

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

---

Научная статья

УДК 519.62

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-31-39

## ЗАМЕТКА О НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

© Булатов Михаил Валерьевич

доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник,  
Институт динамики систем и теории управления

имени В. М. Матросова СО РАН

Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

mvbul@icc.ru

© Соловарова Любовь Степановна

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,

Институт динамики систем и теории управления

имени В. М. Матросова СО РАН

Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

soleilu@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей статье рассмотрены взаимосвязанные линейные системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, которые записаны в векторно-матричном виде. Такие постановки достаточно часто встречаются в важных прикладных задачах энергетики, кинетической химии, биологии, моделировании многозвеньевых систем и других областей. В отечественной и зарубежной литературе их принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями. Предполагается, что число уравнений в системе меньше, чем размерность искомой вектор-функции. Используя результаты теории недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений, дано понятие нормального решения для выделенного класса задач. Для их численного решения предложен вариант коллокационно-вариационных разностных схем, основанных на решении задачи математического (квадратичного) программирования специального вида. Приведены результаты численных расчетов нескольких модельных примеров, которые иллюстрируют работоспособность данного подхода.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраические уравнения, недоопределенные системы, метод множителей Лагранжа, коллокация, разностные схемы, системы линейных алгебраических уравнений, начальные условия, ранг матрицы, целевая функция.

### Для цитирования

Булатов М. В., Соловарова Л. С. Заметка о недоопределенных дифференциально-алгебраических уравнениях // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 31–39.

## Введение

Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  —  $(m \times n)$ -матрицы,  $f(t)$  и  $x(t)$  — заданная  $n$ -мерная и искомая  $m$ -мерная вектор-функции.

О начальных данных будет сказано позже. Предполагается, что элементы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $f(t)$  обладают той гладкостью, которая необходима для проведения рассуждений.

При  $m = n$  и условии  $\det A(t) \equiv 0$  будем иметь стандартные дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ). По качественному исследованию и численным методам решения начальной задачи ДАУ вышло и продолжает выходить огромное число публикаций, которые невозможно перечислить. Приведем лишь некоторые монографии, в которых приведены различные подходы к исследованию и разработке численных алгоритмов и прикладные задачи, описываемые ДАУ [2], [6], [7], [8], [12], [13]. В этих же монографиях приведена обширная библиография по данному вопросу.

При  $m > n$  и условии  $\text{rank } A(t) < n, \forall t \in [0, 1]$  мы имеем переопределенные ДАУ. Такие постановки задач возникают, например, при математическом моделировании некоторых технических процессов: модели гидроцепей [1], уравнения со связями [6, с. 524].

При  $m < n$  мы имеем недоопределенные ДАУ или ОДУ, которые даже при корректно заданных начальных условиях имеют бесконечное множество решений. Несколько известно авторам, для таких ДАУ практически нет исследований. Исключение составляет [13, р. 511], где подчеркнуты принципиальные трудности исследования таких уравнений в терминах проекторов и приведено понятие их сложности (индекс один и два). Также отметим статьи [9], [10], где исследованы ДАУ с прямоугольными матрицами, для которых получены условия расщепления исходной задачи на более простые.

### 1 Постановка задачи

Вернемся к системе (1) при  $m < n$ . Вначале рассмотрим случай, когда

$$\text{rank } A(t) = \text{const} = m \quad \forall t \in [0, 1], \quad (2)$$

т. е. матрица  $A(t)$  имеет полный ранг. Остановимся на выборе начальных условий. Если для стандартных ОДУ задают  $x_0 = x(0)$ , то для (1) с условием (2) естественно задавать

$$A(0)x(0) = a, \quad (3)$$

где  $a$  — заданный  $m$ -мерный вектор.

Приведем необходимые в дальнейшем изложении обозначения и сведения.

**Определение 1.** (см., напр., [2], [4]) Матрица  $D^+$  называется псевдообратной для матрицы  $D$ , если она является решением матричных уравнений:

- $DD^+D = D, D^+DD^+ = D^+$
- $(DD^+)^T D = D^+D, (DD^+)^T = D^+$ .

Матрица  $D^+$  существует и определена единственным образом [2],[3],[4]. Если элементы матрицы  $D(t) \in C_{[0,1]}^k$  и  $\text{rank}D(t) = \text{const}$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , то матрица  $D^+(t)$  также определена единственным образом и ее элементы принадлежат  $C_{[0,1]}^k$  (см., напр., [7]).

