ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Научная статья

УДК 519.21
DOI: 10.18101/2304-5728-2026-1-3-14

К АНАЛИЗУ РЕШЕНИЯ ПРОСТОЙ ЗАДАЧИ В РАЗЛИЧНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Ассаул Виктор Николаевич
кандидат технических наук, доцент,
Государственный университет аэрокосмического приборостроения
Россия, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67«А»
vicvic21@yandex.ru

© Головин Александр Викторович
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,
старший научный сотрудник отдела фотоники, физический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, ул. Ульяновская, 1
golovin50@mail.ru

© Погодин Игорь Евгеньевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математики,
Военно-морской политехнический институт
Россия, 198510, г. Санкт-Петербург, ул. Разводная, 15
iepogodin@mail.ru

Аннотация. С целью выяснения обстоятельств получения различных ответов в одной и той же задаче рассматривается несколько путей решения известной задачи об оценке вероятности случайного выбора остроугольного треугольника. Задача решается в различных вероятностных пространствах: I) величины наибольшего угла; II) косинуса наибольшего угла, а также с помощью теоремы косинусов; III) в пространстве двух меньших углов треугольника; IV) двух его меньших сторон.

Показано, что рассмотренные вероятностные пространства, имеющие различную размерность и различные системы координат, допускают переходы от одного к другому с выходом на единственное решение задачи. Для применения геометрического определения вероятности важно предварительно проанализировать вопрос о равномерности заполнения этих пространств точками-событиями, что необходимо для этого способа определения вероятности.

Методически полезный результат заключается в том, что «выравнивание» плотности точек событий в вероятностном пространстве не может быть достигнуто с помощью какой-либо нормировки на дифференциальную меру плотности подмножеств, характеризующую постоянство самих анализируемых значений.

Кроме того, использование различных подходов к решению задачи позволяет лучше понимать ее математическую сущность.

В качестве одного из практических приложений полученных результатов оценивается вероятность изменения пространственной ориентации массива случайно расположенных элементов в виде треугольных призм и четырехгранных пирамид на твердой поверхности при неразрушающем сжатии, составившая 0.5.

Ключевые слова: вероятность, случайное событие, вероятностное пространство, размерность, геометрическое определение, треугольник, теорема косинусов, угол, сторона.

Благодарности

Авторы благодарны А. И. Поповой за большую помощь в подготовке графических материалов.

Для цитирования

Ассаул В. Н., Головин А. В., Погодин И. Е. К анализу решения простой задачи в различных вероятностных пространствах // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 1. С. 3–14.

Введение

Многие задачи допускают несколько альтернативных решений, приводящих в итоге к единому результату. Например, [2; 3]:

- интеграл от произведения экспоненты на синус или косинус можно искать как двухэтапным интегрированием по частям, так и выражением тригонометрических функций в комплексном виде;

- дифференциальное уравнение $y\ dx+x\ dy=0$ можно решать, как уравнение с разделяющимися переменными, как размерно-однородное, как линейное однородное и как уравнение в полных дифференциалах, причем с равным правом и с равным количеством одних и тех же действий;

- линейные неоднородные дифференциальные уравнения допускают решения методом как Бернулли, так и Лагранжа вариации произвольной постоянной.

При этом занимают особое место, часто неизбежно порождают вопросы и требуют особого внимания и разъяснения ситуации, в которых различные пути решения задачи приводят к различным ответам.

Рассмотрим такие ситуации на примере простой задачи из теории вероятностей, которая благодаря богатству практических приложений и требованию особого мыслительного подхода (в противовес детерминистическому) занимает все больше место в учебных программах высшего и среднего образования. В связи с этим покажем, что элементарная задача оценки вероятности отроугольности случайно выбранного треугольника, на первый взгляд, приводит к различным ответам, но при более глубоком анализе по сути дает единый результат.

К числу «исключительных» ситуаций, когда правильными приходится признать несколько различающихся результатов, относится, например, широко известный «парадокс Бертрана», в котором оценивается вероятность (p) того, что случайно выбранная хорда окажется длиннее стороны вписанного в окружность равностороннего треугольника. Здесь результат зависит от способа представления множества (пространства) хорд:

а) с общим концом хорд на окружности («случайный конец»): $p=1/3$;

б) с общим радиусом окружности, которому хорды ортогональны («случайный радиус»): $p=1/2$;

в) с произвольными точками внутри окружности, являющимися серединами хорд («случайные центры»): $p=1/4$.

