

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.98

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-3-38-49

О КОЛЕБАНИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ЗАКРЕПЛЕННЫХ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ, С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

© **Баргуев Сергей Гаврилович (Ганжурович)**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций
и информатики
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 152
barguev@yandex.ru

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В;
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
hanhvladnick@mail.ru

Аннотация. Ставится начально-краевая задача о механических движениях нескольких твердых тел, упруго закрепленных продольно на упругом стержне. Решение описывающих эти колебания системы дифференциальных уравнений, включающей в себя как обычные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных, понимается в обобщенном смысле. Использование обобщенного решения объясняется наличием в уравнениях этой системы дельта-функции, сосредоточенной в местах крепления тел к балке. Производится известная подстановка, сводящая гибридную систему дифференциальных уравнений к системе амплитудных уравнений для твердых тел и стержня. Путем преобразований этих уравнений получается условие типа ортогональности. Приводится разложение решений в ряды Фурье по постоянным амплитудам твердых тел и собственным формам стержня с переменным коэффициентом, зависящим от времени. Описана методика определения этих переменных коэффициентов, которые зависят от собственных частот механической системы и форм колебаний стержня, амплитуд твердых тел и начальных смещений твердых тел и стержня. Введено гильбертово пространство с заданной системой ортогональных единичных векторов, которое позволило выразить неизвестные амплитуды твердых тел через начальные смещения твердых тел и стержня. Результатом работы явилось решение поставленной задачи в виде разложений в ряды Фурье в замкнутой форме, что позволяет произвести численные расчеты, если решена задача на собственные частоты и формы колебаний рассматриваемой механической системы.

Ключевые слова: балка, изгибные колебания, упруго закрепленные тела, собственные частоты, собственные формы, начально-краевая задача, гильбертово пространство.

Для цитирования

Баргуев С. Г., Ханхасаев В. Н. О колебаниях нескольких твердых тел, закрепленных на упругом стержне, с учетом начальных условий // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 38–49.

Введение

Для полученной в [1] по принципу Гамильтона исследуемой системы строится обобщенное решение в рядах Фурье по некоторым постоянным амплитудам и собственным формам колебаний этой системы с зависящими от времени коэффициентами. Вводится гильбертово пространство с заданной ортогональной системой единичных векторов, позволяющей разложить начальные смещения твердых тел и стержня в ряды Фурье. Это позволяет выразить указанные постоянные амплитуды через заданные значения начальных смещений твердых тел и стержня.

Выводится условие ортогональности для форм колебаний путем анализа амплитудных уравнений, вытекающих из этой гибридной системы дифференциальных уравнений, а затем, используя начальные и краевые условия, находится решение поставленной задачи. Предполагается, что собственные частоты и формы колебаний представленной механической системы известны. Отметим существенную особенность данной смешанной задачи, когда несколько твердых тел закреплены продольно на стержне с помощью упругих связей. Так как эти твердые тела взаимодействуют упруго со стержнем и между собой, имеем качественное изменение колебательного процесса в отличие от исследованных ранее случаев.

Можно также ставить задачу о гашении колебаний части твердых тел, оказывая влияние на перераспределение энергии между ними путем изменения начального условия.

1 Постановка задачи

Опишем систему из однородного упругого стержня длиной l , удельной плотности ρ с модулем упругости E и моментом инерции J для его поперечного сечения относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний, с закрепленными упруго на нем в точках с абсциссами a_k твердыми телами массами m_k посредством упругих пружин с жесткостями c_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Стержень жестко закреплен в его концах. Тела с массами m_k могут перемещаться вертикально в направлении осей z_k . Колебания масс характеризуются функциями $z_k(t)$, изгибные перемещения точек стержня задаются функцией $u(x, t)$.

Для исследования движения приведенной системы тел получаем следующий набор дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_k}{dt^2} + p_k^2 (z_k - u(a_k, t)) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \sum_{k=1}^n e_k (z_k - u(x, t)) \delta(x - a_k), \\ k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } p_k^2 = \frac{c_k}{m_k}, b = \frac{EJ}{\rho F}, e_k = \frac{c_k}{\rho F},$$

$z_k = z_k(t)$ — смещение твердых тел; $u = u(x, t)$ — поперечные сдвиги стержневых точек; x — абсциссы точек стержня; t — временная координата; m_k — масса k -го тела; c_k — пружинные жесткости; ρ — удельная стержневая плотность; F — поперечное стержневое сечение (площадь); E — модуль упругости; J — момент стержневой инерции относительно нейтральной оси, a_k — точка закрепления k -го твердого тела; $\delta(x - a_k)$ — Дираковская дельта-функция.