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Gz = b, \quad (4)$$

где  $G — (m \times n)$  матрица;  $b — заданный$ ;  $z — искомый вектор$ . Пусть  $z \in R^n$  множество векторов, которые минимизируют  $\|Gz - b\|$  в евклидовой метрике. Вектор  $z^*$  называется нормальным решением системы (4), если  $z^* \in Z$  и при этом сам имеет минимальную норму в евклидовой метрике.

Нормальное решение (4) всегда существует и единствено [3], [5] и находится по формуле (см., напр., [3]):

$$z^* = G^+b. \quad (5)$$

По аналогии с неопределенными СЛАУ приведем

**Определение 2.** Нормальным решением уравнения (1) с условиями (2),(3) назовем решением ОДУ вида:

$$x'(t) + A^+(t)B(t)x(t) = A^+(t)f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

$$x(0) = A^+(0)a. \quad (7)$$

Рассмотрим другой случай, а именно

$$\text{rank}A(t) = \text{const} = l < m, \quad (8)$$

но

$$\text{rank}[A(t) + (E - A(t)A^+(t))B(t)] = \text{const} = m. \quad (9)$$

Такие системы называют ДАУ индекса 1 [13]. Дифференцируя (1) и умножая полученное на матрицу  $V(t) = E - A(t)A^+(t)$  в силу определения 1 (первое уравнение), имеем

$$V(t)(A'(t) + B(t))x'(t) + V(t)B'(t)x(t) = V(t)f'(t). \quad (10)$$

Суммой данной системы и исходной (1) является

$$A_1(t)x'(t) + B_1(t)x(t) = f_1(t), \quad (11)$$

где  $A_1(t) = A(t) + V(t)(A'(t) + B(t))$ ,  $B_1(t) = B(t) + V(t)B'(t)$ ,  $f_1(t) = f(t) + V(t)f'(t)$ .

При выполнении условий (8) и (9) можно показать, что  $\text{rank}A_1(t) = const = m$ , то есть путем неособенных преобразований и дифференцирования мы свели ДАУ с условием (7) к задаче с условием (2). Опишем выбор начальных условий для (11), которые были заданы в виде (3). Умножая (1) на матрицу  $V(t) = E - A(t)A^+(t)$ , имеем при  $t = 0$   $V(t)B(0)x(t) = V(0)f(0)$ .

В отличие от случая (2) здесь  $\text{rank}A(t) = l < m$ , то есть СЛАУ  $A(0)x(0) = a$  имеет неполный ранг. Умножая (1) на матрицу  $V(t)$  и полагая, что  $t = 0$ , имеем  $V(0)B(0)x(0) = V(0)f(0)$ . Суммой данного начального условия и условия (3) является

$$(A(0) + V(0)B(0))x(0) = a + V(0)f(0). \quad (12)$$

В силу (8) СЛАУ (12) имеет полный ранг, поэтому точно так же, как и в случае (2),

$$x(0) = (A(0) + V(0)B(0))^+(a + V(0)f(0)). \quad (13)$$

Итак, мы редуцировали ДАУ (1) с входными матрицами, удовлетворяющими условиям (8) и (9), и начальными условиями (3) к ДАУ (11) полного ранга с начальными условиями (13), которое имеет единственное нормальное решение.

## 2 Численный алгоритм

Стандартные разностные схемы, разработанные для численного решения как ОДУ, так и некоторых классов ДАУ (при  $m = n$ ), принципиально не применимы для рассматриваемых задач в силу того, что матрицы  $A(t), B(t)$  являются прямоугольными и могут иметь неполный ранг.

Ранее авторами были предложены коллокационно-вариационные схемы для задачи (1) [11] с начальными условиями  $x(0) = 0$ . Эти подходы не требуют вычисления производных выходных данных, весьма просты в программной реализации. Такие методы неплохо себя зарекомендовали на ряде известных тестовых примеров. Эти алгоритмы можно легко перенести на недопределенные ДАУ. Приведем один из таких

методов с условием (3). Стандартно обозначим  $t_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ ,  $A_i = A(t_i)$ ,  $B_i = B(t_i)$ ,  $f_i = f(t_i)$ ,  $x_i \approx x(t_i)$  и применим для (1) двухшаговую формулу дифференцирования назад [6]

$$A_{i+1}(3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1}) + 2hB_{i+1}x_{i+1} = 2hf_{i+1}, i = 1, 3, \dots, N. \quad (14)$$