В данной работе рассмотрим достаточно простую [1] задачу оценки вероятности того, что случайно взятый треугольник окажется полностью остроугольным (не будет содержать тупых углов). Эта задача может иметь практическое приложение, например, для оценки степени уплотнения при неразрушающем сжатии лежащего на твердой плоскости монослоя из соответствующих элементов.

Если эти элементы имеют форму треугольных призм с различными случайными углами в сечениях, которые изначально расположены хаотически, то при наличии тупого угла (вероятность 3/4) в его расположении на плоскости (вероятность 2/3) при давлении сверху элемент повернется наибольшей стороной (гранью) горизонтально, но сверху.

При решении задачи о неразрушающем уплотнении монослоя, состоящего из треугольных пирамид, лежащих на плоскости, возникает необходимость задания распределения параметров этих пирамид, в большей степени отвечающих условиям реального гравия. Не останавливаясь подробно на постановке этой задачи, отметим, что при ее решении возникает вопрос о распределении остроугольных и тупоугольных треугольников, например, вписанных в единичную окружность.

Если представить монослой состоящим из четырехгранных пирамид с гранями в виде треугольников со случайными углами, то при неразрушающем сжатии пирамиды с боковыми гранями с прилегающим к основанию тупым углом повернутся так, чтобы верхняя грань расположилась горизонтально вверху (табл.1).

Сделаем оценки вероятностей таких поворотов пирамид.

Таблица 1

Расчеты вероятностей ориентации пирамидальных элементов

Число тупоугольных граней	Вероятность числа тупоугольных граней	Вероятность тупоугольной грани оказаться сбоку	Вероятность тупому углу оказаться при нижнем основании грани	Вероятность переворота пирамиды при давлении сверху
0	1/64	0	0	0
1	9/64	1/3	2/3	1/32
2	27/64	2/3	2/3	3/16
3	27/64	1	2/3	9/32

Итоговая вероятность составляет ½. Общий результат: повернется в среднем половина элементов монослоя.

Представляется интересным анализ различных подходов к решению этой задачи с точки зрения выбора вероятностных пространств разной размерности, перехода от одного такого пространства к другому. Выполненный анализ носит в значительной мере методический характер и может быть использован преподавателями вузов при ознакомлении студентов с применением методов геометрической вероятности при решении различных математических задач, а также при постановке задач, аналогичных упомянутой выше задаче о монослое.

Рассматриваемая задача допускает несколько различных способов решения.

I. Если сформулировать эту задачу в терминах максимального угла выбираемого треугольника и учесть, что диапазон изменения этого угла $[\pi/3, \pi]$ (полное вероятностное пространство), получаем результат: p=0.25. Действительно (от противного), если бы наибольший угол был меньше $\pi/3$, то сумма всех углов треугольника оказалась бы меньше π. В этом случае вероятность «остроугольности» треугольника составит p=0.25

Под вероятностным пространством понимается множество определенной размерности, состоящее из точек, представляющих все независимые возможные исходы задачи.

Представим теперь одну из сторон треугольника хордой некоторой окружности, описанной вокруг него и стягивающей дугу γ этой окружности. Рассмотрим вопрос о выборе полного вероятностного пространства (рис. 1).

Если в полное вероятностное пространство включить все точки, лежащие на окружности, то для «остроугольности» треугольника третья вершина «С» треугольника должна с вероятностью $\gamma/(2\pi)$ попасть внутрь дуги вертикального сектора той же величины γ. Усреднение этой величины по углу γ в пределах $[0\div\pi]$ приводит к вероятности (p=0.25), что совпадает с предыдущим результатом (п. 1).