На концах стержня длины l краевые условия обращаются в нуль для допустимых четырех комбинаций из множества:

$$u(0, t), u(l, t), u_x(0, t), u_x(l, t), u_{xx}(0, t), u_{xx}(l, t), u_{xxx}(0, t), u_{xxx}(l, t).$$

Приведенная система (1) дает изгибные колебания упругого стержня с закрепленными на нем продольно твердыми телами с помощью пружинных связей.

Ищем решение системы (1) в виде рядов:

$$z_k = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) A_{ki}, k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) V_i(x), \quad (3)$$

с заданными начальными условиями

$$z_k(0) = z_{k0}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$z'_k(0) = z'_{k0}, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где в формулах (2-5) $\varphi_i(t)$ — числовая функция от переменной t ,

A_{ki} — амплитудное значение колебания k -го тела по i -й частоте,

$V_i(x)$ — это i -я собственная форма стержня.

2 Определение коэффициентов A_{ki}

Пусть в гильбертовом пространстве H_1 с нормой

$$\|f\| = \sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A^n)^2 + (V, V)},$$

где $(V, V) = \int_D V^2(x) dx$, и скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{e_1}{p_1^2} A^1 B^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} A^n B^n + (V, G), f = \begin{pmatrix} A^1 \\ \dots \\ A^n \\ V(x) \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} B^1 \\ \dots \\ B^n \\ G(x) \end{pmatrix},$$

$A, B \in R, V(x), G(x) \in C^\infty[0, l]$, система векторов $\{\bar{e}_i\}, i = 1, 2, \dots$, где

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2 + (V_i, V_i)} \\ \dots \\ A_i^n \\ \sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2 + (V_i, V_i)} \\ V_i(x) \\ \sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2 + (V_i, V_i)} \end{pmatrix},$$

образует ортонормированный базис.

Разложим векторы $\begin{pmatrix} z_1(0) \\ \dots \\ z_n(0) \\ u(x, 0) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} z_{1t}(0) \\ \dots \\ z_{nt}(0) \\ u_t(x, 0) \end{pmatrix}$ в ряды Фурье по указанному

ортонормированному базису

$$\begin{pmatrix} z_1(0) \\ \dots \\ z_n(0) \\ u(x, 0) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(0) \bar{e}_j \text{ и } \begin{pmatrix} z_{1t}(0) \\ \dots \\ z_{nt}(0) \\ u_t(x, 0) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} a'_j(0) \bar{e}_j. \quad (6)$$

Коэффициенты Фурье $a_{ij}(0)$ и $a'_{ij}(0)$ имеют вид:

$$a_j(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0) A_j^n + (u(x, 0), V_j(x))}{\sqrt{\frac{e_1}{p_1^2} (A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} (A_j^n)^2 + (V_j, V_j)}},$$

$$a'_j(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0) A_j^n + (u_t(x, 0), V_j(x))}{\sqrt{\frac{e_1}{p_1^2} (A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} (A_j^n)^2 + (V_j, V_j)}}. \quad (7)$$

Определим величины $A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^n$ по заданным начальным значениям $z_k(0), z_{kt}(0), k = 1, 2, \dots, n$, следующим образом:

Из (1) и (2) получим

$$z_k(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0) A_j^n + (u(x, 0), V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2} (A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} (A_j^n)^2 + (V_j, V_j)} A_j^k,$$

$$z_{kt}(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0) A_j^n + (u_t(x, 0), V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2} (A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} (A_j^n)^2 + (V_j, V_j)} A_j^k.$$

Поделив первое на второе, получим

$$\frac{z_k(0)}{z_{kt}(0)} = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0) A_j^n + (u(x, 0), V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0) A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0) A_j^n + (u_t(x, 0), V_j(x))}. \quad (8)$$

Отсюда, используя (6-8), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^n$, полагая $k = 1, 2, \dots, n$.

