

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Научная статья

УДК 51-7

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-3-50-58

УТОЧНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ПРИКРЕПЛЕННЫХ К БАЛКЕ ЭЙЛЕРА — БЕРНУЛЛИ

© **Мижидон Арсалан Дугарович**

доктор технических наук, профессор,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В

miarsdu@mail.ru

© **Хамханов Алдар Кимович**

преподаватель,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В

msdos147@gmail.com

Аннотация. В статье предлагается уточнение ранее разработанной обобщённой математической модели. Модель описывает динамику конструкции, состоящей из балки Эйлера — Бернулли, и прикреплённых к ней взаимосвязанных твёрдых тел. Уточнённая модель учитывает случай с несимметричными точками крепления упругих элементов к телам, вследствие чего возникают неоднородные слагаемые в правой части уравнений. Это расширяет область её применимости и позволяет описывать более широкий класс механических систем, в которых точки крепления упругих элементов могут быть заданы произвольным образом.

Предложен подход к определению положения равновесия в выбранной системе координат, позволяющий осуществить замену переменных в уточнённой модели и свести её к ранее изученной обобщённой математической модели.

Ключевые слова: обобщённая математическая модель, твёрдое тело, балка Эйлера — Бернулли, гибридная система дифференциальных уравнений, положение равновесия.

Для цитирования

Мижидон А. Д., Хамханов А. К. Уточнение обобщённой математической модели системы твёрдых тел, прикреплённых к балке Эйлера — Бернулли // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 50–58.

Введение

При моделировании механических систем, состоящих из упругих балок и взаимосвязанных твёрдых тел, возникают значительные трудности, обусловленные сочетанием сосредоточенных и распределённых параметров. Для корректного описания динамики таких систем возможно применение вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Результатом анализа полученных уравнений, описывающих движения различных механических систем, является обобщенная математическая модель для класса механических систем с расчетной схемой «тело (система тел) на балке Эйлера — Бернулли» [1–3] и выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} A\ddot{q} + Cq + \bar{C}(Dq - \bar{u}) = 0, \\ a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + c \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m k_i (d^{iT} q(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где x — переменная по оси координат, совмещенной с покоящейся балкой;
 $q(t)$ — n -мерная вектор-функция, характеризующая положение системы твердых тел;

$u(x, t)$ — скалярная функция поперечных прогибов стержня, удовлетворяющая граничным условиям, определяемым типами закрепления его концов;

$a_i, (i = \overline{1, m})$ — точки крепления пружин к балке, причем $0 \leq a_i \leq l$;

$\bar{u}(t)$ — вектор-функция составленная из $u(a_1, t), \dots, u(a_m, t)$;

A, C — матрицы $n \times n$;

$\bar{C}$ — матрица $n \times m$;

D — матрица $m \times n$;

d^i — вектор, состоящий из строк матрицы D ;

$a = \rho F$ — погонная масса стержня;

$c = EI$ — изгибная жесткость балки;

$k_i, (i = \overline{1, m})$ — упругость пружин.

Система (1) представляет собой гибридную систему дифференциальных уравнений (ГСДУ) из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Гибридные системы подобного типа изучены недостаточно, и для их решения требуется разработка специализированных методов. Одним из таких методов является подход к исследованию свободных колебаний, описанный в работе [2].

Настоящая работа является обобщением ранее полученных результатов. Выполнено уточнение обобщенной математической модели в выбранной системе координат: в отличие от ранее рассматривавшейся гибридной системы дифференциальных уравнений уточненная модель включает неоднородные слагаемые в правой части, что позволяет более полно учитывать физические особенности системы.

Дополнительно предложен метод сведения уточнённой модели к ранее изученной задаче посредством подходящей замены переменных. Такая редукция обеспечивает применимость разработанных ранее аналитико-численных методов исследования свободных колебаний, основанных на аппарате обобщённых функций [2; 4].

Построение решения опирается на метод определения положения равновесия системы, описанный в работе [5].

Таким образом, расширение класса рассматриваемых задач достигается за счёт одновременного уточнения модели и сведения её к известной постановке, что открывает возможность использования уже апробированных математических инструментов для анализа динамики системы.

1 Обсуждение к уточнению обобщенной математической модели

Ранее при выводе обобщённой математической модели (1) рассматривался упрощённый случай с фиксированными либо симметричными точками креплений пружин относительно центров масс твёрдых тел.

