ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.948
doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-25-31

© Г. А. Шишкин

Линейные краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа

Используя новую модификацию функции гибкой структуры в статье исследуется возможность решения краевых задач уравнений нейтрального типа.

Ключевые слова: краевая задача, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, разрешающее уравнение, функция гибкой структуры, нейтральный тип уравнений.

© G. A. Shishkin

The linear boundary value problems of Volterra integer-differential equations of neutral type

Using new updating of function of flexible structure in article possibilities of the decision of boundary value problems of the linear equations of neutral type is investigated.

Keywords: the boundary value problem, the Volterra integer-differential equations, function of the flexible structure, neutral type of the equations.

Введение

Н.К. Куликов и многие его ученики и последователи применяли функцию гибкой структуры для решения начальных задач дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с обыкновенным аргументом. Выпишем её общий вид и дадим информацию о входящих в неё функциях и постоянных

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1}[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i} + \\ + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt] + \delta_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x)), \qquad (*)$$

где $i=\overline{0,n}$, $D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_1, r_2, \dots, r_n$, которые определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения. Определители $\Delta_s(x-t), s=\overline{1,n}$ получаются из определителя D заменой s-ой строки строкой $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \ldots, \exp r_n(x-t)$, $\mu(x)$ – новая неизвестная функция и $\delta_n = 1$, $\delta_i = 0$ $\forall i = \overline{0, n-1}$.

Так как любую непрерывную n раз дифференцируемую функцию можно представить в виде функции с гибкой структурой [2]-[3], то преобразования, выполненные с её помощью, приведут к разрешающему интегральному уравнению эквивалентному первоначально поставленной задаче. За счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры можно получать решения в замкнутой форме, а если это не удается, то ускорять процесс приближенного решения и влиять на объем вычислений.

Параметры в определителе D могут быть и равными, в этом случае пределы выражений $D^{-1} \dfrac{\partial^i \Delta_s (u_j(x) - t)}{\partial x^i}$ имеют вполне определенные значения, вычисляемые по правилу Лопиталя.

Так как функция гибкой структуры содержит начальные условия, то её применение к решению краевых задач напрямую невозможно. Поэтому в работе [4] используя значения функции гибкой структуры (*) и её производных в точках краевых условий x_0, x_1 и подставив эти значения в краевые условия, получена система уравнений, разрешив которую найдены выражения для начальных значений $y^{(i)}(x_0)$ $i = \overline{0, n-1}$.

Подставив эти выражения $y^{(i)}(x_0)$ $i = \overline{0, n-1}$ в функцию гибкой структуры (*), получена другая модификация функции гибкой структуры для решения краевых задач. В работе [5] эта новая форма применена для решения краевых задач уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа и в работе [6] для решения уравнений одного вида нейтрального типа.

В данной работе исследуем вопрос о возможности аналогичных преобразований линейной краевой задачи для другого более общего вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. Определение типов уравнений дано в соответствии с классификацией, приведённой для интегро-дифференциальных уравнений в работе [1].

Постановка задачи и её решение

Рассмотрим общий вид одного класса интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа с функциональными запаздываниями

$$y^{(n)}(u_l(x)) + \sum_{j=0}^{l} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x \sum_{i=0}^{n} K_{ij}(x,\eta) y^{(i)}(u_j(\eta)) d\eta \right] = f(x), \quad (1)$$

где $u_0(x) \equiv x,\ u_j(x) \le x \quad \forall j = \overline{1,l}$ и $u_j(x) \not\equiv x$, функции $f_{ij}(x),\ u_j(x)$ и $f(x)$ – непрерывны, ядра $K_{ij}(x,\eta)$ регулярны в квадрате $a \le x,\eta \le b$.

Определим линейные двухточечные краевые условия для уравнения (1)

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau,\ \tau = \overline{0,n-1},\ a \le x_0 < x_1 \le b. \quad (2)$$

Выпишем начальные функции в стандартной форме для краевых задач с запаздывающим аргументом

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i = \overline{0,n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (3)$$

где $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^{l} E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ – множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \le x$ при $x \ge x_0 \quad \forall j = \overline{1,l}$, а $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$.

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, будем искать её решение на отрезке $x \in [x_0, b]$. Применив новую модификацию функции гибкой структуры, полученную для решения краевых задач в работе [4]

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \delta_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x)) + D^{-1}\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{\partial x^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}[\gamma_\tau -$$

$$-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^{\,k}}\mu(t)dt] + \int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt\}. \quad (4)$$

Здесь $i = \overline{0,n}$, $\gamma_n = 1$, $\gamma_i = 0 \quad \forall i = \overline{0,n-1},\ j = \overline{0,l}$ и ω – главный определитель системы, полученной при отыскании выражений начальных значений с использованием краевых условий (2)

$$\omega = \det\left[\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau}D^{-1}\Delta_{i+1}^{(i)}(x_1 - x_0)\right],\ i,\tau = \overline{0,n-1}, \quad (5)$$

а $\omega_{i\tau}$ – алгебраические дополнения к элементам главного определителя.

В формуле (4) сохранены обозначения Н.К. Куликова [2]-[3] для определителя D. $D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_1, r_2, \dots, r_n$, которые определяются в ходе решения задачи, исходя из оптимальности ее решения. Определители $\Delta_s(x-t), s = \overline{1,n}$ получаются из определителя D заменой s-ой строки строкой $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \dots, \exp r_n(x-t)$ и $\mu(x)$ – новая неизвестная функция.

Обозначим через c_j наименьшие из корней уравнений $u_j(x) = x_0$ на отрезке $x \in [x_0, b]$, если же таковых нет, то полагаем соответствующие $c_j = b$. Далее разобьём интегралы в уравнении (1) на суммы от известных и неизвестных частей в выражениях от запаздываний в соответствии с (3), считая при этом $y^{(n)}(u_j(x)) = y^{(n-1)}(x_0)\varphi^{(n)}(u_j(x))$.