3 Вывод условий ортогональности

Приведенная выше система тел описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d^2 z_k}{dt^2} + p_k^2 (z_k - u(a_k, t)) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^n e_k (z_k - u(x, t)) \delta(x - a_k), \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Краевые условия на концах стержня:

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Представив $z_k(t), u(x, t)$ в виде

$$z_k(t) = A_k \sin(\omega t + \alpha_k), u(x, t) = V(x) \sin(\omega t + \beta)$$

и подставив в (1), после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_k + p_k^2 (A_k - V(a_k)) = 0, \\ -\omega^2 V(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{k=1}^n e_k (A_k - V(x)) \delta(x - a_k). \end{aligned} \quad (11)$$

с краевыми условиями для задачи (9-10) на концах стержня:

$$\begin{aligned} V(0) = V(l) = 0, \\ \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем (11) для частот ω_i и ω_j :

$$\begin{aligned} -\omega_i^2 A_{ki} + p_k^2 (A_{ki} - V_i(a_k)) = 0, \\ -\omega_i^2 V_i(x) + b \frac{d^4 V_i(x)}{dx^4} = \sum_{k=1}^n e_k (A_{ki} - V_i(x)) \delta(x - a_k), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -\omega_j^2 A_{kj} + p_k^2 (A_{kj} - V_j(a_k)) = 0, \\ -\omega_j^2 V_j(x) + b \frac{d^4 V_j(x)}{dx^4} = \sum_{k=1}^n e_k (A_{kj} - V_j(x)) \delta(x - a_k). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12-14) получаем выражения A_{ki} , A_{kj} вида

$$A_{ki} = \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_i^2} V_i(a_k), \quad (15)$$

$$A_{kj} = \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_j^2} V_j(a_k). \quad (16)$$

Перемножая их левые и правые части, получим

$$A_{ki} A_{kj} = \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_i^2} \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_j^2} V_i(a_k) V_j(a_k). \quad (17)$$

Проинтегрируем вторые уравнения в (13) и (14) по длине стержня. Тогда эти уравнения приобретут вид:

$$\begin{aligned} & -\omega_i^2 \int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx + b \int_0^\ell \frac{d^2 V_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 V_j(x)}{dx^2} dx = \\ & = \sum_{k=1}^n e_k (A_{ki} - V_i(a_k)) V_j(a_k). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & -\omega_j^2 \int_0^\ell V_j(x) V_i(x) dx + b \int_0^\ell \frac{d^2 V_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 V_i(x)}{dx^2} dx = \\ & = \sum_{k=1}^n e_k (A_{kj} - V_j(a_k)) V_i(a_k). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (15), (16) в правые части (18) и (19), получая:

$$\begin{aligned} & -\omega_i^2 \int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx + b \int_0^\ell \frac{d^2 V_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 V_j(x)}{dx^2} dx = \\ & = \sum_{k=1}^n e_k \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_i^2} V_i(a_k) V_j(a_k) - e_k V_i(a_k) V_j(a_k), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & -\omega_j^2 \int_0^\ell V_j(x) V_i(x) dx + b \int_0^\ell \frac{d^2 V_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 V_i(x)}{dx^2} dx = \\ & = \sum_{k=1}^n e_k \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_j^2} V_j(a_k) V_i(a_k) - e_k V_j(a_k) V_i(a_k). \end{aligned} \quad (21)$$

Умножим на (-1) уравнение (20) и сложим с уравнением (21):

$$\begin{aligned} & -\omega_j^2 \int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx = \sum_{k=1}^n e_k \left(\frac{-p_k^2}{p_k^2 - \omega_i^2} + \frac{p_k^2}{p_k^2 - \omega_j^2} \right) V_i(a_k) V_j(a_k) = \\ & = - \sum_{k=1}^n e_k \frac{(\omega_i^2 - \omega_j^2)}{(p_k^2 - \omega_i^2)(p_k^2 - \omega_j^2)} V_i(a_k) V_j(a_k). \end{aligned}$$

Переносим правую часть влево и выносим за скобки $(\omega_i^2 - \omega_j^2)$, получим:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \left(\int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx + \sum_{k=1}^n e_k \frac{p_k^2}{(p_k^2 - \omega_i^2)(p_k^2 - \omega_j^2)} V_i(a_k) V_j(a_k) \right) = 0.$$

Отсюда при $i \neq j$ получим, что

$$\int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx + \sum_{k=1}^n e_k \frac{p_k^2}{(p_k^2 - \omega_i^2)(p_k^2 - \omega_j^2)} V_i(a_k) V_j(a_k) = 0, \text{ или, используя} \quad (9) \text{ и } (17),$$

$$\int_0^\ell V_i(x) V_j(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{p_k^2} A_{ki} A_{kj} = 0. \quad (22)$$

