Научная статья

УДК 517.53
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-3-17-28

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МАЙЛЗА — ШИА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РОСТА

© **Нефедова Анна Андреевна**
старший преподаватель,
Курский государственный университет
Россия, 305000, г. Курск, ул. Радищева, 33
revenko253@mail.ru

Аннотация. Более сотни лет известна связь теории рядов Фурье с комплексным анализом, поскольку степенной ряд, рассматриваемый на окружности, представляется тригонометрическим рядом. Исследование связи между граничным поведением аналитических и субгармонических функций, с одной стороны, и рядами Фурье — с другой, привело к глубоким результатам в обеих теориях. Начиная с 60-х годов прошлого столетия в работах американских математиков Л. Рубела и Б. Тейлора начал применяться метод изучения асимптотического поведения целых и мероморфных функций, основанный на ряде Фурье для логарифма модуля мероморфной функции. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка. Кроме того, поскольку коэффициенты Фурье выражаются через нули и полюсы мероморфной функции, то с их помощью можно изучать распределение нулей и полюсов. Одним из направлений этой теории есть нахождение наилучших оценок сверху и снизу верхних и нижних пределов отношений неванлинновских характеристик. Такие оценки были получены в конце прошлого века в совместной работе Майлза и Шиа. В настоящей работе мы распространяем некоторые результаты из работы Майлза и Шиа на классы мероморфных функций, определяемых модельной функцией роста.

Ключевые слова: мероморфная функция, характеристика Неванлинны, модельная функция, коэффициенты Фурье, экстремальная задача, задача Неванлинны.

Для цитирования
Нефедова А. А. Экстремальная задача Майлза — Шиа для мероморфных функций, определяемых модельной функцией роста // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 17–28.

Введение

Одним из преимуществ метода изучения асимптотического поведения целых и мероморфных функций, основанного на ряде Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, является то, что коэффициенты Фурье

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \quad k\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

выражаются через нули и полюсы мероморфной функции f и с их помощью можно изучать распределение нулей и полюсов [1]. Другое направление этой теории есть нахождение наилучших оценок сверху и снизу пределов отношений

$$\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{m_2(r,f)}, \quad \frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{T(r,f)}, \quad \frac{N(r,1/f)}{m_p^*(r,f)}$$

в заданных классах мероморфных функций. Такие задачи называются экстремальными. В совместной работе Майлза и Шиа [2] была получена точная оценка снизу для первого из приведенных отношений. В настоящей работе мы распространяем некоторые результаты из [2] на классы мероморфных функций, определяемых модельной функцией роста. Доказываем следствие, относящееся к одной задаче Неванлинны, которая в общем случае до сих пор не решена.

1 Предварительные сведения

Мы считаем, что читатель знаком с основными сведениями из теории мероморфных функций [3]. В нашей работе будем использовать модельную функцию роста, введенную Б. Н. Хабибуллиным [4] (см. также [5]). Нам понадобится лемма об асимптотическом поведении модельной функции роста, которая является следствием лемм 3 и 4 из [6].

Лемма 1. *Для* $\lambda < \rho + 1$

$$\int_{r_0}^{r}(M(u))^{\rho-\lambda}M'(u)\,du = \frac{(M(r))^{\rho+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + o((M(r))^{\rho+1-\lambda})\ (r\to\infty)\,,$$

для $\lambda > \rho + 1$

$$\int_{r}^{\infty}(M(u))^{\rho-\lambda}M'(u)\,du = \frac{(M(r))^{\rho+1-\lambda}}{\lambda-\rho-1} + o((M(r))^{\rho+1-\lambda})(r\to\infty)\,. \tag{2}$$

Определение 1. *Пусть M — модельная функция роста. Мероморфная функция f называется функцией конечного порядка относительно модельной функции M, если*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln M(r)} = \rho < \infty\,.$$

Класс данных мероморфных (целых) функций при фиксированной функции M обозначим через $\mathcal{M}$ ($E_{\mathcal{M}}$).