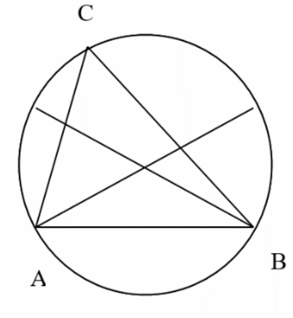

Рис. 1. Представление множества остроугольных треугольников в пространстве точек описанной окружности

Вернемся к исходному предположению о равномерном распределении величин наибольших углов (γ) в диапазоне (π/3÷π). Покажем, что в общем случае это предположение не выполняется и функция распределения *F*(γ), отличаясь от линейной (рис. 2), совпадает с ней лишь при γ=2π/3 (кроме крайней точки диапазона π).

$$F(\gamma)=\begin{cases}\dfrac{(3\gamma-\pi)^2}{\pi^2} & \text{при } \gamma\le\pi/2,\\ \dfrac{3(2\pi\gamma-\gamma^2)}{\pi^2}-2 & \text{при } \gamma>\pi/2.\end{cases} \qquad (1)$$

Этот вывод получается при построении области («растущая» штриховка на рисунке 2) точек, соответствующих трем очевидным ограничениям:

$$\begin{cases}\lambda\ge\alpha,\\ \gamma\ge\pi-\alpha-\gamma,\\ \gamma-\alpha\le\pi.\end{cases} \qquad (2)$$

(Здесь γ — наибольший, α — любой другой угол треугольника).

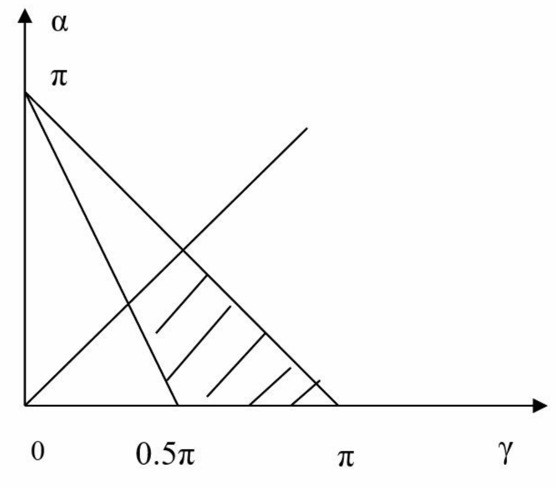

Рис. 2. Диаграмма распределения двух углов треугольника α и γ

Однако подчеркнем еще раз, что требующаяся в геометрическом определении вероятностей равномерность точек-событий в вероятностном пространстве имеет место лишь на двумерной диаграмме (рис. 2).

II. Рассмотрим оценку вероятности «остроугольности» случайно выбранного треугольника в двумерном вероятностном пространстве двух его наименьших углов β и α (плоскость: $\alpha+\beta+\gamma = \pi$). Для этого воспользуемся трехмерной диаграммой с осями γ, α и β (рис. 3) при очевидных ограничениях: $\gamma = \pi - \alpha - \beta$; $\gamma \geq \alpha$; $\gamma \geq \beta$; $\gamma \geq \pi/3$.

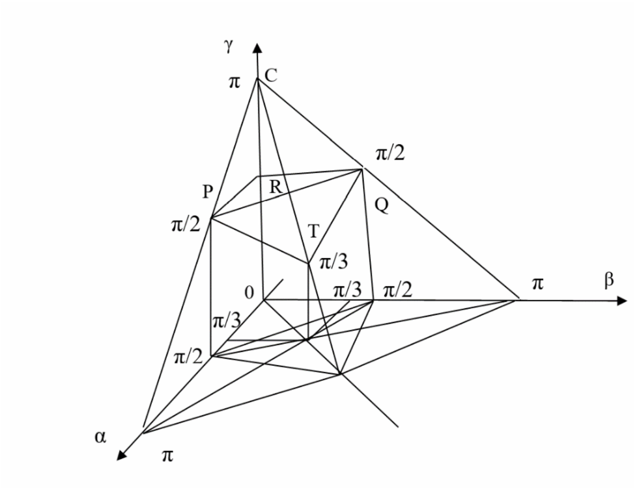

Рис. 3. Четырехгранная пирамида в пространстве с осями γ, α и β

Требуется найти площади двух треугольников PQT и PQC (рис. 3) с общим основанием PQ= $\pi(\sqrt{2})/4$ и высотами RT= $\pi(\sqrt{2})/12$ и CR=$\pi(\sqrt{2})/4$ для множества остроугольных и тупоугольных треугольников соответственно. Получаем p=RT/(RT+CR)=0.25.