Таким образом, с учетом (22) условие ортогональности имеет вид:

$$\int_0^\ell V_i(x)V_j(x)dx + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{p_k^2} A_{ki}A_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \int_0^\ell V_i^2(x)dx + \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{p_k^2} A_{ki}^2, & i = j. \end{cases} \quad (23)$$

4 Решение начально-краевой задачи

Обобщенное решение системы (1) будем получать разложением в ряды Фурье:

$$z_k = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) A_{ki}, \quad u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) V_i(x). \quad (24)$$

Подставляя в (1), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_i(t) A_{ki} + p_k^2 (\varphi_i(t) A_{ki} - \varphi_i(t) V_i(a_k)) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_i(t) V_i(x) + b \varphi_i(t) \frac{d^4}{dx^4} V_i(x) &= \\ = \sum_{k=1}^N e_k (\varphi_i(t) A_{ki} - \varphi_i(t) V_i(x)) \delta(x - a_k). \end{aligned} \quad (25)$$

Разделяя эти два уравнения в (25) на $\varphi_i(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\varphi}_i(t)}{\varphi_i(t)} A_{ki} + p_k^2 (A_{ki} - V_i(a_k)) &= 0, \\ \frac{\ddot{\varphi}_i(t)}{\varphi_i(t)} V_i(x) + b \frac{d^4}{dx^4} V_i(x) &= \sum_{k=1}^N e_k (A_{ki} - V_i(x)) \delta(x - a_k). \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначив

$$\frac{\ddot{\varphi}_i(t)}{\varphi_i(t)} = -\omega_i^2, \quad (27)$$

получим, учитывая (24-27):

$$\begin{aligned} -\omega_i^2 A_{ki} + p_k^2 (A_{ki} - V_i(a_k)) &= 0, \\ -\omega_i^2 V_i(x) + b \frac{d^4}{dx^4} V_i(x) &= \sum_{k=1}^N e_k (A_{ki} - V_i(x)) \delta(x - a_k). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, парциальное движение является синусоидальным с частотой ω_i со смещением

$$\varphi_i(t) = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t, \quad (29)$$

которое получается в результате решения дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = 0,$$

вытекающим из (19).

Запишем начальное условие для задачи (28) с учетом (29):

$$z_k(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) A_{ki} = z_{ko}, \quad u(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) V_i(x) = f_1(x),$$

$$\frac{dz_k}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ti}(0) A_{ki} = z_{tko}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ti}(0) V_i(x) = f_2(x) \quad \text{или}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) A_{ki} = z_{ko}, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) V_i(x) = f_1(x). \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ti}(0) A_{ki} = z_{tko}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ti}(0) V_i(x) = f_2(x).$$

Умножим справа (30) на $\frac{e_k A_{kj}}{p_k^2}$ и просуммируем по k :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) \sum_{k=1}^N \frac{e_k A_{ki} A_{kj}}{p_k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{e_k z_{ko} A_{kj}}{p_k^2}. \quad (32)$$

Умножим (31) на $V_j(x)$ и проинтегрируем по длине стержня

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) \int_0^{\ell} V_i(x) V_j(x) dx = \int_0^{\ell} f_1(x) V_j(x) dx. \quad (33)$$

Сложив левые и правые части уравнений (32) и (33), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(0) \left(\int_0^{\ell} V_i(x) V_j(x) dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k A_{ki} A_{kj}}{p_k^2} \right) = \\ & = \int_0^{\ell} f_1(x) V_j(x) dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k z_{ko} A_{kj}}{p_k^2} \end{aligned}$$

Вследствие ортогональных условий (23) слева останется только слагаемое при $i = j$.

В итоге получаем:

$$\varphi_i(0) = \frac{\int_0^{\ell} f_1(x) V_i(x) dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k z_{ko} A_{ki}}{p_k^2}}{\int_0^{\ell} V_i^2(x) dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k A_{ki} A_{ki}}{p_k^2}}.$$

Аналогично для коэффициентов $\varphi_{ii}(0)$ получим:

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{\int_0^\ell f_2(x)V_i(x)dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k z_{iko} A_{ki}}{p_k^2}}{\int_0^\ell V_i^2(x)dx + \sum_{k=1}^N \frac{e_k A_{ki} A_{ki}}{p_k^2}}.$$

Из начальных условий $\varphi_i(0) = \varphi_{io}$, $\varphi_{ii}(0) = \varphi_{iio}$ и (29), получим:

$$A_i = \frac{\varphi_{iio}}{\omega_i}, \quad B_i = \varphi_{io}.$$

В результате

$$\varphi_i(t) = \frac{\varphi_{iio}}{\omega_i} \sin \omega_i t + \varphi_{io} \cos \omega_i t. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (24), получаем решение системы (1).

