ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.91
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-21-30

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСЕРВАТИВНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

© Новиков Михаил Алексеевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

Аннотация. В статье предложено обоснование к методу Рауса — Ляпунова для нахождения стационарных движений механических автономных консервативных систем. Изложение вначале проведено для автономных гамильтоновых систем на которые наложены дополнительные условия в виде некоторых алгебраических равенств. Их применение осуществляется известным способом Лагранжа неявного учитывания отмеченных условий, который состоит в формировании связки из гамильтониана исходной системы и алгебраической суммы указанных условий, умноженных на неопределенные вещественные множители. Последние в дальнейшем рассматриваются наравне с переменными системы.

При новом взгляде на интегрирование гамильтоновых систем как бесконечно малое контактное преобразование последнее по существу свелось к нахождению положений равновесия преобразованной системы с учетом введенных ограничений.

Принимая во внимание то обстоятельство, что в консервативных системах гамильтониан состоит из суммы кинетической и потенциальной энергий, этот подход в точности переносится на механические автономные консервативные системы общего вида. Для этого формируется связка, состоящая из алгебраической суммы первых интегралов исходной системы уравнений движения с неопределенными вещественными множителями, участвующими наравне с фазовыми переменными.

Условие постоянства решений для стационарного движения сводит задачу их нахождения к обращению в нуль всех частных производных по фазовым переменным и множителям Лагранжа как в гамильтоновых системах, так и механических автономных консервативных системах общего вида.

В общем случае установлено несовпадение найденных методом Рауса — Ляпунова стационарных движений с решениями положений равновесия изучаемой системы.

Ключевые слова: консервативная автономная система, стационарное движение, первый интеграл, связка интегралов.

Для цитирования
Новиков М. А. О стационарных движениях механических консервативных автономных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 21–30.

Введение

Во многих механических консервативных автономных системах, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

часто проводится изучение некоторых динамических свойств, связанных с нахождением стационарных движений и последующим исследованием их устойчивости. Термин *стационарное движение* и в настоящее время не твердо установлен, в основном [1] он означает установившееся со временем и не зависящее от времени движение. Там же отмечено, что они имеют некоторую аналогию с состоянием равновесия.

Традиционно они находятся развитым методом Рауса — Ляпунова [2–4], основанным на полном наборе известных первых интегралов системы (1):

$$V_1(x) = c_1, V_2(x) = c_2, \cdots, V_k(x) = c_k \quad (1 < k < N), \tag{2}$$

которые могут быть как общими, так и частными. Вообще говоря, при неполном наборе первых интегралов могут быть определены только некоторые стационарные движения. Указанным методом исследованы многие механические системы, начало которым положил П. А. Кузьмин [5].

Вместе с тем иногда в отечественной литературе под стационарными движениями полагаются положения равновесия системы (1), являющиеся решениями алгебраической системы:

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \cdots, f_N(x) = 0\,. \tag{3}$$

Отсюда возникает вопрос об установлении соответствия или некоторого отличия между упомянутыми способами представления стационарных движений.

1 Первоначальные понятия стационарных движений

При изучении обсуждаемого вопроса следует обратиться к начальному понятию *стационарные движения,* которое восходит к консервативным автономным системам, описываемым дифференциальными уравнениями в канонических переменных Гамильтона [1; 6]. В них под стационарным понимается такое движение системы с циклическими переменными, при котором нециклические координаты и соответствующие циклическим координатам скорости сохраняют с течением времени постоянные значения [1, с. 257]. Отмеченное свойство постоянства значений всех координат А. М. Ляпунов [4] обобщил на механические консервативные автономные системы общего вида.

В дальнейшем будем придерживаться изложения, близкого к [1]. Рассмотрим механическую гамильтонову систему:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где $H(q,p)$ — функция Гамильтона; q_i $(i = 1, \ldots, n)$ — позиционные координаты; p_i — соответствующие им импульсы. Будем здесь допускать отсутствие циклических переменных, которые в дальнейшем не обязательны. Как ранее упоминалось [1], стационарные движения должны быть постоянными значениями и поэтому соответствуют решениям системы:

$$\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}=0,\quad \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)\,. \tag{1.2}$$

Дополнительно в рассмотрение вводятся некоторые алгебраические равенства [1, с. 384]:

$$w_1(q,p)=0, w_2(q,p)=0,\ldots,w_k(q,p)=0 \qquad (1<k<n)\,. \tag{1.3}$$

В частности, такие алгебраические соотношения могут выражать определенные наложенные связи в системе (1.1), допустимые для консервативных систем, а также первые интегралы, принимающие конкретные (фиксированные) значения. При такой постановке нахождение стационарных движений условно может выражать

З А Д А Ч А 1, состоящая в совместном выполнении условий (1.1) и (1.3):

$$\dot q_i=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i},\ \dot p_i=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}=0,\ w_1(q,p)=0,\ldots,w_k(q,p)=0\,. \tag{1.4}$$

Такая переопределенная система нелинейных алгебраических уравнений для консервативной системы часто допускает вещественные решения, иногда — не единственные.

