# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.98
DOI: 10.18101/2304-5728-2026-1-53-62

## РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

**© Баргуев Сергей Гавриилович (Ганжурович)**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский институт инфокоммуникаций и информатики (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций
и информатики
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 152
barguev@yandex.ru

**© Ханхасаев Владислав Николаевич**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В;
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
hanhvladnick@mail.ru

**Аннотация.** В работе приведено решение начально-краевой задачи о колебаниях твердых тел на упругом стержне. Решение ищется в виде разложения смещения твердых тел в ряд по их амплитудам, смещение стержня — в ряд по собственным формам колебаний стержня с одним и тем же коэффициентом в виде временной функции. Показано, что временная функция есть линейная комбинация гармонических функций с аргументом, равным произведению частоты и времени, с постоянными коэффициентами, зависящими от амплитуд твердых тел, начальных условий и собственных частот механической системы. С учетом того, что форма колебаний стержня представляет собой линейную комбинацию амплитуд твердых тел, окончательное решение зависит от этих амплитуд. В настоящей работе установлена пропорциональность амплитуд твердых тел фиксированной амплитуде с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от частоты и параметров системы. В результате в решении амплитуды твердых тел сокращаются и остаются их коэффициенты пропорциональности. Кроме того, из введенных гильбертовых пространств с ортонормированными системами векторов выведены проверочные соотношения, позволяющие убедиться в адекватности полученных решений.

**Ключевые слова**: стержень, изгибные колебания, упруго закрепленные тела, собственные частоты, собственные формы, начально-краевая задача, гильбертово пространство.

**Для цитирования**
*Баргуев С. Г., Ханхасаев В. Н.* Решение начально-краевой задачи о колебаниях твердых тел на упругом стержне // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 1. С. 53–62.

## Введение

Стержни, балки, трубопроводы являются составными элементами многих конструкций в авиационной и космической технике, в водном и надводном транспорте, автомобильном и железнодорожном транспорте, зданиях и сооружениях, газонасосных и нефтепередающих станциях и т.п. Изгибные колебания таких элементов с получением частот и их форм колебаний изучены широко. В меньшей степени изучены колебания механических систем в виде этих элементов (стержней) с нагрузкой, закрепленной на них с помощью упругих связей. Наибольший практический интерес вызывает начально-краевая задача колебаний таких систем. В этом случае происходит перераспределение энергии между частями системы. В работах [1; 2] исследована такая задача, в которой смещение твердых тел раскладывается в ряд по их амплитудам, смещение стержня – в ряд по собственным формам колебаний стержня с одним и тем же коэффициентом в виде временной функции. После подстановки в гибридную систему дифференциальных уравнений и замены отношения второй производной от временной функции к самой временной функции на квадрат частоты со знаком минус, которое сводится к уравнению типа линейного осциллятора, получается несколько алгебраических, линейных относительно амплитуд твердых тел уравнений с коэффициентами, зависящими от частоты и параметров системы и одного уравнения четвертого порядка относительно форм колебаний. Решение линейного осциллятора есть линейная комбинация гармонических функций с аргументом, равным произведению частоты и времени с постоянными коэффициентами. Полученное соотношение ортогональности позволяет выразить неизвестные постоянные через амплитуды твердых тел и формы колебаний, частоты, параметров системы и начальных условий. В результате получено решение начально-краевой задачи, в которое в явном виде входят амплитуды твердых тел.

Целью настоящей работы является исключение амплитуд твердых тел в решении, а также вывод проверочных соотношений, вытекающих из введенных в [1] гильбертовых пространств, для установления адекватности полученных решений.

## 1 Постановка задачи

Приведем гибридную систему дифференциальных уравнений [1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 z_k}{dt^2} + p_k^2 (z_k - u(a_k, t)) = 0, \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^{n} e_k (z_k - u(x,t))\delta(x - a_k),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $z_k = z_k(t)$ — смещение твердых тел; $u = u(x,t)$ — поперечные смещения стержневых точек; $x$ — абсциссы этих точек стержня; $t$ — временная координата; $p_k^2 = \dfrac{c_k}{m_k}, b = \dfrac{EJ}{\rho F}, e_k = \dfrac{c_k}{\rho F}$; $m_k$ — масса $k$-го тела, $n$ — число твердых тел; $c_k$ — пружинные жесткости; $\rho$ — удельная стержневая плотность; $F$ — поперечное стержневое сечение (площадь); $E$ — модуль упругости; $J$ — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний, $a_k$ — точки закрепления пружин с твердыми телами; $\delta(x - a_k)$ — дельта-функция.