При произвольных точках крепления обобщенная математическая модель в выбранной системе координат в отличие от рассматриваемой ранее (1) будет содержать неоднородности в правой части. Откуда и возникает необходимость уточнения обобщенной математической модели.

Действительно. Рассмотрим применение вариационного принципа Гамильтона — Остроградского на примере механической системы (рис. 1).

Oxz — система координат, центр которой совпадает с точкой закрепления стержня, а ось Ox направлена вдоль оси стержня.

$O'x'z'$ — подвижная система координат, связанная с твердым телом.

Состояние равновесия такой системы характеризуется параллельностью осей координат Oxz и $O'x'z'$.

Твердое тело может совершать поступательные движения вдоль оси Oz и совершать угловые колебания φ . Перемещение точек стержня в направлении оси Oz описывается функцией $u(x)$

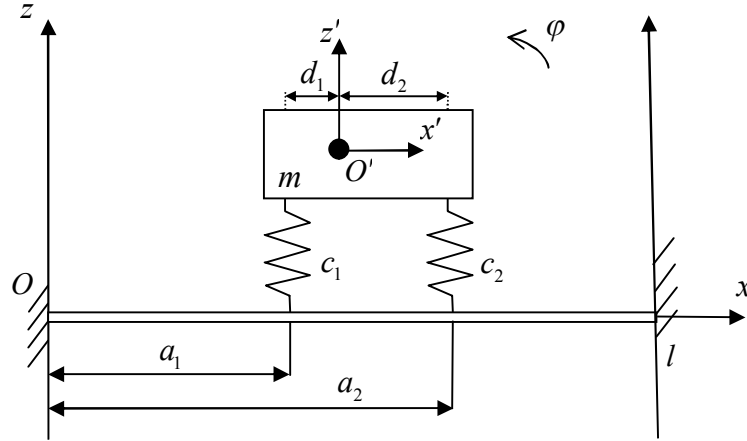


Рис. 1. Механическая система

«твердое тело, прикрепленное с помощью двух пружин к стержню»:
 m — твердое тело массой m ; a_1 и a_2 — точки крепления пружины к упругой балке;
 c_1 и c_2 — упругая пружина; d_1 и d_2 — расстояние точек крепления пружин относительно центра подвижной системы координат $O'x'z'$; l — длина упругого стержня

Продemonстрируем вывод математической модели динамики системы. Данная система содержит как сосредоточенные и распределенные параметры. Так как рассматривается модель консервативной механической системы, то вариация функционала действия по Гамильтону будет иметь вид:

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0, \quad (2)$$

где T и U являются кинетической и потенциальной энергией системы и будут иметь следующий вид:

$$T = T_{\text{тела}} + T_{\text{стержня}}, \quad U = U_{\text{пружины}} + U_{\text{стержня}} \quad (3)$$

Кинетическая энергия тела $T_{\text{тела}}$ состоит суммы кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$T_{\text{тела}} = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{I_\varphi \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (4)$$

где I_φ — момент инерции твердого тела относительно центра масс при повороте на угол φ .

С учетом того, что движение тела по оси Ox отсутствует, а угол поворота φ полагается малым, потенциальная энергия пружин будет иметь следующий вид:

$$U_1 = \frac{c_1(z + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t))^2}{2} + \frac{c_2(z + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t))^2}{2}, \quad (5)$$

где x'_i, z'_i — координаты точек крепления пружин к теле в системе координат $O'x'z'$;

x, z — перемещение в неподвижной системе координат Oxz .

Потенциальная и кинетическая энергии стержня имеют вид:

$$T_{\text{стержня}} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad U_{\text{стержня}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (6)$$

где ρF — погонная масса стержня, EI — изгибная жесткость балки.

Полное описание математической модели (рис. 1) с применением вариационного принципа Гамильтона — Остроградского изложено в работе [2] и имеет вид следующей ГСДУ:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 + c_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_1) + \\ \quad + c_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_2). \end{cases} \quad (7)$$

Для наглядности перепишем (7) в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 + c_1[z_0 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2[z_0 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = -c_1 z'_1 - c_2 z'_2, \\ I_\varphi \ddot{\varphi} - c_1 d_1[z_0 - d_1\varphi - u(a_1, t)] + c_2 d_2[z_0 + d_2\varphi - u(a_2, t)] = c_1 d_1 z'_1 - c_2 d_2 z'_2, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1[z_0 + z'_1 - d_1\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_1) + \\ \quad + c_2[z_0 + z'_2 + d_2\varphi - u(x, t)]\delta(x - a_2). \end{cases} \quad (8)$$

В правой части системы (8) имеем неоднородность, которая не позволяет использовать разработанные аналитико-численные методы исследования свободных колебаний [2; 3].