Примечание. $V_i(x) = \sum_{k=1}^n \tilde{V}_{ki}(x) A_{ki}$, где $\tilde{V}_{ki}(x) = \frac{e_k \omega^2}{\omega^2 - p_k^2} \bar{V}_{ki}(x - a_k)$, а

$\bar{V}_{ki}(x)$ — решения краевых задач:

$$-\omega^2 \bar{V}(x) + b \frac{d^4 \bar{V}(x)}{dx^4} = \delta(x),$$

$$\bar{V}(-a_k) = \bar{V}(l - a_k) = 0,$$

$$\frac{d\bar{V}}{dx}(-a_k) = \frac{d\bar{V}}{dx}(l - a_k) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Заключение

В данной работе удалось разрешить основную проблему, с которой пришлось столкнуться С. Г. Баргуеву в статье [2]: путем введения гильбертова пространства с заданной системой ортогональных единичных векторов выразить явно неизвестные коэффициенты A_j^k при разложении в ряд Фурье смещений твердых тел. Аналогичная методика применена в работе [3] в случае одного твердого тела.

Литература

1. Баргуев С. Г., Нестеров А. С., Бурлаков В. С. К расчету частот и форм колебаний балки с произвольным числом упруго закрепленных тел // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 22–37.
2. Баргуев С. Г., Аюшеев Т. В., Миждон А. Д. Об одном обобщении для решения начально-краевой задачи о колебаниях произвольного числа осцилляторов на стержне // Вестник БГУ. Математика и информатика. 2012. Вып. 9. С. 95–100.
3. Barguev S. G., Khankhasaev V. N., Bairov S. A. Existence and Uniqueness of a Generalized Solution to the Initial-Boundary Value Problem Describing Oscillations of Hybrid System Consisting of Elastic Rod with Attached Rigid Body. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024; 284 (2): 196–215.

Статья поступила в редакцию 25.09.2025; одобрена после рецензирования 06.10.2025; принята к публикации 08.10.2025.

ABOUT VIBRATIONS OF MULTIPLE SOLIDS ATTACHED
TO AN ELASTIC ROD CONSIDERING INITIAL CONDITIONS

Sergey G. Barguev

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch)
Siberian State University of Telecommunications and Informatics
Trubacheeva St. 152, Ulan-Ude 670031, Russia

Vladislav N. Khankhasaev

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
East Siberia State University of Technology and Management
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
Smolina St. 24a, Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. This work considers the initial-boundary problem of vibrations of a mechanical system in the form of an elastic rod with an arbitrary number of elastically longitudinally fixed solids. The solution of a hybrid system of differential equations describing the motion of a mechanical system, including both ordinary differential equations and partial derivatives, is understood in a generalized sense. The application of the concept of a generalized solution is due to the presence in the equations of the Dirac delta function, which must be taken into account at the points of connection to the beam of bodies. A well-known substitution is made that reduces the hybrid system of differential equations to a system of amplitude equations for solids and a rod. By transforming these equations, an orthogonality-type condition is obtained. Solutions are decomposed into Fourier series by constant amplitudes of solid bodies and eigenforms of the rod with a variable coefficient depending on time. A methodology for determining these variable coefficients, which depend on the natural frequencies of the mechanical system and the vibration forms of the rod, the amplitudes of solids and the initial displacements of solids and the rod, is presented. Hilbert space was introduced with a given system of orthogonal unit vectors, which made it possible to express unknown amplitudes of solids through the initial displacements of solids and the rod. The

result of the work was solving the problem in the form of decompositions into Fourier series in a closed form, which makes it possible to make numerical calculations if the problem is solved for the natural frequencies and forms of oscillations of the considered mechanical system.

Keywords: beam, bending vibrations, elastically fixed bodies, natural frequencies, natural forms, initial-edge problem, Hilbert space.

For citation

Barguev S. G., Khankhasaev V. N. About Vibrations of Multiple Solids Attached to an Elastic Rod Considering Initial Conditions // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 3. P. 38–49.

The article was submitted 25.09.2025; approved after reviewing 06.10.2025; accepted for publication 08.10.2025.