Система (1.1) описывает изгибные колебания упругого стержня с закрепленными на нем продольно твердыми телами с помощью пружинных связей.

Ищем решение системы (1) в виде рядов:

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) A_{ki}, k = 1,...,n, \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) V_i(x), \tag{1.3}$$

с заданными начальными условиями:

$$z_k(0) = z_{k0}, k = 1,2,...,n, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &z_k'(0) = z_{k0}', k = 1,2,...,n, \\ &u(x,0) = f_1(x), \\ &u_t(x,0) = f_2(x), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\varphi_i(t)$ — числовые функции от переменной $t$,

$A_{ki}$ — амплитудные значения колебания $k$-го тела по $i$-й частоте,

$V_i(x)$ — $i$-я собственная форма стержня.

Краевые условия на концах стержня:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,$$

где $l$ — длина стержня.

## 2 Решение начально-краевой задачи

Подставляя (1.2) и (1.3) в (1.1), с учетом замены $\frac{\varphi_i''}{\varphi_i} = -\omega_i^2$, приводящиеся к уравнению $\varphi_i'' + \omega_i^2 \varphi_i = 0$, с учетом примечания получим:

$$
\begin{aligned}
&-\omega_i^2 A_{1i} + p_1^2 (A_{1i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(a_1 - a_k) A_{ki}) = 0, \\
&-\omega_i^2 A_{2i} + p_2^2 (A_{2i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(a_2 - a_k) A_{ki}) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-\omega_i^2 A_{(n-1)i} + p_{(n-1)}^2 (A_{(n-1)i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(a_{n-1} - a_k) A_{ki}) = 0, \\
&-\omega_i^2 A_{ni} + p_n^2 (A_{ni} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(a_n - a_k) A_{ki}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Приравняв нулю в (2.1) определитель при неизвестных коэффициентах $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$, получаем уравнение на собственные частоты $\omega_i$.

Считая собственные частоты найденными, находим коэффициенты $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$ следующим образом.

Из первых $n-1$ уравнений системы (2.1) выражаем амплитуды $A_{2i}, \ldots, A_{ni}$ через амплитуду $A_{1i}$;

$$A_{ki} = A_{1i} g_{ki}, \ k = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.2}$$

где $g_{ki} = \begin{cases} 1, k = 1 \\ \beta_{ki}, k > 1 \end{cases}$, величина $\beta_{ki}$ зависит от номера $k$, частоты $\omega_i$ и параметров механической системы.

Тогда собственные формы примут вид:

$$V_i(x) = A_{1i} \alpha_i(x) \ , \tag{2.3}$$

где $\alpha_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(x - a_k) g_{ki}$.

**Примечание.** $V_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{ki}(x) A_{ki}$, где $\tilde{V}_{ki}(x) = \frac{e_k \omega_i^2}{p_k^2} \bar{V}_{ki}(x - a_k)$, а $\bar{V}_{ki}(x)$ — решения краевых задач:

$$-\omega^2\bar{V}\left(x\right)+b\frac{d^4\bar{V}\left(x\right)}{dx^4}=\delta\left(x\right),$$
$$\bar{V}\left(-a_k\right)=\bar{V}\left(l-a_k\right)=0,$$
$$\frac{d\bar{V}}{dx}\left(-a_k\right)=\frac{d\bar{V}}{dx}\left(l-a_k\right)=0,$$
$$k=1,2,...,n$$

Как указано в пункте (1), обобщенное решение системы (1.1) ищется в виде:

$$z_k=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)A_{ki}, k=1,...,n;\ u(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)V_i(x)\ , \tag{2.4}$$

где $\varphi_i(t)$ — неизвестная функция, $A_{ki}$ — неизвестные коэффициенты, $V_i(x)$ — заданные формы собственных колебаний стержня.

Согласно [1] функция $\varphi_i(t)$ определяется выражением

$$\varphi_i(t)=A_i\sin\omega_i t+B_i\cos\omega_i t\ ,$$

где $\omega_i$ — заданная собственная частота.

