. Предложенный и обоснованный принцип минимума функционала энергии целесообразно использовать при численном решении задач магнитостатики, поскольку он позволяет строить вариационно-разностные схемы, используя стандартные аппроксимирующие функции, например, кусочно-линейные.

Ключевые слова: магнитостатика, кривая намагничивания, потенциал, эллиптическое уравнение, квазилинейное уравнение, краевая задача, энергетический метод, функционал энергии, обобщенное решение, энергия магнитного поля.

Для цитирования

Денисенко В. В. Функционал энергии для нелинейной задачи магнитостатики // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 3–16.

Введение

Эффективным методом исследования и решения эллиптических краевых задач является энергетический метод. Квадратичные функционалы для линейных эллиптических краевых задач построены в монографиях [2, 5]. Применительно к нелинейным краевым задачам энергетический метод изложен в монографии [6].

В настоящей работе энергетический метод реализован для задачи, возникающей при сведении задачи магнитостатики к одному квазилинейному уравнению для потенциала.

Исходная краевая задача для системы уравнений первого порядка с неизвестными векторными функциями предварительно преобразована в задачу для скалярного потенциала.

Использованы материальные уравнения, обладающие свойствами, характерными для магнитной проницаемости ферромагнетиков, однако с существенным ограничением. Рассматриваются только однозначные функции, то есть исключен гистерезис, для моделирования которого необходим совершенно иной математический аппарат.

Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи для потенциала в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$. Такое решение позволяет построить решение исходной задачи, принадлежащее $L_2(\Omega)$.

1 Формулировка краевой задачи

Трехмерные стационарные уравнения магнитостатики имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, H — его модуль, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, деленная на магнитную проницаемость вакуума μ_0 , $\mathbf{j}$ — заданное пространственное распределение плотности тока.

Для разрешимости первого уравнения должно быть выполнено условие

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$.

Предполагаем, что область Ω — ограниченная и ее граница Γ — гомеоморфная сфере дважды непрерывно дифференцируемая поверхность. Нормальную и касательные к границе компоненты векторов будем отмечать индексами n и l .

Если за границей рассматриваемой области находится идеальный проводник, то на границе обращается в нуль нормальная компонента магнитной индукции $\mathbf{B}$. Условие может быть и неоднородным:

$$B_n|_{\Gamma} = q, \quad (2)$$

где q — заданная функция.

Для разрешимости задачи заданная функция q должна удовлетворять условию

$$\oint q d\Gamma = 0. \quad (3)$$

В противном случае получим противоречие, проинтегрировав второе уравнение (1) по всей области и (2) — по всей границе, поскольку интегралы левых частей равны в силу теоремы Гаусса — Остроградского. Предполагаем, что q является ограниченной функцией в пространстве $L_2(\Gamma)$

$$\oint q^2 d\Gamma \leq c_1^2 < \infty. \quad (4)$$

2 Материальные уравнения — модель среды

В ферромагнитных средах связь между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ является нелинейной. Исключив из рассмотрения явление гистерезиса, полагаем такую связь однозначной. В дополнительном предположении изотропии среды принято записывать эту связь как

$$\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H}. \quad (5)$$

Функция $\mu(H)$ определяет зависимость относительной магнитной проницаемости от H и может быть разной в разных точках пространства, если ферромагнетик неоднороден, $\mu \equiv 1$ вне магнетиков.

Построим функцию $E(H)$ исходя из соотношения:

$$B = \frac{dE(H)}{dH}. \quad (6)$$

Эта функция будет играть роль плотности магнитной энергии, деленной на μ_0 . Отметим, что выбор такой энергии связан с дальнейшим переходом к скалярному потенциалу. Если сводить исходную задачу к задаче для векторного потенциала, следует взять в качестве энергии интеграл от HdB .

В силу изотропии среды аналогичным (6) соотношением связаны и векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial E(H)}{\partial \mathbf{H}}. \quad (7)$$

Полагаем $E(0) = 0$. Тогда из (5, 6) следуют выражения:

$$\mu = \frac{1}{H} \frac{dE(H)}{dH}, \quad E(H) = \int_0^H \mu(h)h dh. \quad (8)$$

Из (5) получаем связь между малыми изменениями векторов **B** и **H**:

$$dB_i = \sigma_{ij} dH_j, \quad (9)$$

где через $\hat{\sigma}$ обозначен симметричный тензор коэффициентов

$$\sigma_{ij} = \mu \delta_{ij} + \frac{d\mu}{dH} \frac{H_i H_j}{H}, \quad (10)$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Воспользуемся известными свойствами ферромагнетиков, чтобы показать равномерную положительную определенность этого тензора.