Предположим при этом, что матрица  $A(t)$  или  $A(t) + (E - A(t)A^+(t))B(t)$  полного ранга. Начальные условия  $x_0$  вычислены по формуле  $x(0) = A^+(0)a$  для случая  $\text{rank}A(t) = m$  или по формуле (13) для случая  $\text{rank}A(t) = l < m$  и  $\text{rank}A(t) + V(t)B(t) = m$ . В результате, дифференцируя (14) на каждом интервале  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ , мы имеем недоопределенную СЛАУ размером  $m \times 2n$ . Предлагается смотреть на (14) как на ограничения типа равенств для поиска минимума целевой функции, которая аппроксимирует квадрат нормы приближенного решения. Остановимся на выборе этой целевой функции. Пусть  $\|L_i(t)\|$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$  — интерполяционный вектор-полином второй степени, проходящий через точки  $(t_{i-1}, x_{i-1})$ ,  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_{i+1}, x_{i+1})$ . Тогда  $\|L_i(t)\|^2$ , где  $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ , будем находить по формуле:

$$\begin{aligned} \|L_i(t)\|^2 &= \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left[ L_i^\top(t)L_i(t) + (L_i^\top(t))'L'_i(t) + (L_i^\top(t))''L''_i(t) \right] dt \approx \\ &\approx 2h \|x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}\|^2 + 2h \|3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1}\|^2 + 2h \|x_{i+1}\|^2. \end{aligned}$$

Здесь норма вектора понимается как евклидова. В силу того, что умножение целевой функции на ненулевой скаляр не влияет на поиск аргумента условного минимума, мы будем иметь следующую задачу.

Найти

$$\min \|x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}\|^2 + \frac{h^2}{4} \|3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1}\|^2 + h^4 \|x_{i+1}\|^2 \quad (15)$$

при ограничениях (14). Так как шаг сетки мал, отбросим последнее слагаемое в (15). Тогда на каждом интервале  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$  получим задачу на условный минимум: найти  $\min\Phi(x_{i+1}, x_{i-1})$ , где

$$\Phi(x_{i+1}, x_{i-1}) = \|x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}\|^2 + \frac{h^2}{4} \|3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1}\|^2, \quad (16)$$

при ограничениях (14). Стандартным образом, используя метод множителей Лагранжа, перейдем от данной задачи к задаче на безусловный минимум функции Лагранжа:

$$Z(x_{i+1}, x_{i-1}, \Lambda) = \frac{h^2}{4} \|-x_{i+1} + 4x_i - 3x_{i-1}\|^2 + \|x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}\|^2 + \Lambda (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \quad (17)$$

$$+\Lambda^\top [(3A_{i+1} + 2hB_{i+1})x_{i+1} - 4A_{i+1}x_i + A_{i+1}x_{i-1} - 2hf_{i+1}],$$

где  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^\top$  –  $m$ -мерный вектор множителей Лагранжа. Векторные аргументы  $x_{i+1}, x_i, \Lambda$ , при которых функция (17) будет достигать минимума, удовлетворяют следующей СЛАУ

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (2 + \frac{h^2}{2})E & -(4 + 2h^2)E & (3A_{i+1} + 2hB_{i+1})^\top \\ -(4 + 2h^2)E & (8 + 8h^2)E & -4A_{i+1}^\top \\ 3A_{i+1} + 2hB_{i+1} & -4A_{i+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ \Lambda \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -(2 + \frac{3}{2}h^2)E \\ (4 + 6h^2)E \\ -A_{i+1} \end{pmatrix} x_{i-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2f_{i+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Начальное условие в зависимости от матриц  $A(t), B(t)$  нужно находить либо по формуле  $x_0 = A^+(0)a$ , либо по формуле (13).

### 3 Численные расчеты

Приведем численные расчеты модельных примеров. Здесь принято обозначение  $err = \max_{i=\bar{i}, N} \|x_i - x(t_i)\|$ , а норма  $n$ -мерного вектора  $y$  задается как  $\|y\| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j|$ , где  $x_i$  находим по алгоритму (18),  $x(t_i)$  – нормальное решение.

**Пример 1.1** Рассмотрим недоопределенное ОДУ

$$(1 \ 2)x'(t) + (3 \ 4)x(t) = 0, \quad (1 \ 2)x(0) = 5.$$

Псевдообратная матрица:  $A^+(t) = (1/5 \ 2/5)^\top$ .