Но эту задачу можно решать другим путем, используя формулировку нового взгляда К. Г. Якоби на интегрирование гамильтоновых систем [1, с. 403]. Согласно такому подходу интегрирование (1.4) сводится к отысканию бесконечно малого невырожденного контактного преобразования переменных к такой же гамильтоновой системе с функцией Гамильтона:

$$K(Q,P,\lambda)=H(q(Q,P),p(Q,P))-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j w(q(Q,P),p(Q,P)) \tag{1.5}$$

при вещественных множителях $\lambda_j\ (j=1,2,\ldots,k)$.

При этом подчеркивается аналитическая зависимость прежних координат $q_i,p_i\ (i=1,2,\ldots n)$ от новых позиционных координат $Q_i\ (i=1,2,\ldots n)$ и соответствующих им импульсов $P_i\ (i=1,2,\ldots n)$.

В новых переменных уравнения движения запишутся:

$$\dot Q_i=\frac{\partial K(Q,P,\lambda)}{\partial P_i},\ \dot P_i=-\frac{\partial K(Q,P,\lambda)}{\partial Q_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n)\,.$$

При таком подходе для конечной цели приведения новых переменных к постоянным значениям $Q_i=const, P_i=const\ (i=1,2,\ldots n)$ [1, с. 403] должна выполняться система:

$$\frac{\partial K(Q,P,\lambda)}{\partial Q_i}=0,\quad \frac{\partial K(Q,P,\lambda)}{\partial P_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)\,, \tag{1.6}$$

аналогичная (1.2). Тогда из (1.4) следуют уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial w_j(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial Q_i} = \dfrac{\partial H(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial Q_i} - \dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial Q_i}, \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial w_j(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P_i} = \dfrac{\partial H(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P_i} - \dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial P_i}. \end{cases}$$

В предположении выполнения (1.2) и (1.6) должны быть справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial w_j(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n), \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial w_j(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P_i} = 0 \quad (j = 1,\ldots,k). \end{cases}$$

Тогда задачу 1 можно математически выразить в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial w(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial Q_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\partial w(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P_i} = 0, \\ w(q(Q,P),p(Q,P) = 0 \quad (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,k). \end{cases} \tag{1.7}$$

З А Д А Ч А 2. Нахождение стационарных движений системы (1.1) при дополнительных множествах (1.3) можно свести к выполнению равенств (1.7).

Но в последних уравнениях участвуют новые переменные. Чтобы учесть предыдущие переменные, введем следующие обозначения:

$$R = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j(q,p),\ h_1' = (\frac{\partial R}{\partial q}, \frac{\partial R}{\partial p})' = (\frac{\partial R}{\partial q_1}, \frac{\partial R}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial q_n}, \frac{\partial R}{\partial p_1}, \frac{\partial R}{\partial p_2}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial p_n})',$$

(обозначение «штрих» — символ транспонирования).

$$h_0' = (\frac{\partial R}{\partial Q}, \frac{\partial R}{\partial P})' = (\frac{\partial R}{\partial Q_1}, \frac{\partial R}{\partial Q_2}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial Q_n}, \frac{\partial R}{\partial P_1}, \frac{\partial R}{\partial P_2}, \cdots, \frac{\partial R}{\partial P_n})',$$

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} & \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial p_2}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_2} & \frac{\partial p_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial p_2}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial Q_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_n} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_2}{\partial Q_n} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial Q_n} \\ \frac{\partial q_1}{\partial P_1} & \frac{\partial q_2}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial P_1} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \frac{\partial p_2}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial P_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial P_2} & \frac{\partial q_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial P_2} & \frac{\partial p_1}{\partial P_2} & \frac{\partial p_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial P_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_1}{\partial P_n} & \frac{\partial q_2}{\partial P_n} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial P_n} & \frac{\partial p_1}{\partial P_n} & \frac{\partial p_2}{\partial P_n} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко проверить выполнение тождества $h_0 = Th_1$.

Тогда для выполнения (1.7) при невырожденном преобразовании должно быть $h_1 = 0$. В результате задача 2 сводится к более конкретной формулировке.

З А Д А Ч А 3. Стационарные движения системы (1.1) удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial w_j(q,p)}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,n), \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial w_j(q,p)}{\partial p_i} = 0 \qquad (j = 1,\dots,k), \\ \qquad w_j(q,p) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Конечно, неопределенные множители Лагранжа в последней системе можно уменьшить, полагая $\lambda_1 \neq 0$ и вводя относительные величины $\mu_j = \lambda_j / \lambda_1$ для $j = 2,\dots,k$.