Определяем $A_i, B_i$ через $\varphi_i(0)$ и $\varphi_{ti}(0)$ таким образом:

$$A_i=\frac{\varphi_{tio}}{\omega_i}, B_i=\varphi_{i0}\,.$$

В результате:

$$\varphi_i(t)=\frac{\varphi_{ti}(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t+\varphi_i(0)\cos\omega_i t\ , \tag{2.5}$$

где $$\varphi_i(0)=\frac{\int_0^l f_1(x)V_i(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k z_{k0}A_{ki}}{p_k^2}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k A_{ki}A_{ki}}{p_k^2}}\ ,$$

$$\varphi_{ti}(0)=\frac{\int_0^l f_2(x)V_i(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k z_{tk0}A_{ki}}{p_k^2}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k A_{ki}A_{ki}}{p_k^2}}\,.$$

Эти начальные значения получены путем применения к (1.2) и (1.3) условия типа ортогональности

$$\int_0^\ell V_i(x)V_j(x)dx+\sum_{k=1}^n \frac{e_k}{p_k^2}A_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0,\ i\neq j\\ \int_0^\ell V_i^2(x)dx+\sum_{k=1}^n \frac{e_k}{p_k^2}A_{ki}^2, i=j\end{cases}.$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем решение системы (1.1):

$$z_k(t)=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l f_2(x)V_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{tk0}}{p_k^2}A_{ki}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(A_{ki})^2}A_{ki}\sin\omega_i t+$$
$$+\frac{\int_0^l f_1(x)V_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{k0}}{p_k^2}A_{ki}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(A_{ki})^2}A_{ki}\cos\omega_i t\Big), \tag{2.6}$$

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l f_2(x)V_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{tk0}}{p_k^2}A_{ki}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(A_{ki})^2}V_i(x)\sin\omega_i t+$$
$$+\frac{\int_0^l f_1(x)V_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{k0}}{p_k^2}A_{ki}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(A_{ki})^2}V_i(x)\cos\omega_i t\Big). \tag{2.7}$$

Преобразуем эти решения в соответствии с (2.2) и (2.3):

$$z_k(t)=\sum_{i=1}^m\Big(\frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l f_2(x)\alpha_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{tk0}}{p_k^2}g_{ki}}{\int_0^l \alpha_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(g_{ki})^2}g_{ki}\sin\omega_i t+$$
$$+\frac{\int_0^l f_1(x)\alpha_i(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k z_{k0}}{p_k^2}g_{ki}}{\int_0^l V_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\frac{e_k}{p_k^2}(g_{ki})^2}g_{ki}\cos\omega_i t\Big),$$

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{\omega_i}\frac{\int_0^l f_2(x)\alpha_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_k z_{tk0}}{p_k^2}g_{ki}}{\int_0^l \alpha_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_k}{p_k^2}(g_{ki})^2}\alpha_i(x)\sin\omega_i t+$$

$$+\frac{\int_0^l f_1(x)\alpha_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_k z_{k0}}{p_k^2}g_{ki}}{\int_0^l \alpha_i^2(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{e_k}{p_k^2}(g_{ki})^2}\alpha_i(x)\cos\omega_i t\Big).$$

### 3 Проверочные соотношения

Рассмотрим введенные в работе [1] гильбертовы пространства с ортонормированным базисом:

$$\bar{e}_i=\begin{pmatrix}\dfrac{A_i^1}{\sqrt{\dfrac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2+\ldots+\dfrac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2+(V_i,V_i)}}\\ \ldots \\ \dfrac{A_i^n}{\sqrt{\dfrac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2+\ldots+\dfrac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2+(V_i,V_i)}}\\ \dfrac{V_i(x)}{\sqrt{\dfrac{e_1}{p_1^2}(A_i^1)^2+\ldots+\dfrac{e_n}{p_n^2}(A_i^n)^2+(V_i,V_i)}}\end{pmatrix}.$$

Разложим векторы $\begin{pmatrix} z_1(0)\\ \ldots \\ z_n(0)\\ u(x,0)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} z_{1t}(0)\\ \ldots \\ z_{nt}(0)\\ u_t(x,0)\end{pmatrix}$ в ряды Фурье по указанному ортонормированному базису:

$$\begin{pmatrix} z_1(0) \\ \dots \\ z_n(0) \\ u(x,0) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(0)\bar{e}_j\ , \quad \begin{pmatrix} z_{1t}(0) \\ \dots \\ z_{nt}(0) \\ u_t(x,0) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} a'_j(0)\bar{e}_j\ . \tag{3.1}$$