Нормальное решение данного примера является решением системы ОДУ

$$x'(t) + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Данная задача имеет следующее решение:  $x(t) = (\exp(-\frac{11}{5}t), 2 \exp(-\frac{11}{5}t))^\top$ . Результаты расчетов этого примера представлены в таблице 1.

Таблица 1

$h$	0.1	0.05	0.025	0.025
$err$	0.2	0.1	0.0543	0.0276

**Пример 2.** Рассмотрим недоопределенное ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем вторую строку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Псевдообратная матрица:

$$A^+(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{118} & \frac{10}{59} \\ \frac{11}{59} & -\frac{13}{59} \\ \frac{33}{118} & -\frac{12}{59} \end{pmatrix}.$$

Нормальное решение данного примера является решением системы ОДУ

$$x'(t) + \begin{pmatrix} -\frac{3}{118} & -\frac{3}{118} & -\frac{3}{118} \\ \frac{1}{59} & \frac{1}{59} & \frac{1}{59} \\ \frac{33}{118} & \frac{33}{118} & \frac{33}{118} \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -9/59 \\ 6/59 \\ 117/59 \end{pmatrix}.$$

Данная задача имеет следующее решение:

$$x(t) = \left( -\frac{9}{59} \exp(-\frac{19}{59}t), \frac{6}{59} \exp(-\frac{19}{59}t), \frac{117}{59} \exp(-\frac{19}{59}t) \right)^\top.$$

Результаты расчетов этого примера представлены в таблице 2.

Таблица 2

$h$	0.1	0.05	0.025	0.025
$err$	0.024	0.01	0.0043	0.002

Расчеты показывают, что алгоритм справляется с решением недоопределеных ОДУ и ДАУ с первым порядком точности.

### Заключение

В статье было введено понятие нормального решения для неопределенных ОДУ и выделенного класса ДАУ. Был предложен достаточно простой алгоритм для приближенного нахождения их нормального решения. Данный алгоритм был протестирован на модельных примерах, которые продемонстрировали его работоспособность. В дальнейшем авторы планируют создать другие, более точные, методы.

### Литература

1. Балышев О. А., Балышев С. О. Физико-математические описания динамических процессов в многоконтурных гидравлических цепях. Новосибирск: Гео, 2012. 219 с.
2. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.
3. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллинн: Валгус, 1988. 120 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 284 с.
6. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: перевод с английского. Москва: Мир, 1999. 685 с.
7. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.
8. Чистяков В. Ф. Системы интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной частью: диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук. Иркутск, 2002. 289 с.
9. Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 81–95.
10. Bulatov M. V., Chistyakov V. F. The Index and Split Forms of Linear Differential-Algebraic Equations. *Bulletin of Irkutsk State University-Series Mathematics*. 2019; 28: 21–35. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.28.21.
11. Bulatov M., Solovarova L. Collocation-variation difference schemes with several collocation points for differential-algebraic equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2020; 149: 153–163. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.06.014.
12. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Zurich, Switzerland: EMS Publishing House, 2006. 192 p.
13. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Berlin: Springer, 2013. 649 p.

Статья поступила в редакцию 30.10.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

A NOTE ON UNDERDETERMINED  
DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

*Mikhail V. Bulatov*

Dr. Sci. (Phys. and Math.)

Chief Researcher

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS  
134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia

*Liubov S. Solovarova*

Cand. Sci. (Phys. and Math.)

Senior Researcher

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS  
134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia

*Abstract.* In the article interconnected linear systems of ordinary differential and algebraic equations written in vector-matrix form are considered. Such formulations are frequently encountered in important applied problems in energy, kinetic chemistry, biology, multi-link system modeling, and other fields. In Russian and international literature, they are commonly referred to as differential-algebraic equations. It is assumed that the number of equations in the system is smaller than the dimension of the desired vector function. Using results from the theory of underdetermined systems of linear algebraic equations, the concept of a normal solution is developed for a singled out of problems. For their numerical solution, a variant of collocation-variational difference schemes based on solving a special type of mathematical (quadratic) programming problem is proposed. The results of numerical calculations of several model examples are presented, which illustrate the effectiveness of this approach.

*Keywords:* differential-algebraic equations, underdetermined systems, Lagrange multiplier method, collocation, difference schemes, systems of linear algebraic equations, initial conditions, matrix rank, objective function.

*For citation*

Bulatov M. V., Solovarova L. S. A Note on Underdetermined Differential-Algebraic Equations // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 31–39.

*The article was submitted 30.10.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.*