Нас будет интересовать случай, когда выполняется неравенство

$$M(2r) \le KM(r)\,, r > 0, K > 0. \tag{3}$$

Заметим, что из условия (3) следует неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} \le \frac{\ln K}{\ln 2} := \rho\,. \tag{4}$$

Нам понадобится лемма о пиках Пойя [7].

Лемма 2. *Пусть ψ_1, ψ_2, ψ — положительные непрерывные функции от r на луче $[r_0; \infty)$ такие, что отношение $\psi_2(r)/\psi_1(r)$ возрастает:*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_1(r)} = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_2(r)} = 0.$$

Тогда существует последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$, если $n \to \infty$, такая, что при $r = r_n$ выполняется условие

$$\frac{\psi(t)}{\psi_1(t)} \le \frac{\psi(r)}{\psi_1(r)},\ r_0 \le t \le r; \quad \frac{\psi(t)}{\psi_2(t)} \le \frac{\psi(r)}{\psi_2(r)},\ r \le t < \infty.$$

Обозначим через $C(0,R) = \{z : |z| < R\}$ круг радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Коэффициенты Фурье мероморфной функции f в круге $C(0,R)$ определяются формулой (1). Справедлива следующая лемма [8, Lemma 13.4.1.].

Лемма 3. *Пусть f — мероморфная функция в круге $C(0,R)$, $f(0) = 1$, $Z(f) = \{a_\nu\}$ — нули, а $W(f) = \{b_\mu\}$ — полюсы функции f,*

$$\ln f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

— разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Тогда для $0 < r < R$ справедливо

$$c_0(r,f) = \sum_{|a_\nu|\le r} \ln\frac{r}{|a_\nu|} - \sum_{|b_\mu|\le r} \ln\frac{r}{|b_\mu|} = N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, f\right);$$

$$\begin{aligned} c_k(r,f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|a_\nu|\le r} \left(\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k \right) \\ - \frac{1}{2k} \sum_{|b_\mu|\le r} \left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k \right), \end{aligned} \tag{5}$$

при $k \in \mathbb{N}$ и $c_k(r,f) = \overline{c_{-k}(r,f)}$ при $k \in -\mathbb{N}$.

Будем пользоваться терминологией и определениями из [8]. Пусть μ — положительная мера в комплексной плоскости, конечная на каждом компакте и такая, что не нагружает некоторую окрестность нуля, то есть $0 \notin \sup(\mu)$.

Определение 2. *При $k \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ определим величины*

$$S(r;k,\mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{C(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k},$$

$$S(r_1, r_2; k, \mu) = S(r_2; k, \mu) - S(r_1; k, \mu), \quad r_1 \leq r_2.$$

Определение 3. *Пусть $M(r)$ — модельная функция роста. Положительная мера μ имеет конечную $V(r)$-плотность, если существует положительная постоянная K такая, что*

$$N(r,\mu) := \int_0^r \frac{\mu(t)}{t}\, dt \leq KV(r), \quad r > 0. \tag{6}$$

Положительная мера μ является мерой конечного $V(r)$-типа, если существует положительная постоянная K такая, что

$$\mu(r) \leq KV(r)\,. \tag{7}$$

Предложение 1 (Предложение 13.1.9. [8])**.** *Если мера μ имеет конечную $V(r)$-плотность, то она является мерой конечного $V(r)$-типа.*

Определение 4. *Положительная мера μ называется $V(r)$-взвешенной, если существует последовательность комплексных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и положительная постоянная K, при которой для всех $r > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$|\alpha_k + S(r;k,\mu)| \leq \frac{KV(r)}{r^k};$$

и строго $V(r)$-взвешенной, если выполняется неравенство:

$$|\alpha_k + S(r;k,\mu)| \leq \frac{KV(r)}{kr^k}.$$

Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторый дивизор, т.е. множество комплексных чисел $\{a_n\}$ вместе с их кратностями $\{q_n\}$. По дивизору D определим меру $\mu_D(G) = \sum\limits_{a_n \in G} q_n$.