Если ориентировать ось z декартовых координат вдоль вектора **H**, то тензор $\hat{\sigma}$ (10) становится диагональным

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu + H \frac{d\mu}{dH} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Отличие **B** от **H** обусловлено намагниченностью вещества **M**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}.$$

Мы рассматриваем изотропные среды, поэтому векторы **B**, **H**, **M** параллельны. В ферромагнетиках вектор **M** направлен в ту же сторону, что и **H**, и по величине не убывает с ростом H . Все три вектора равны нулю только при **B** = 0. Поэтому суммируются модули

$$B = H + M,$$

$B(H)$ является строго монотонной функцией:

$$\frac{dB}{dH} \geq 1, \quad (12)$$

и магнитная проницаемость

$$\mu = B/H \geq 1.$$

Направим вектор $d\mathbf{H}$ параллельно **H**, то есть возьмем $dH_x = dH_y = 0$, $dH_z = dH$. Тогда в силу (11)

$$dB = \left(\mu + H \frac{d\mu}{dH} \right) dH,$$

и из (12) получаем

$$\mu + H \frac{d\mu}{dH} \geq 1.$$

При дополнительном предположении об ограниченности B/H и dB/dH получаем

$$\begin{aligned} 1 \leq \mu = \frac{B}{H} \leq \mu_1, \\ 1 \leq \mu + H \frac{d\mu}{dH} = \frac{dB}{dH} \leq \mu_1, \end{aligned} \quad (13)$$

и, значит, тензор $\hat{\sigma}$ (11) является равномерно положительно определенным. Его собственные значения в любой точке области Ω лежат в интервале $(1, \mu_1)$:

$$A^2 \leq \mathbf{A}^T \hat{\sigma} \mathbf{A} \leq \mu_1 A^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор. Это условие является более сильным, чем условие эллиптичности для сформулированного в следующем параграфе квазилинейного уравнения для потенциала:

$$\mathbf{A}^T \hat{\sigma} \mathbf{A} > 0,$$

при выполнении которого вариационная задача регулярна [3]. Однако для ферромагнетиков условие справедливо именно в более сильной форме (14).

Отметим, что для реальных ферромагнетиков функция $\mu(H)$ действительно ограничена, но если перейти к прецизионным измерениям, обнаруживается, что $B(H)$ изменяется не гладко, а микроскопически скачками, то есть функция dB/dH бывает бесконечной и последнее неравенство (13) несправедливо. Налагая это условие, мы ограничиваемся рассмотрением только макроскопических или сглаженных зависимостей.

В силу (8) из неравенств (13) получаем

$$H^2/2 \leq E(H) \leq \mu_1 H^2/2. \quad (15)$$

В пустоте неравенства (13 - 15), естественно, превращаются в равенства и $\mu_1 = 1$, поскольку тогда $\mu = 1$, $\hat{\sigma} = \delta_{ij}$, $E = H^2/2$.

3 Задача для скалярного потенциала

Один из методов решения задачи (1, 2, 5) основан на предварительном построении вспомогательной функции $\mathbf{H}_I$, имеющей смысл напряженности магнитного поля при тех же заданных токах, но в пустоте:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_I &= \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_I &= 0 \\ (\mathbf{H}_I)_n|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение этой линейной задачи сравнительно просто. Обычно она сводится к задаче для векторного потенциала. Можно использовать энергетический метод [1].

Разность $\mathbf{H} - \mathbf{H}_I$ в силу первых уравнений из (1, 16) имеет нулевой ротор, и, значит, может быть введен скалярный потенциал φ , такой, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi.$$

Первому уравнению из (1) такое $\mathbf{H}$ удовлетворяет автоматически, поскольку $\mathbf{H}_I$ есть решение (16), а оставшиеся уравнения (1, 2, 5) образуют краевую задачу для φ :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mu(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi|)(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi)) &= 0 \\ -\mu(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi|)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= q \\ \oint \varphi \, d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы исключить несущественную аддитивную постоянную, зафиксировано среднее значение φ .