Замечание. В случае, когда что точки крепления упругих элементов равноудалены от центра масс твердого тела, то есть

$$z'_1 = z'_2 = \tilde{z}, \quad (9)$$

то неоднородности в ГСДУ (8) будут сокращаться, и она принимает вид обобщенной математической модели (1) с следующими коэффициентами:

$$q = \begin{pmatrix} z_0 + \tilde{z} \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u(a_1, t) \\ u(a_2, t) \end{pmatrix}, \quad a = \rho F, \quad c = EI, \quad k_1 = c_1, \quad k_2 = c_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\varphi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 d_1 & c_2 d_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -d_1 \end{pmatrix}, \quad d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

2 Уточненная обобщенная математическая модель

Запишем неоднородности, зависящие от места расположения крепления жестких пружин, полученные в выражении (9) как n -мерный вектор b .

Тогда уточненная обобщенная математическая модель примет вид:

$$\begin{cases} A\ddot{q} + Cq + \bar{C}(Dq - \bar{u}) = b, \\ a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + c \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m k_i (d^{iT} q(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i) + \sum_{i=1}^m P_i \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (10)$$

где P_i , $(i = 1, 2, \dots, m)$ — заданные числа.

Для приведения уточнённой модели к виду (1) предлагается воспользоваться подходом к нахождению положения равновесия системы, описанным в работе [5].

Предположим, что n -мерный вектор $\bar{q}$ и скалярная функция $V(x)$ не зависят от времени t и являются решениями системы (10). При этом будут выполняться следующие условия:

$$q(0) = \bar{q}, \quad u(x, 0) = V(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (11)$$

Тогда подставив их в (11), получим

$$\begin{cases} (C + \bar{C}D)\bar{q} - \bar{C}\bar{V} = b, \\ c \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(x) = \sum_{i=1}^m (k_i (d^{iT} \bar{q} - V(x) + P) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (12)$$

где $\bar{V}$ — вектор составленных скалярных функций $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$.

Запишем краевые условия для функции $V(x)$, соответствующие типу крепления стержня:

$$\gamma_1(V(0)) = 0, \quad \gamma_2(V(l)) = 0. \quad (13)$$

И тогда для системы вида (12) с краевыми условиями (13) справедлива следующая теорема, с подробным доказательством которой можно ознакомиться в работе [5].

Теорема 1. При любых значениях $\bar{q}$ для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения системы (12), удовлетворяющего краевым условиям (13), справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \eta_i(x - a_i) (k_i(d^{iT} \bar{q} - V(a_i) + P_i)), \quad (14)$$

где функции $\eta_i(x)$, $(i = 1, \dots, m)$ — обобщенные решения уравнения

$$c \frac{\partial^4 \eta_i}{\partial x^4}(x) = \sum_{i=1}^m \delta(x), \quad (15)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\gamma_1(\eta_i(-a_i)) = 0, \quad \gamma_2(\eta_i(l - a_i)) = 0. \quad (16)$$

Воспользуемся теоремой 1. Подставим в соотношение (14) $x = a_i$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, получим систему уравнений относительно $\bar{q}$, $\bar{V}$:

$$N\bar{q} - M\bar{V} = b_1 \quad (17)$$

где M — матрица $m \times m$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \eta_1(0)k_1 & \eta_2(a_1 - a_2)k_2 & \dots & \eta_m(a_1 - a_m)k_m \\ \eta_1(a_2 - a_1)k_1 & 1 + \eta_2(0)k_2 & \dots & \eta_m(a_2 - a_m)k_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_1(a_m - a_1)k_1 & \eta_2(a_m - a_2)k_2 & \dots & 1 + \eta_m(0)k_m \end{pmatrix},$$

N — матрица $m \times n$:

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \eta_i(a_1 - a_i)k_i d_1^i & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_1 - a_i)k_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_1 - a_i)k_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m \eta_i(a_2 - a_i)k_i d_1^i & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_2 - a_i)k_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_2 - a_i)k_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m \eta_i(a_m - a_i)k_i d_1^i & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_m - a_i)k_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m \eta_i(a_m - a_i)k_i d_n^i \end{pmatrix},$$

b_1 — m -мерный вектор:

$$b_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \eta_i(a_1 - a_i)P_i \\ \sum_{i=1}^m \eta_i(a_2 - a_i)P_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m \eta_i(a_m - a_i)P_i \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\bar{q}$, $\bar{V}$ с учетом алгебраической части системы (12).