Определение 5. *Дивизор D имеет конечную $V(r)$-плотность, если соответствующая ему мера μ_D имеет конечную $V(r)$-плотность.*

Определение 6. *Для $k \in \mathbb{N}$ и меры μ_D обозначим*

$$S'(r;k) = S'(r;k,\mu_D) = \frac{1}{k} \iint\limits_{C(0,r)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r}\right)^k d\mu_D(\zeta).$$

Определение 7. *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Функции*

$$c_0(r;\mu_D,\alpha) = N(r,\mu_D)\,; c_k(r;\mu_D,\alpha) = \frac{r^k}{2}\{\alpha_k + S(r;k,\mu_D)\} - \frac{1}{2} S'(r;k,\mu_D)\,,$$

при $k \in \mathbb{N}$, и $c_k = \bar{c}_{-k}$ при $-k \in \mathbb{N}$ называются коэффициентами Фурье пары (μ_D,α).

Определение 8. *Квадратичной полунормой пары (μ_D,α) называется*

$$m_2(r;\mu_D,\alpha) = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r;\mu_D,\alpha)|^2}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $c_k(r) = c_k(r,\mu_D,\alpha)$ — коэффициенты Фурье пары (μ_D,α), $a_n \neq 0$, для всех $r > 0$ удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 < \infty\,. \tag{8}$$

Тогда существует единственная целая функция f, $f(0) = 1$, для которой $Z(f) = D$ и $c_k(r,f) = c_k(r)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и всех $r > 0$.

Это теорема 13.5.1 из [8].

Замечание 1. *Как следует из теоремы* 13.4.5 [8], *если $f \in E_{\mathcal{M}}$, то для ее дивизора нулей существует последовательность α такая, что выполняется соотношение* (8).

2 Мероморфные функции конечного порядка относительно модельной функции

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть f — мероморфная функция порядка ρ относительно модельной функции M, $Z(f) = \{a_\nu\}$ — нули функции f, $W(f) = \{b_\mu\}$, — ее полюсы. Тогда коэффициенты Фурье функции f при $k > \rho$ равны*

$$c_k(r,f) = -\frac{1}{2k} \sum_{|a_\nu|,|b_\mu| \le r} \left[\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k + \left(\frac{\overline{a_\nu}}{r}\right)^k - \left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right]. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая определения 2 и 6, на основании леммы 3 имеем:

$$r^k \mid \alpha_k(f) + S(r,k,\mu_Z) - S(r,k,\mu_W) \mid \\ \leq 2 \mid c_k(r,f) + S'(r,k,\mu_Z) - S'(r,k,\mu_W) \mid \, . \quad (10)$$

Разделим последнее неравенство на $M^k(r)$, где $k > \rho$, и перейдем в нем к пределу при $r \to \infty$. Используя неравенства [8, Теорема 13.4.5] $\mid c_k(r,f) \mid \leq AM^\rho(r)$ и соотношения [8, Предложение 13.2.2]

$$\mid S'(r,k,Z) - S'(r,k,W) \mid = \frac{1}{k}\left\{N(er,\frac{1}{f}) + N(er,f)\right\},$$

находим, что правая часть неравенства (10) стремится к нулю. Тогда мы получим $\alpha_k(f) = -\{S(\infty;k,Z) - S(\infty;k,W)\}, k > \rho$. Подставляя эти значения $\alpha_k(f)$ в (5), имеем (9).

Основной результат статьи — следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f — мероморфная функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, относительно модельной функции роста M, которая удовлетворяет условию (2). Тогда*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r,f) + N(r,\frac{1}{f})}{m_2(r,f)} \geq \frac{\mid \sin \pi\rho \mid}{\pi\rho}\sqrt{\frac{2}{1 + \sin(2\pi\rho)/(2\pi\rho)}}, \quad (11)$$

и это неравенство точное, т.е. для некоторой мероморфной функции f порядка ρ в (11) имеет место равенство.