Коэффициенты Фурье $a_{ij}(0)$ и $a'_{ij}(0)$ имеют вид:

$$a_j(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0)A_j^n + (u(x,0),V_j(x))}{\sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)}},$$

$$a'_j(0) = \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0)A_j^n + (u_t(x,0),V_j(x))}{\sqrt{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)}}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) вытекает, что:

$$z_k(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0)A_j^n + (u(x,0),V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)} A_j^k\ , \tag{3.3}$$

$$z_{kt}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0)A_j^n + (u_t(x,0),V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)} A_j^k, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_1(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_n(0)A_j^n + (u(x,0),V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)} V_j(x), \tag{3.5}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{e_1}{p_1^2} z_{1t}(0)A_j^1 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2} z_{nt}(0)A_j^n + (u_t(x,0),V_j(x))}{\frac{e_1}{p_1^2}(A_j^1)^2 + \dots + \frac{e_n}{p_n^2}(A_j^n)^2 + (V_j,V_j)} V_j(x). \tag{3.6}$$

Если подставить в выражения (2.6), (2.7) и их производные значение $t = 0$ при $m = \infty$, то получим проверочные соотношения, что свидетельствует о достоверности полученных решений.

## Заключение

В работе установлена пропорциональность амплитуд твердых тел фиксированной амплитуде с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от частоты и параметров системы. В результате в решении, полученном в [1], амплитуды твердых тел исключаются и остаются их коэффициенты пропорциональности. Кроме того, из введенных гильбертовых пространств с ортонормированными системами векторов выведены проверочные соотношения, позволяющие убедиться в адекватности полученных решений.

## Литература

1. Баргуев С. Г., Ханхасаев В. Н. О колебаниях нескольких твердых тел, закрепленных на упругом стержне, с учетом начальных условий // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 38–50.

2. Barguev S. G., Khankhasaev V. N., Bairov S. A. Existence and Uniqueness of a Generalized Solution to the Initial-Boundary Value Problem Describing Oscillations of Hybrid System Consisting of Elastic Rod with Attached Rigid Body. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024; 284 (2): 196–215.

*Статья поступила в редакцию 05.02.2026; одобрена после рецензирования 25.02.2026; принята к публикации 16.03.2026.*

SOLUTION TO THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM OF OSCILLATIONS OF RIGID BODIES ON AN ELASTIC ROD

*Sergei G. Barguev*
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Buryat Institute of Infocommunications and Informatics (branch) of
Siberian State University of Telecommunications and Informatics,
Russia, 670031, Ulan-Ude, Trubacheev St., 152

*Vladislav N. Khankhasaev*
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of Department of Mathematics named after Ts.B. Shoinzhurov,
East Siberian State University of Technology and Management, Russia, Ulan-Ude,
670033, Klyuchevskaya St., 40B, Bldg. 1
Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics,
Buryat State University,
Russia, Ulan-Ude, 670000, Smolina St., Bldg. 24a

*Abstract*. The paper presents a solution to the initial-boundary value problem for the vibrations of rigid bodies on an elastic rod. The solution is sought as a series expansion of the rigid body displacements in terms of their amplitudes, and the rod displacement is expanded in terms of the rod's natural vibration modes with the same coefficient, expressed as a time function. It is shown that the time function is a linear combination of harmonic functions with an argument equal to the product of frequency and time, with constant coefficients depending on the rigid body amplitudes, the initial conditions, and the natural frequencies of the mechanical system. Given that the rod's vibration mode is a linear combination of the rigid body amplitudes, the final solution depends on these amplitudes. In this paper, we establish the proportionality of rigid body amplitudes to a fixed amplitude with a proportionality coefficient dependent only on the frequency and parameters of the system. As a result, the rigid body amplitudes in the solution cancel out, leaving only their proportionality coefficients. Furthermore, verification relations are derived from the introduced Hilbert spaces with orthonormal vector systems, allowing us to verify the adequacy of the obtained solutions.

*Keywords:* rod, bending vibrations, elastically fixed bodies, natural frequencies, natural modes, initial-boundary value problem, Hilbert space.

*For citation*

*Barguev S. G., Khankhasaev V. N.* Solution to the Initial-Boundary Value Problem of Oscillations of Rigid Bodies on an Elastic Rod // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 1. P. 53–62.

*The article was submitted 05.02.2026; approved after reviewing 25.02.2026; accepted for publication 16.03.2026.*