4 Функционал энергии

Рассмотрим множество гладких функций φ , удовлетворяющих только последнему условию (17).

Построим следующий функционал энергии:

$$W(\varphi) = \int E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi|) \, d\Omega + \oint \varphi q \, d\Gamma. \quad (18)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского и (4) линейная часть функционала ограничена в $L_2(\Gamma)$:

$$\left| \oint \varphi q \, d\Gamma \right| \leq \sqrt{\oint \varphi^2 \, d\Gamma} \sqrt{\oint q^2 \, d\Gamma} \leq c_1 \sqrt{\oint \varphi^2 \, d\Gamma},$$

и также в $W_2^{(1)}(\Omega)$, поскольку последнее пространство вложено в $L_2(\Gamma)$:

$$\left| \oint \varphi q \, d\Gamma \right| \leq c_2 \|\varphi\|.$$

В силу теоремы об эквивалентных нормах для функций с нулевым средним и неравенства Пуанкаре для таких функций [7] можно использовать следующую норму φ в $W_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\|\varphi\|^2 = \int (\text{grad } \varphi)^2 \, d\Omega.$$

Нелинейная часть функционала энергии в силу (15) оценивается снизу:

$$\begin{aligned} \int E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi|) d\Omega &\geq \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi)^2 d\Omega \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int (\text{grad } \varphi)^2 d\Omega - \left| \int \mathbf{H}_I \text{grad } \varphi d\Omega \right| + \frac{1}{2} \int H_I^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Фигурирующий здесь линейный функционал оценим с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$\left| \int \mathbf{H}_I \text{grad } \varphi d\Omega \right| \leq \sqrt{\int H_I^2 d\Omega} \sqrt{\int (\text{grad } \varphi)^2 d\Omega}.$$

Первый сомножитель ограничен, а второй есть норма φ в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Таким образом, значения функционала энергии оценены снизу:

$$W(\varphi) \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 - \left(\sqrt{\int H_I^2 d\Omega} + c_2 \right) \|\varphi\| + \frac{1}{2} \int H_I^2 d\Omega. \quad (19)$$

Значения этой квадратичной формы от $\|\varphi\|$ ограничены снизу, поскольку интеграл от векторной функции $\mathbf{H}_I$ ограничен, так как $\mathbf{H}_I$ является решением задачи (16).

Поэтому существует точная нижняя грань значений $W(\varphi)$ и можно построить минимизирующую последовательность φ_k :

$$W(\varphi_k) \rightarrow d, \quad W(\varphi_k) \geq d.$$

Без ограничения общности считаем $\|\varphi_k\| \leq M$, поскольку в силу (19) при неограниченном возрастании $\|\varphi_k\|$ значение $W(\varphi_k) \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение еще одну последовательность гладких функций ψ_k , имеющих нулевое среднее и ограниченную норму:

$$\|\psi_k\| \leq M. \quad (20)$$

Рассмотрим значения функционала энергии на последовательности функций $\varphi_k + \varepsilon \psi_k$, где ε — произвольное число:

$$\begin{aligned} W(\varphi_k + \varepsilon \psi_k) &= \int E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k - \varepsilon \text{grad } \psi_k|) d\Omega + \\ &+ \oint \varphi_k q d\Gamma + \varepsilon \oint \psi_k q d\Gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

По формуле Лейбница

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k - \varepsilon \text{grad } \psi_k|) &= E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k|) + \int \frac{\partial E}{\partial \mathbf{H}} d\mathbf{H} = \\ &= E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k|) + \\ &+ \int_0^1 (-\varepsilon \text{grad } \psi_k)^T \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k - t\varepsilon \text{grad } \psi_k) dt, \end{aligned} \quad (22)$$

где t — параметр, изменяющийся от нуля до единицы. Производная $\partial E / \partial \mathbf{H}$ равна $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ в силу выражения (6) и параллельности векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$.