Доказательство. Обозначим $\chi = \{x_n\} = \{\mid a_\nu \mid\} \cup \{\mid b_\mu \mid\}$, $n(r) = n(r,f) + n\left(r, 1/f\right)$, $[\rho] = q$,

$$\gamma_k = \begin{cases} \quad |\alpha_k(f)|, & 0 < k < q+1, \\ -\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right)^k, & k \geq q+1\,. \end{cases}$$

Очевидно, что $n(r,\chi) = n(r)$. Достаточно рассмотреть случай $q < \rho < q+1$, так как при целом ρ правая часть в (11) равна нулю и теорема тривиальна. Предположим, кроме того, что $f(0) = 1$. Тогда при некоторых $A > 0$, $\varepsilon > 0$, $\rho + \varepsilon < q + 1$ справедливо неравенство

$n(r) \le AM^{\rho+\varepsilon}(r)$ для всех $r > 0$. При $k \ge q+1$ находим

$$c_k(r;\chi,\gamma) = -\frac{1}{2k}\sum_{x_n>r}\left(\frac{r}{x_n}\right)^k - \frac{1}{2k}\sum_{x_n\le r}\left(\frac{x_n}{r}\right)^k,$$

$$c_k(r;\chi,\gamma) = -\frac{1}{2k}\left\{\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^k dn(t) + \int_r^\infty\left(\frac{r}{t}\right)^k dn(t)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^k\frac{n(t)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_r^\infty\left(\frac{r}{t}\right)^k\frac{n(t)}{t}dt$$

$$\le \frac{Ar^k}{2}\int_r^\infty t^{\rho+\varepsilon-k-1}dt = \frac{Ar^{\rho+\varepsilon}}{2(k-\rho-\varepsilon)}. \qquad (12)$$

При оценке последнего неравенства мы использовали соотношения (4) и (7). Таким образом, $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mid c_k(r;\chi,\gamma)\mid^2 < \infty$. По теореме 1 существует единственная целая функция F, $F(0)=1$, для которой $\chi = Z(F)$ и $c_k(r,F) = c_k(r;\chi,\gamma)$ для всех $r>0$ и всех $k\in\mathbb{Z}$. Используя соотношение (12) и интегрируя по частям, при $k \le q+1$, находим

$$\mid c_k(r,F)\mid = \frac{k}{2}\left\{\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^k\frac{N(t)}{t}dt + \int_r^\infty\left(\frac{r}{t}\right)^k\frac{N(t)}{t}dt\right\} - N(r), \qquad (13)$$

а при $q \ne 0$ и $1 \le k \le q$ имеем

$$0 \le c_k(r,F) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{k}{2}\int_0^r\left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{N(t)}{t}dt + N(r). \qquad (14)$$

Кроме того, $\mid c_k(r,f)\mid \le c_k(r,F)$, $0\le k\le q$, так как $\left|a-\frac{1}{a}\right| = |a| - \frac{1}{|a|}$ при $\mid a\mid \ge 1$ и $|c_k(r,f)| \le -c_k(r,F)$, $k\ge q+1$ откуда

$$m_2(r,f) \le m_2(r,F)\,. \qquad (15)$$

Очевидно, что порядок функции $N(r)$ не превышает ρ. На самом деле она имеет порядок ρ, так как в противном случае из теоремы Адамара [3, Теорема 4.1] следовало бы, что порядок функции $T(r,f)$ — целое число, а этот случай мы исключили. По лемме о пиках Пойя для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{t_n\}, t_n \to \infty$ такая, что

$$N(t) \le \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N(t_n), \quad 0 < t \le t_n,$$

$$N(t) \le \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N(t_n), \quad t_n \le t < \infty. \quad (16)$$

Последнее неравенство получается, если в лемме 2 взять

$$\psi(r) = N(r), \quad \psi_1(r) = r^{\rho-\varepsilon}, \quad \psi_2(r) = r^{\rho+\varepsilon}.$$

Используя неравенства (16), из (13) и (14), получаем

$$\mid c_k(t_n, F) \mid \le N(t_n) \left\{ \frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2 - \rho^2} - 1 \right\}, \quad k \ge q+1,$$

$$\mid c_k(t_n, F) \mid \le N(t_n) \left\{ \frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2 - k^2} + 1 \right\} + \frac{1}{2}\gamma_k t_n^k, \quad 1 \le k \le q.$$

Заметим, что из неравенства (16) вытекает, в частности, $t_n^q = o(N(t_n))$ при $n \to \infty$, ибо при t' таких, что $r_0 < t'$ и $N(t') \ge (t')^{\rho-\varepsilon}$, и для всех $t_n \ge t'$ выполняется

$$\mathrm{t}_n^{q+\varepsilon} < \mathrm{t}_n^{\rho-\varepsilon} \le \mathrm{t}_n^{\rho-\varepsilon} \frac{N(t')}{(t')^{\rho-\varepsilon}} \le N(t_n),$$

если $2\varepsilon < \rho - q$.