Применяя теорему Лагранжа [6] об условном экстремуме, можно систему (1.8) интерпретировать как экстремум $w_1(q,p)$ при выполнении остальных алгебраических равенств $w_2(q,p) = 0,\dots,w_k = 0$. Фактически задача 3 в постановке (1.8) представляет систему $(2n+k)$ уравнений от $(2n+k)$ переменных. В общем случае для консервативных нелинейных систем такие уравнения допускают решения и зачастую не единственные.

При этом допускается существование вещественных решений системы (1.8) для некоторых индексов $j \in \{1,2,\dots,n\}$, когда выполняется хотя бы одно из соотношений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial Q_j} = \dfrac{\partial H(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial Q_j} \neq 0, \\ \dfrac{\partial K(Q,P)}{\partial P_j} = \dfrac{\partial H(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P_j} \neq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда имеет место

З А М Е Ч А Н И Е 1.

Отдельные решения системы (1.8) могут не удовлетворять системе вида (1.2) для некоторых $j \in \{1,2,\dots,n\}$, хотя при одном из условий (1.9).

Так как многие условия $w_j = 0\,(j = 1,2,\dots,k)$, как ранее оговаривалось, вносят дополнительные ограничения в систему (1.1) и не являются ее решениями, то решения системы (1.2) не могут совпадать с решениями системы (1.8). Отсюда следует

З А М Е Ч А Н И Е 2.

Стационарные движения системы (1.1) при ограничениях (1.3), получаемые из системы (1.8), не являются решениями положений равновесия (1.2).

2 Условия стационарности для механических систем общего вида

В консервативных автономных механических системах [1; 6] функция Гамильтона $H(q,p)$ представляет сумму кинетической и потенциальной энергий. Для тех же механических систем, записанных не в канонических переменных, сумма упомянутых энергий составляет полную энергию системы $V_0(x)$, где $x \in R^N$ $(N = 2n)$. Поэтому в механических консервативных системах общего вида нет необходимости осуществлять преобразование к каноническим переменным, полагая лишь $H(q,p) = V_0(x)$. Вместо алгебраических условий полагаются остальные известные первые интегралы вида (2), как общие, так и частные.

Конечно, здесь вместо функции Лагранжа вида (1.5) будет участвовать связка из первых интегралов:

$$K(x,\lambda) = V_0(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (V_j(x) - c_j).$$

Следует отметить, что часть констант интегрирования для общих интегралов может быть произвольной, а другая часть констант в количестве k_1 $(1 < k_1 < k)$ имеет конечные конкретные (фиксированные) значения. При этом некоторые интегралы могут быть общими, как, например, интеграл Пуассона вида $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, другие — частными. В частности, для задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки [1; 6; 8] в своих обозначениях частный интеграл Гесса $Ax_0p + Cz_0r = 0$, Горячева — Чаплыгина $4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 0$. В этом состоит отличие от известного способа Лагранжа для условного экстремума [7], когда все условия заданы конечными конкретными значениями. При этом аналогично системе (1.7) для отыскания решений стационарности представляется иная система:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K(x,\lambda)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,N), \\ \dfrac{\partial K(x,\lambda)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j = 1,\ldots,k_1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Хотя последняя система недоопределена, так как имеется $(N + k_1)$ уравнений от $(N + k)$ переменных, она допускает двойную трактовку:

1) ее можно рассматривать как экстремум функции $V_0(x)$ при условии выполнения остальных k_1 интегралов с фиксированными константами (можно рассматривать также при условии выполнения всех известных k первых интегралов с остальными произвольными константами, так как они не влияют на нахождение решений последней системы ввиду произвольных констант интегрирования), что и составляет основу метода Рауса — Ляпунова [2–4];

2) на любом стационарном движении $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)})$, найденном при соответствующих $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_k^{(0)})$, в связке интегралов $K(x^{0)}, \lambda^{(0)})$ не содержатся линейные слагаемые по фазовым переменным.

Последнее позволяет представлять $K(x^{0)}, \lambda^{(0)})$ на стационарном движении функцией, разложение которой по отклонениям от стационарного движения начинается с членов второго наименьшего порядка. Тогда к ней можно применять второй метод Ляпунова для исследования на устойчивость найденного стационарного движения. Об этом утвердительно подчеркивается в [4].

Так как интеграл полной энергии участвует одинаково с остальными первыми интегралами, то можно в качестве испытываемого на экстремум выражения рассматривать другой первый интеграл $V_j(x)$, для которого $\lambda_j \neq 0$ и c_j не относится к фиксированной константе. Тогда можно рассматривать экстремум $V_j(x)$ при условии выполнения остальных первых интегралов.