Аналогично при фиксированном t с учетом (7) и (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial H_i} &= \frac{\partial E}{\partial H_i} \Big|_{\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k} + \sum_{j=1}^3 \int \frac{\partial^2 E}{\partial H_i \partial H_j} dH_j = \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) + \sum_{j=1}^3 \int_0^t \frac{\partial B_i}{\partial H_j} \left(-\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) d\tau = \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) - \varepsilon \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^t \sigma_{ij} d\tau \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (22), получаем

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k - \varepsilon \text{grad } \psi_k|) &= E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k|) - \\ &- \varepsilon \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } \psi_k + \frac{\varepsilon^2}{2} (\text{grad } \psi_k)^T \left\{ 2 \int_0^1 dt \int_0^t d\tau \hat{\sigma} \right\} \text{grad } \psi_k. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение в фигурных скобках есть симметричный тензор $\hat{\sigma}^\Delta$, поскольку он получен суммированием симметричных тензоров. Поскольку векторы $\text{grad } \psi_k$ не зависят от t, τ они могут быть внесены под знаки интегралов, и в силу (14)

$$\begin{aligned} \left(2 \int_0^1 dt \int_0^t d\tau \right) (\text{grad } \psi_k)^2 &\leq (\text{grad } \psi_k)^T \hat{\sigma}^\Delta \text{grad } \psi_k \leq \\ &\leq \mu_1 \left(2 \int_0^1 dt \int_0^t d\tau \right) (\text{grad } \psi_k)^2. \end{aligned}$$

Поскольку фигурирующий здесь удвоенный интеграл равен единице, получаем для $\hat{\sigma}^\Delta$ оценки, аналогичные (14):

$$A^2 \leq \mathbf{A}^T \hat{\sigma}^\Delta \mathbf{A} \leq \mu_1 A^2. \quad (24)$$

В отличие от $\hat{\sigma}$ тензор $\hat{\sigma}^\Delta$ определяется парой значений $\mathbf{H}$. В рассматриваемом случае это $\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k$ и $\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k - \varepsilon \text{grad } \psi_k$.

Подставим выражение (23) в (21)

$$\begin{aligned} W(\varphi_k + \varepsilon \psi_k) = & \left(\int E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k|) d\Omega + \oint \varphi_k q d\Gamma \right) + \\ & + \varepsilon \left(- \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } \psi_k d\Omega + \oint \psi_k q d\Gamma \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \int (\text{grad } \psi_k)^T \hat{\sigma}^\Delta \text{grad } \psi_k d\Omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Напомним, что компоненты тензора $\hat{\sigma}^\Delta$ не являются заданными функциями координат. В силу (20) и (24) последнее слагаемое оценивается сверху величиной:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \mu_1 M^2. \quad (26)$$

Первое слагаемое в (25) есть значение функционала энергии на элементах минимизирующей последовательности. Поэтому можно взять достаточно большое число k_0 , такое, что при $k > k_0$ отличие этого слагаемого от d будет меньше величины (26).

Поскольку d есть точная нижняя грань, то

$$W(\varphi_k + \varepsilon \psi_k) - d \geq 0.$$

С учетом ограниченности первого и последнего слагаемых (25) при $k > k_0$ получаем

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \mu_1 M^2 + \varepsilon \left(- \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } \psi_k d\Omega + \oint \psi_k q d\Gamma \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mu_1 M^2 \geq 0.$$

Осталось выбрать знак ε , противоположный знаку выражения в квадратных скобках, чтобы получить оценку:

$$\left| - \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } \psi_k d\Omega + \oint \psi_k q d\Gamma \right| \leq |\varepsilon| \mu_1 M^2$$

при $k > k_0$, $|\varepsilon| \neq 0$. Поскольку ε – произвольное число, а левая часть от ε не зависит, полученное неравенство означает, что

$$- \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } \psi_k d\Omega + \oint \psi_k q d\Gamma \rightarrow 0. \quad (27)$$

Для $k > k_0$, $m > k_0$ возьмем $\psi_k = \varphi_k - \varphi_m$. Это возможно, поскольку нормы φ_k, φ_m ограничены. Тогда из (27) для φ_k и φ_m получаем

$$\begin{aligned} & - \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) \text{grad } (\varphi_k - \varphi_m) d\Omega + \oint (\varphi_k - \varphi_m) q d\Gamma \rightarrow 0, \\ & - \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_m) \text{grad } (\varphi_k - \varphi_m) d\Omega + \oint (\varphi_k - \varphi_m) q d\Gamma \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Вычтем первое из второго:

$$\int (\mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_k) - \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi_m)) \text{grad } (\varphi_k - \varphi_m) d\Omega \rightarrow 0. \quad (28)$$