III. Теперь рассмотрим искомую оценку вероятности того, что произвольно взятый треугольник окажется остроугольным, исходя непосредственно из величины косинуса наибольшего из его углов.

На первый взгляд, подобно п. 1, острые и тупые углы из интервала ($0 \div \pi$) разделяются по величине $\pi/2$ и тогда вероятность острого наибольшего угла треугольника составит 0.5.

Однако, поскольку рассматривается именно наибольший угол треугольника, а не любой «свободный» острый угол, то он не может быть меньше, чем $\pi/3$, и вероятность «остроугольности» случайно взятого треугольника:

$$p = \frac{\pi}{6} \Big/ \frac{2\pi}{3} = 0.25\,.$$

Заметим, что при использовании геометрического определения вероятностей в «классическом» виде искомая вероятность p должна равняться

$$p = \int_0^{0.5} d(\cos x) \Big/ \left(\int_{-1}^{0} d(\cos x) + \int_0^{0.5} d(\cos x) \right) = 1/3. \tag{3}$$

Здесь «по умолчанию» сделано предположение о равномерном распределении точек-событий по величине косинуса наибольшего угла в полном вероятностном пространстве, а не самих углов, которые при переходе из множества углов претерпевают нелинейное преобразование (*arccos*).

Внесение под интегралы выражения:

$$\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

естественно возвращает к рассмотрению задачи в терминах максимальных углов (п. I) и к оценке искомой вероятности p=0.25.

IV. Наконец сформулируем то же условие «остроугольности» треугольника в терминах длин трех его сторон (a, b, c; где c = 1 — наибольшая), так же, как и п.III, опираясь на величину косинуса наибольшего из его углов. В этом случае рассмотренная выше формулировка задачи в терминах косинусов максимальных углов переносится с одномерного на двумерное многообразие длин его наиболее коротких сторон a и b, составляющих вероятностное пространство. Выше подобную связь демонстрировал рис. 2.

В соответствии с теоремой косинусов требование «остроугольности» треугольника выражается в виде:

$$a^2 + b^2 > c^2 .$$

При очевидном ограничении a+b>c получаем оценку вероятности «остроугольности» в виде отношения части области заштрихованного прямоугольного равнобедренного треугольника, расположенной в квадрате к «северо-востоку» от сегмента круга с углом π/2 (наклонная штриховка на рис. 4), к аналогичной характеристике всего этого треугольника. Сторона треугольника равна единичному радиусу (горизонтальная штриховка на рис. 4) (p=2(1-π/4)=0.429). Интегралы для вкладов от «тупоугольных»:

$$\int_0^{0.25\pi} \left(\int_{\sqrt{2}\cos(f - 0.25\pi)}^{1} r dr \right) df \tag{4}$$

и «остроугольных» треугольников:

$$\int_0^{0.25\pi} \left(\int_1^{1/\cos f} r dr \right) df$$

приводят к оценке p=0.429. Здесь в силу равноправия двух меньших сторон треугольников a и b интегрирование по азимутальному углу можно осуществлять в пределах (0, π/4).

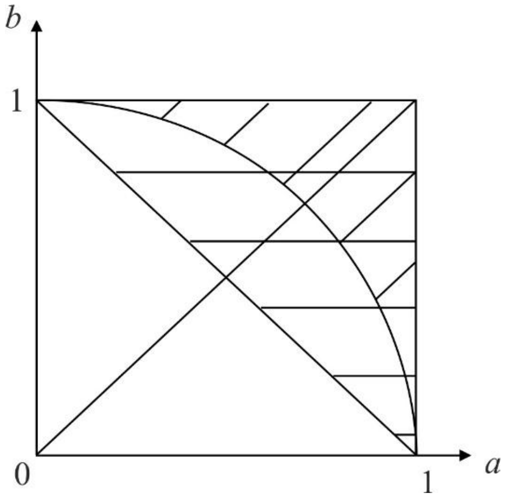

Рис. 4. Представление множества остроугольных треугольников
в пространстве длин двух коротких сторон *a* и *b*

Отличие этого результата (p=0.429) от ожидаемого при использовании косинуса наибольшего угла (p=1/3) и от p=0.25 (при использовании самих углов треугольника) связано с тем, что здесь в качестве элементов полного вероятностного пространства взяты точки плоскости, координаты которых используются для вычисления косинусов рассматриваемых углов и имеют переменную плотность заселения. Это нарушает требование постоянства плотности заполнения при геометрическом определении вероятности.