Очевидно, для полного набора первых интегралов решение системы алгебраических уравнений, обращающих в нуль все частные производные по фазовым переменным связки интегралов, совпадает с решениями правой части уравнений движения (1). Но для стационарных движений, кроме того, должны выполняться первые интегралы с фиксированными константами, если они есть (первые интегралы с неопределенными константами выполняются всегда). Это составляет главное отличие от решений положений равновесий. Требование существования первых интегралов с фиксированными константами при нахождении стационарных движений довольно существенно. Так, в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки [1; 6; 8], где $N = 6$, уравнения движения допускают лишь общий интеграл $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = const$. А в аналитической механике для этой же задачи имеет смысл только интеграл Пуассона $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Наибольший интерес представляют механические системы, не содержащие первые интегралы с фиксированными константами. Возникает вопрос о возможности их существования в механике. Для таких систем, если они есть, стационарные движения будут совпадать с решениями положений равновесия.

Особый интерес вызывает неполный набор первых интегралов, при котором возможны те же стационарные движения. Вообще этот вопрос решается эмпирически в каждой конкретной системе. А в самом общем случае, чтобы не пропустить какие-то стационарные движения, необходим полный набор первых интегралов.

В целом для метода Рауса — Ляпунова важно наличие более полного набора первых интегралов уравнений движения и система уравнений вида (1) вовсе не обязательна.

Аналогично замечанию 2 здесь имеет место

З А М Е Ч А Н И Е 3.

Стационарные движения для механической автономной консервативной (1) системы, получаемые из системы (2.1), в общем случае не совпадают с решениями положений равновесия (1).

Как ранее упоминалось, совпадение возможно только при отсутствии первых интегралов с фиксированными константами.

Заключение

В статье не проводится исследование какой-либо конкретной системы, но предложено теоретическое обоснование метода Рауса — Ляпунова для механических консервативных автономных систем. Оно основывается на теории гамильтоновых систем, когда к уравнениям движения с гамильтонианом $H(q, p)$ добавляются некоторые наложенные связи в виде алгебраических равенств. Измененный гамильтониан тогда по способу Лагранжа состоит из линейной комбинации исходного гамильтониана и заданных равенств с неопределенными вещественными множителями.

Такой подход в точности переносится и на механические автономные консервативные системы, где аналогом гамильтониана является интеграл полной энергии, состоящий из суммы кинетической и потенциальной энергий. В результате уравнения для нахождения стационарных движений сводятся к экстремуму интеграла полной энергии при условии выполнения остальных первых интегралов. Это и составляет основу метода Рауса — Ляпунова для механических автономных консервативных систем.

Литература

1. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 584 с.

2. Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. London.: McMillan, 1877. 108 p.

3. Routh E. J. The advanced part of a treatiseon the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.

4. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Москва: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.

5. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. Москва: Наука, 1973. 206 с.

6. Аппель П. Теоретическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 488 с.

7. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Статья поступила в редакцию 30.10.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

ON STEADY-STATE MOTIONS OF A MECHANICAL CONSERVATIVE AUTONOMOUS SYSTEMS

Mikhail A. Novickov
Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS),
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia

Abstract. This article proposed a justification for the Routh-Lyapunov method for finding the stationary motions of autonomous conservative mechanical systems. The presentation was initially conducted for autonomous Hamiltonian systems, on which additional conditions in the form of certain algebraic equalities were imposed. Their application is carried out by the well-known Lagrange method of implicitly taking into account the indicated conditions, which consists of forming a bundle of the Hamiltonian of the initial system and the algebraic sum of the specified conditions, multiplied by undefined real factors. This method consists of forming a connection between the Hamiltonian of the original system and the algebraic sum of the specified conditions, multiplied by undefined real factors. The latter are subsequently considered on an equal basis with the system variables.

Using a new view of the integration of Hamiltonian systems as an infinitesimal contact transformation, the latter essentially reduced to finding the equilibrium positions of the transformed system, taking into account the introduced constraints.

Taking into consideration the fact that in conservative systems the Hamiltonian consists of the sum of kinetic and potential energies, this approach is precisely transferred to mechanical autonomous conservative systems of general form. For this purpose, a bundle is formed consisting of the algebraic sum of the first integrals of the original system of equations of motion with indefinite real multipliers participating on an equal basis with the phase variables.

The condition of constancy of solutions for stationary motion reduces the problem of finding them to the vanishing of all partial derivatives with respect to phase variables and Lagrange multipliers both in Hamiltonian systems and in mechanical autonomous conservative systems of general form.

In the general case, a discrepancy was established between the found by the Routh-Lyapunov method of the stationary motions and the solutions of the equilibrium positions of the studied system.

Keywords: conservative autonomous system, steady-state motion, first integral, bundle of integrals.

For citation

Novickov M. A. On Steady-State Motions of a Mechanical Conservative Autonomous Systems // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 21–30.

The article was submitted 30.10.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.