При конечном изменении напряженности магнитного поля на величину $\delta \mathbf{H}$ изменение $\delta \mathbf{B}$ получим интегрированием (9), положив $d\mathbf{H} = dt \delta \mathbf{H}$, где параметр t изменяется от нуля до единицы:

$$\delta \mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int \hat{\sigma}(\mathbf{H}) d\mathbf{H} = \int_0^1 \hat{\sigma}(\mathbf{H}) \delta \mathbf{H} dt = \left(\int_0^1 \hat{\sigma}(\mathbf{H}) dt \right) \delta \mathbf{H}.$$

Обозначим полученный тензор как $\hat{\sigma}^\delta$. Для декартовых компонент

$$\delta B_i = \sigma_{ij}^\delta \delta H_j. \quad (29)$$

Тензор $\hat{\sigma}^\delta$ симметричен, поскольку получен суммированием симметричных тензоров. Рассмотрим квадратичную форму:

$$\delta \mathbf{H}^T \hat{\sigma}^\delta \delta \mathbf{H} = \int_0^1 \delta \mathbf{H}^T \hat{\sigma}(\mathbf{H}) \delta \mathbf{H} dt.$$

В силу положительной определенности $\hat{\sigma}$ (11, 13) при любом $\mathbf{H}$ имеем:

$$(\delta \mathbf{H})^2 \leq \delta \mathbf{H}^T \hat{\sigma}(\mathbf{H}) \delta \mathbf{H} \leq \mu_1 (\delta \mathbf{H})^2.$$

Поскольку правая и левая части не зависят от параметра t , интегрированием этих неравенств получаем:

$$(\delta \mathbf{H})^2 \leq \delta \mathbf{H}^T \hat{\sigma}^\delta \delta \mathbf{H} \leq \mu_1 (\delta \mathbf{H})^2, \quad (30)$$

и, значит, тензор $\hat{\sigma}^\delta$ обладает тем же свойством равномерной положительной определенности, что и $\hat{\sigma}$ (14). Отметим, что эти оценки не зависят от $\mathbf{H}$ и от $\delta \mathbf{H}$, хотя сам тензор $\hat{\sigma}^\delta$ изменяется при изменении этих параметров.

В силу (29) из (28) следует:

$$\int (\text{grad } (\varphi_k - \varphi_m))^T \hat{\sigma}^\delta \text{grad } (\varphi_k - \varphi_m) d\Omega \rightarrow 0,$$

и с учетом (30) получаем сходимость последовательности φ_k в $W_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\int (grad(\varphi_k - \varphi_m))^2 d\Omega \rightarrow 0.$$

Поскольку пространство $W_2^{(1)}(\Omega)$ полное, то существует, причем единственный, предельный элемент φ и

$$\int (grad(\varphi_k - \varphi))^2 d\Omega \rightarrow 0.$$

Для φ из (27) следует тождество:

$$- \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - grad \varphi) grad \psi d\Omega + \oint \psi q d\Gamma = 0, \quad (31)$$

справедливое для любой функции ψ , принадлежащей тому же множеству функций, что и φ .

Если предельная функция φ является гладкой и решение задачи (17) $\mathbf{H}_I$ тоже гладкое, то можно интегрированием по частям преобразовать тождество (31):

$$\int \psi div(\mathbf{B}(\mathbf{H}_I - grad \varphi)) d\Omega - \oint \psi (B_n - q) d\Gamma = 0. \quad (32)$$

Поскольку функция q удовлетворяет условию (3), добавление константы к ψ не влияет на тождество. Поэтому здесь произвол ψ фактически не ограничен условием нулевого среднего значения ψ . Поэтому из (32) обычным образом [5] получаем:

$$div(\mathbf{B}(\mathbf{H}_I - grad \varphi)) = 0$$

$$B_n|_{\Gamma} = q. \quad (33)$$

В силу граничного условия (16) это граничное условие эквивалентно граничному условию (17). Лишь формой записи отличаются и первые уравнения (33, 17).

Таким образом, функция φ , доставляющая минимальное значение функционалу энергии, в случае гладкости позволяет построить решение краевой задачи (17) и тем самым исходной задачи (1, 2, 5) по формулам:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_I - rad \varphi$$

$$\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}_I$ — решение вспомогательной линейной задачи (16).