Эта связь является нелинейной:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-1}{2ab}\right) = \arccos\left(\frac{r^2-1}{\sin(2f)}\right) \tag{5}$$

отражающей неравномерность плотности распределения точек-событий на плоскости (a*b).

Здесь r и f — полярные координаты на двумерной диаграмме меньших сторон треугольников a и b.

Таким образом, в интегралы для площадей (частей вероятностного пространства) образов остроугольных и тупоугольных треугольников следует ввести некоторый нормирующий (выравнивающий) фактор.

А) Сначала предпринималась попытка в качестве такого фактора использовать деление подынтегральных выражений на оценки меры подмножеств, соответствующих каждому конкретному значению $\cos\gamma$.

В качестве такой нормирующей меры брались длины соединяющих точки a=1, b=0 и a=0, b=1 дуг, на которых постоянно значение $\cos\gamma$. («эквипотенциальность» на «изолинии»), а именно криволинейные интегралы, выражающие эти длины, в которые в качестве элемента длины включены классические выражения, получаемые из теоремы косинусов при постоянстве величины $\cos\gamma$ ($r(f)$, $dr(f)/df$).

Для тупоугольных треугольников эти интегралы составляют

$$r\left(0.5\pi - \arcsin\left(1/r\sqrt{2}\right)\right),$$

а для остроугольных треугольников:

$$\int_0^{0.25\pi} \sqrt{\left(1-2\sin(2t)\frac{r^2-1}{r^2\sin(2f)}+\left(\frac{r^2-1}{r^2\sin(2f)}\right)^2\right)\Bigg/\left(1-\frac{\left(r^2-1\right)\sin(2t)}{r^2\sin(2f)}\right)}dt. \quad (6)$$

Отметим, что использованное здесь уравнение «изолиний» для значений *cos* γ можно получить как непосредственно из теоремы косинусов:

$$r(f) = 1\Big/\sqrt{1-\cos\gamma\sin(2f)}$$

так и (то же самое, но более наглядным способом) из полученного из той же теоремы косинусов выражения:

$$\cos\gamma = \frac{r^2-1}{r^2\sin(2f)},$$

нулевой полный дифференциал которого дает выражение для частной производной r по f, которое интегрируется как уравнение с разделяющимися переменными.

Не приводя здесь сами соответствующие громоздкие расчеты, приводящие к результату p=0.658, отметим ценность этой ошибки в методическом отношении, а именно привлечение к коррекции значений величины рассматриваемого косинуса не может повлиять на характер распределения точек-событий. Кроме того, в этой попытке не учтено, что точки могут располагаться неравномерно даже вдоль самих «изолиний».

Для уточнения этого следует просто учесть (в качестве фактора конформного преобразования) якобиан перехода от двух меньших сторон к соответствующим углам с частными производными:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a}, \frac{\partial\alpha}{\partial b}, \frac{\partial\beta}{\partial a}, \frac{\partial\beta}{\partial b}.$$

Для этого используем теорему синусов, формулу Герона для площади треугольника:

$$S = 0.25\sqrt{(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(b+1-a)}$$

и формулу для радиуса описанной окружности: $R=abc/(4S)$.

Применение якобиана перехода от координат длин сторон (a,b) к координатам соответствующих углов (α, β) в зонах острых (Ws) и тупых (Wt) углов: Ws=0.411; Wt=1.234.

$$p = \frac{Ws}{Ws + Wt}.$$

После громоздких расчетов выходим на искомую вероятность: p=0.25. Поскольку интегралы оказываются формально несобственными, при вычислениях сделано отсечение краев областей интегрирования по величине $d = 10^{-12}$, что несущественно.