Учитывая это замечание и произвольность ε, находим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mid c_k(t_n, f) \mid}{N(t_n)} \le \rho^2 \mid k^2 - \rho^2 \mid, k \in \mathbb{N}.$$

Используя равенство Парсеваля

$$\{m_2(r,F)\}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mid c_k(r,F) \mid^2 = N^2(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mid c_k(r,F) \mid^2,$$

приходим к неравенству

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{m_2(r,F)}{N(r)} \le \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^4}{(\rho^2 - k^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Сумму ряда из правой части этого неравенства нетрудно найти с помощью вычетов. Она составляет

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^4}{(\rho^2-k^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\rho}{sin\pi\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right).$$

Так как $N(r) = N(r, f) + N\left(r, \dfrac{1}{f}\right)$, то из (15) и (17) получаем (11), если учесть только что найденное выражение для суммы ряда.

Пусть f — целая функция с положительными нулями, ρ — нецелое,

$$N\left(t, \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{\rho} M^{\rho}(t) + o(M^{\rho}(t)), t \to \infty, \alpha_k = 0, k = 1, 2, ..., q = [\rho].$$

Тогда $c_k(r, F) = c_k(r, f)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и всех $\rho > 0$. Находя асимптотику для $c_k(r, f)$ с помощью соотношений (13) и (14), получаем

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{m_2(r, f)}{N\,(r, 1/f)} \right\}^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^4}{(\rho^2 - k^2)^2},$$

или

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N\,(r, 1/f)}{m_2(r, f)} = \frac{|\sin \pi\rho\,|}{\pi\rho} \left\{ \frac{2}{1 + \sin 2\pi\rho/(2\pi\rho)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

т.е. оценка (11) точна. Если ρ — натуральное число, то эта оценка достигается для функции $f(z) = \exp(z^{\rho})$.

Теорема полностью доказана.

Приведем теперь следствие, относящееся к одной не решенной в общем случае проблеме Неванлинны, состоящей в нахождении точной оценки снизу величины

$$\chi(f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, f) + N(r, 1/f)}{T(r, f)}.$$

Если f — целая функция, то $\delta(0, f) = 1 - \chi(f)$, где $\delta(0, f)$ — неванлинновский дефект функции f, т.е.

$$\delta(0, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, 1/f)}{T(r, f)}.$$

Приведенная ниже оценка значения $\chi(f)$ является наилучшей из общеизвестных в настоящее время в классическом случае $M(r) \equiv r$. Мы получаем такую оценку в случае достаточно общей функции роста M, удовлетворяющей условию (3).

Предложение 2. *Пусть f — мероморфная функция порядка ρ, $1 < \rho < \infty$, относительно модельной функции M. Тогда*

$$\chi(f) \geq 0,9\,\frac{|\sin \pi\rho|}{\rho + 1}\,. \tag{18}$$

Доказательство. Учитывая монотонность

$$m_q(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln|f(re^i\theta)||^q \, d\theta \right\}^{1/q}$$

по q и первую основную теорему теории распределения значений при $f(0) = 1$, имеем

$$m_2(r,f) \geq m_1(r,f) = 2T(r,f) - N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{2}\right)$$

Таким образом,

$$\frac{\chi(f)}{2-\chi(f)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,f) + N(r,1/f)}{2T(r,f) - N(r,f) - N(r,1/f)} \geq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,f) + N(r,1/f)}{m_2(r,f)}.$$