Если функция φ не является гладкой, ее следует рассматривать как обобщенное решение в смысле справедливости тождества (32) для произвольной функции ψ . Существование, единственность и принадлежность обобщенного решения пространству $W_2^{(1)}(\Omega)$ доказаны.

Несложно доказывается и обратное утверждение: решение краевой задачи (17) доставляет минимальное значение на множестве функций φ с нулевым средним значением. Пусть φ — решение этой задачи. Запишем функционал энергии (18) для функции вида $\varphi + \varepsilon\psi$ в форме (25):

$$\begin{aligned} W(\varphi + \varepsilon\psi) = & \left(\int E(|\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi|) d\Omega + \oint \varphi q d\Gamma \right) + \\ & + \varepsilon \left(- \int \mathbf{B}(\mathbf{H}_I - \text{grad } \varphi) \text{grad } \psi d\Omega + \oint \psi q d\Gamma \right) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \int (\text{grad } \psi)^T \hat{\sigma}^\Delta \text{grad } \psi d\Omega. \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку φ — решение краевой задачи, тождество (32) удовлетворено при любой функции ψ . Интегрированием по частям из него получаем (31), и, значит, коэффициент при ε в (34) равен нулю. Коэффициент при ε^2 положителен, поскольку тензор $\hat{\sigma}^\Delta$ удовлетворяет равномерным оценкам (24) и интеграл от квадрата градиента ψ строго положителен для любой ненулевой функции ψ с нулевым средним значением. Первый член в (34) есть $W(\varphi)$.

Поэтому

$$W(\varphi + \varepsilon\psi) \geq W(\varphi)$$

и равенство достигается только при $\varepsilon = 0$, то есть минимум W достигается на функции φ .

Заключение

Таким образом, основная краевая задача магнитостатики с помощью построения решения вспомогательной линейной задачи сведена к задаче для одного квазилинейного эллиптического уравнения для скалярного потенциала.

В рамках энергетического метода доказаны существование и единственность обобщенного решения полученной задачи для потенциала, которые позволяют построить магнитное поле, являющееся решением исходной задачи.

Предложенный и обоснованный принцип минимума функционала энергии целесообразно использовать при численном решении задач магнитостатики.

Литература

1. Денисенко В. В. Применение энергетических методов при построении векторных полей // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 4. С. 42–56.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т 2. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1951. 544 с.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Наука, 1964. 540 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 1982. 620 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Москва: Гостехиздат, 1957. 378 с.
6. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва: Наука, 1966. 432 с.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 255 с.

Статья поступила в редакцию 03.09.2025; одобрена после рецензирования 17.09.2025; принята к публикации 08.10.2025.

ENERGY FUNCTIONAL FOR A NONLINEAR MAGNETOSTATICS PROBLEM

Valery V. Denisenko

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,

Leading Researcher

Institute of Computational Modelling RAS SB

50 Akademgorodok, Krasnoyarsk 660036, Russia

Abstract. The original boundary value problem of magnetostatics is a system of the first-order quasi-linear equations for an unknown vector function. The case is considered when an ideal conductor is located beyond the boundary of the domain under consideration, which corresponds to the vanishing of the normal component of magnetic induction at the boundary. This problem has been transformed into a problem for a single quasi-linear elliptic equation for a scalar potential by constructing a solution to an auxiliary linear problem. Only unambiguous dependencies of magnetic induction on the magnetic field strength are considered, that is, hysteresis is excluded. Within the framework of the energy method, the existence and uniqueness of a generalized solution to the potential problem is proved. This solution makes it possible to construct a finite-energy magnetic field that is a solution to the original problem. It is advisable to use the proposed and substantiated principle of the minimum of the energy functional in the numerical methods for magnetostatics problems, since it allows us to build finite element schemes, using standard approximation functions, for example, piecewise linear ones.

Keywords: magnetostatics, magnetization curve, potential, elliptic equation, quasi-linear equation, boundary value problem, energy method, energy function, generalized solution, magnetic field energy.

For citation

Denisenko V. V. Energy Functional for a Nonlinear Magnetostatics Problem // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 3. P. 3–16.

The article was submitted 03.09.2025; approved after reviewing 17.09.2025; accepted for publication 08.10.2025.