Обсуждение результатов

Если сравнить данную работу с парадоксом Бертрана, то ее отличает переход к вероятностным пространствам с однородным распределением плотности точек-объектов. В парадоксе Бертрана за словесным понятием «хорда» скрываются различные вероятностные пространства (при «случайном конце» (а) отсутствуют параллельные хорды, при «случайном радиусе» (б) отсутствуют непараллельные хорды) с различной степенью однородности распределения плотности (строго говоря, лишь при «случайных центрах» (в); с другой стороны лишь при «случайном радиусе» (б) образуется равномерная закраска круга).

Путь от текстовой формулировки базового, основного условия задачи — в данной работе свойства «остроугольности» произвольного треугольника — до создания адекватной математической модели требует аккуратности, вдумчивости, порой глубокого исследования ее свойств.

На примере данной конкретной задачи этот этап заключается в выборе вероятностного пространства среди достаточно равноправных вариантов. В частности, для одномерных пространств (пп. I и II) следует отдать предпочтение использованию именно угла, а не его косинуса, содержащего нелинейное преобразование.

Ситуация еще более усложняется при использовании двумерных пространств двух меньших углов п. III,) а также двух меньших сторон треугольника (п. IV).

Контроль степени однородности заполнения этих пространств точками-событиями, не противоречащего текстовому условию исходной задачи, необходим и выводит на потребность перехода к однородному заполнению.

При этом поучительно, что такой переход нельзя осуществить «умозрительно» (например, с учетом структуры изоуровней плотности точек), а требуется использовать якобиан перехода в качестве своеобразного конформного преобразования.

Выводы

Проделанная работа демонстрирует, какую роль в решении задач теории вероятностей играет выбор вероятностных пространств. В работе показано, что умение выбирать различные вероятностные пространства с анализом их свойств позволяет согласовать кажущиеся различными решения и объяснить их трансформацию. Эти пространства могут иметь различную размерность, различные системы координат и допускать переходы от одного к другому. Важно заранее разобраться с равномерностью заполнения этих пространств точками-событиями, что необходимо для применения геометрического определения вероятности.

Литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Высшая школа, 2016. 415 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Москва: Наука, 2012. Т. 1, 2. 416 с.
3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Москва: Айрис пресс, 2019. 608 с.

Статья поступила в редакцию 09.02.2026; одобрена после рецензирования 25.02.2026; принята к публикации 16.03.2026.

ON SOLUTIONS OF A SIMPLE PROBLEM
IN VARIOUS PROBABILITY SPACES

Victor N. Assaul
PhD, Associate Professor,
Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
Bolshaya Morskaya ul. 67-A, Saint Petersburg 190000 Russia

Alexander V. Golovin
PhD, Senior Researcher,
Physics Department of Saint Petersburg State University,
Ulyanovskaya ul. 1, St. Petersburg 198504 Russia

Igor E. Pogodin
Double PhD, professor,
Naval Polytechnic Institute,
Razvodnaya st. 15, St. Petersburg 198510 Russia

Abstract. In order to explain the current educational problem of obtaining different answers in the same task, several ways of solving the well-known problem of estimating the probability of randomly selecting a right-angled triangle are considered. The problem is solved in various probability spaces: (i) the magnitude of the largest angle; (ii) the cosine of the largest angle, as well as using the theorem of cosines; (iii) the space of the triangle's two smaller angles; and (iv) its two smaller sides.

It is shown that the considered probability spaces, having different dimensions and different coordinate systems, allow transitions from one to another, resulting in a unique solution to the problem. To apply the geometric definition of probability, it is important to first analyze the uniformity of the filling of these spaces with event points, which is necessary for this method of determining probability.

A methodologically useful result is that "equalization" of the density of event points in a probability space cannot be achieved by any normalization to a differential measure of the subsets of constancy of the analyzed values themselves.

As one of the practical applications of the obtained results, the probability of changing the spatial orientation of an array of randomly located elements in the form of triangular prisms and tetrahedral pyramids on a solid surface under non-destructive compression is estimated to be 0.5.

Keywords: probability, random event, probability space, dimension, geometric definition, triangle, law of cosines, angle, side.

For citation

Assaul V. N., Golovin A. V., Pogodin I. E. On Solutions of a Simple Problem in Various Probability Spaces // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 1. P. 3–14.

The article was submitted 09.02.2026; approved after reviewing 25.02.2026; accepted for publication 16.03.2026.