Используя (11) и неравенство

$$\left\{1 + \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{4\pi\rho},$$

находим

$$\chi(f) \geq \frac{2\sqrt{2}\dfrac{|\sin 2\pi\rho|}{\pi\rho\left(1+\dfrac{1}{4\pi\rho}\right)}}{1+\sqrt{2}\dfrac{|\sin \pi\rho|}{\pi\rho\left(1+\dfrac{1}{4\pi\rho}\right)}}) = \frac{|\sin \pi\rho|}{\dfrac{\pi\rho}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{8\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}|\sin \pi\rho|}.$$

Поскольку

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \frac{10}{9}, \quad \frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{2}|\sin \pi\rho| < \frac{10}{9},$$

приходим к (18).

Заключение

Условие (3) на функцию роста M встречается в работах многих математиков, например в работах А. В. Абанина, испанского математика Ж. Бонета. В частности, в серии работ А. А. Кондратюка, опубликованных в Математическом сборнике в 80-х годах прошлого столетия, это условие играет ключевую роль при построении теории мероморфных функций вполне регулярного роста. В нашей работе условие (3) также используется при доказательстве основной теоремы.

Автор выражает признательность профессору К. Г. Малютину за постановку задачи и замечания, высказанные в процессе работы над статьей. Автор также выражает признательность рецензенту, замечания которого существенно улучшили содержание статьи.

Литература

1. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire function. *Bull. Soc. Math. France.* 1968; 96: 53–96.

2. Miles J. B., Shea D. P. An extremal problem in value distribution theory. *Quart. J. Math. Oxford.* 1973; 24: 377–383.

3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. Москва: Наука, 1970. 592 с.

4. Хабибуллин Б. Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. 2020. Т. 5, № 1. С. 1–5.

5. Кабанко М. В., Малютин К. Г., Хабибуллин Б. Н. Об уточненной функции роста относительно модельной // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. № 230. С. 56–74.

6. Malyutin K., Kabanko M. On the Proximate Order with Respect to the Model Function. *Journal of Mathematical Sciences.* 2024; 280: 692–709. DOI: 10.1007/s10958-024-06957-w.

7. Polya G. Untersuchungen uber Lucen and Singularitatin von Potenzreihen. *Math. Zeitschrift.* 1929; 29: 549–640.

8. Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. 196 p.

Статья поступила в редакцию 08.09.2025; одобрена после рецензирования 17.09.2025; принята к публикации 08.10.2025.

THE MILES — SHIA EXTREMAL PROBLEM FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS DETERMINED BY THE MODEL GROWTH FUNCTION

Anna A. Nefedova
Senior Lecturer, Department of Information Security,
Kursk State University
33 Radishchev St., Kursk, Russia

Abstract. The connection between the theory of Fourier series and complex analysis has been known for over a hundred years, since a power series considered on a circle is represented by a trigonometric series. The study of the connection between the boundary behavior of analytic and subharmonic functions, on the one hand, and Fourier series, on the other, led to profound results in both theories. Beginning in the 1960s, the American mathematicians L. Rubel and B. Taylor began to use a method for studying the asymptotic behavior of entire and meromorphic functions based on the Fourier series for the logarithm of the modulus of a meromorphic function. One of the advantages of this method is that it allows one to study functions with irregular growth at infinity and functions of infinite order. In addition, since the Fourier coefficients are expressed through the zeros and poles of a meromorphic function, they can be used to study the distribution of zeros and poles. One of the directions of this theory is finding the best upper and lower bounds for the upper and lower limits of the ratios of Nevanlinna characteristics. Such estimates were obtained at the end of the last century in a joint work by Miles and Shay. In the present paper, we extend some results from the work of Miles and Shay to classes of meromorphic functions defined by a model growth function.

Keywords: meromorphic function, Nevanlinna characteristic, model function, Fourier coefficients, extremal problems, Nevanlinna problem.

For citation

Nefedova A. A. The Miles — Shia Extremal Problem for Meromorphic Functions Determined by the Model Growth Function // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 3. P. 17–28.

The article was submitted 08.09.2025; approved after reviewing 17.09.2025; accepted for publication 08.10.2025.