$$\begin{cases} (C + \bar{C}D)\bar{q} - \bar{C}\bar{V} = b, \\ N\bar{q} - M\bar{V} = b_1. \end{cases} \quad (18)$$

Из полученной системы (18) мы можем найти значения векторов $\bar{q}$ и $\bar{V}$, которые определяют положение равновесия системы (10). Для этого требуется найти функции $\eta_i(x)$, ($i=1, \dots, m$), являющиеся обобщенными решениями уравнения (15). С подробным описанием нахождения функций $\eta_i(x)$ можно ознакомиться в работе [5].

Заключение

При моделировании более широкого класса задач, учитывающих несимметричное расположение точек крепления пружин к твёрдым телам, возникает необходимость в уточнении ранее разработанной обобщённой математической модели системы взаимосвязанных твёрдых тел, соединённых с балкой Эйлера — Бернулли посредством упругих элементов. Несимметрия приводит к появлению неоднородностей в правой части уравнений, что обуславливает переход к рассмотрению гибридной системы дифференциальных уравнений (ГСДУ) вида (10).

Для ГСДУ (10) найденные положения равновесия $\bar{q}$ и $V(x)$ в выбранной системе координат дают возможность перейти к новым переменным посредством замены:

$$q(t) = \tilde{q}(t) + \bar{q}, \quad u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + V(x),$$

что позволяет свести задачу к уже исследованной ранее обобщённой математической модели [1]. При этом переменные $\tilde{q}(t)$ $\tilde{u}(x, t)$ можно интерпретировать как переменные, описывающие колебания механической системы относительно положения равновесия.

Литература

1. Мижидон А. Д., Цыцыренова М. Ж. Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне // Вестник ВСГТУ. 2013. № 6. С. 5–12.
2. Мижидон А. Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.
3. Mizhidon A. D. A generalized mathematical model for a class of mechanical systems with lumped and distributed parameters. *AIMS Mathematics*. 2019; 4 (3): 751–762.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1976. 280 с.
5. Мижидон А. Д., Гармаева В. В. Положение равновесия системы прикрепленных к балке Эйлера — Бернулли твердых тел, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 1. С. 56–64.
6. Мижидон А. Д. Об одной дифференциально-алгебраической системе уравнений с сингулярными коэффициентами // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: материалы международного симпозиума. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. С. 155–159.

Статья поступила в редакцию 03.06.2025; одобрена после рецензирования 06.10.2025; принята к публикации 08.10.2025.

FURTHER IMPROVEMENT OF THE GENERALIZED
MATHEMATICAL MODEL OF A SYSTEM OF RIGID BODIES
ATTACHED TO AN EULER — BERNOULLI BEAM

Arsalan D. Mizhidon

Doctor of Technical Sciences, Professor,
East Siberian State University of Technology and Management
Russia, 670013, Rep. Buryatia, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40V
miarsdu@mail.ru

Aldar K. Khamkhanov

Teacher,
East Siberian State University of Technology and Management
Russia, 670013, Rep. Buryatia, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40V
msdos147@gmail.com

Abstract. This article presents a refinement of a previously developed generalized mathematical model of a mechanical system describing the dynamics of a structure composed of an Euler — Bernoulli beam and interconnected rigid bodies attached to it. In contrast to the earlier model, the refined model—constructed within a chosen coordinate system—includes nonhomogeneous terms on the right-hand side of the equations. This extension broadens the model's applicability and enables the description of a wider class of mechanical systems in which the attachment points of elastic elements can be specified arbitrarily.

An approach is proposed for determining the equilibrium position within the chosen coordinate system, allowing a change of variables in the refined model and reducing it to the previously studied generalized mathematical model.

Keywords: generalized mathematical model, rigid body, Euler — Bernoulli beam, hybrid system of differential equations, equilibrium position.

For citation

Mizhidon A. D., Khamkhanov A. K. Further Improvement of the Generalized Mathematical Model of a System of Rigid Bodies Attached to an Euler — Bernoulli Beam // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 3. P. 50–58.

The article was submitted 03.06.2025; approved after reviewing 06.10.2025; accepted for publication 08.10.2025.