При построении разрешающего уравнения поставленной краевой задачи с помощью новой модификации функции гибкой структуры и её производных (4), как и для уравнений запаздывающего типа, могут возникнуть три возможные ситуации:

1. $x_0 < x_1 \le c_j \quad \forall j = \overline{0,l}$; **2**. $x_0 < c_j \le x_1 \quad \forall j = \overline{0,l}$; **3**. x_1 таково, что $\exists j = \overline{0,l}$, что для некоторых выполняется $x_0 < x_1 \le c_j$ и для других $x_0 < c_j \le x_1$.

Первый случай наиболее простой, он напрямую сводится к решению задачи Коши.

Во втором и третьем случаях разбиваем интегралы в уравнении (1) на сумму в соответствии с определившимися начальными множествами $E^j_{x_0}$. Подставим функцию гибкой структуры и ее производные (4), полученные для краевой задачи, в уравнение (1), выделяя при этом известные и неизвестные выражения под знаком интеграла. Затем, проведя преобразования выражений под знаками интегралов, содержащих неизвестную функцию $\mu(x)$, заменив переменную η на t и сменив порядок интегрирования в двойных интегралах, получим разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с запаздывающим аргументом

$$u_l'^{n}(\mathrm{x})\mu(u_l(x)) + \int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t)\mu(t)dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x,t)\mu(t)\,dt\} = F(x). \quad (6)$$

Для ядер $G_j(x,t)$, $H_j(x,t)$ и свободной функции $F(x)$ получены определённые формулы. Уравнение (6) легко преобразуется к уравнению с обыкновенным аргументом, если ввести новую переменную $z = u_l(x)$. Тогда $x = u_l^{-1}(z)$ – обратная функция для функции $u_l(x)$.

Далее, поделив разрешающее уравнение (6) на $u_l'^{n}(x) \ne 0$, введя новые обозначения для известных функций и ядер

$$T_j(z,t) = u_l'^{(-n)}(u_l^{-1}(z))G_j(u_l^{-1}(z),t), \qquad Q_j(z,t) = u_l'^{(-n)}(z)H_j(u_l^{-1}(z),t),$$

$R(z) = u_l'^{(-n)}(z)F(u_l^{-1}(z))$, $v_j(z) = u_j(u_l^{-1}(z))$, получим разрешающее интегральное уравнение Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{x_1} T_j(z,t)\mu(t)dt + \lambda \int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)\,dt\right] = R(z). \quad (7)$$

Пример. Найти решение краевой задачи для уравнения первого порядка нейтрального типа

$$4y'(\frac{x}{2})+2\int_0^x (x-\eta)y'(\eta)d\eta = x^2+2$$

с краевыми условиями

$$3y(0)+y(1)=1$$

и начальными функциями

$$\text{y}(x)=y(0), \quad y(\frac{x}{2})=y(0),$$

заданными на начальном множестве.

Решение. В данной краевой задаче $x_0=0,\ x_1=1,\quad u_0(x)\equiv x,$ $u_1(x)=\frac{x}{2},\ c_0=0,\ c_1=0,\ E_{x_0}=[0]$. Так как начальное множество состоит из одной точки, совпадающей со значением нижнего предела интегрирования, то начальные функции на значения интеграла влиять не будут.

Выпишем функцию гибкой структуры по формулам (*) и её значение для $y(x_1)$ при значении $i=0$, учитывая условия данной краевой задачи

$$y(x)=y(0)e^{rx}+\int_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt, \quad y(1)=y(0)e^{r}+\int_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt.$$

Можно воспользоваться и формулой (4) данной работы, но применение этой формулы, выведенной для общего случая, усложнит выкладки, поэтому повторим на примере её вывод.

Подставив полученное выражение для $y(x_1)$ при $x_1=1$ в краевые условия задачи найдём

$$y(0)=\frac{1}{3+e^r}-\frac{1}{3+e^r}\int_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt\,.$$

Затем, подставив это выражение для $y(0)$ в функцию гибкой структуры, найдём её выражение в соответствии с условиями данной краевой задачи

$$y(x)=\frac{e^{rx}}{3+e^r}-\frac{e^{rx}}{3+e^r}\int_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt+\int_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt \quad \text{и}$$

$$y(\frac{x}{2})=\frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r}-\frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r}\int_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt+\int_0^{\frac{x}{2}} e^{r(\frac{x}{2}-t)}\mu(t)dt,$$

$$y'(\frac{x}{2})=\frac{r}{2}\frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r}-\frac{r}{2}\frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r}\int_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt+\frac{r}{2}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{r(\frac{x}{2}-t)}\mu(t)dt+\frac{1}{2}\mu(\frac{x}{2}).$$

С целью сокращения объёма выкладок положим $r = 0$, тогда выражения функции гибкой структуры и её производных для данной краевой задачи упростятся

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \mu(t)dt + \int_0^x \mu(t)dt \quad \text{и} \quad y(\frac{x}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \mu(t)dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t)dt,$$

$$y'(x) = \mu(x), \quad y'(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\mu(\frac{x}{2}).$$

Подставив эти выражения функции гибкой структуры и её производных для данной краевой задачи в исходное уравнение, получим разрешающее уравнение

$$\mu(\frac{x}{2}) + \int_0^x (x-t)\mu(t)dt = \frac{x^2}{2} + 1$$

с единственным решением $\mu(x) = 1$. И, подставив это значение $\mu(t) = 1$ в выражение функции гибкой структуры данной задачи, найдем её решение $y = x$. Нетрудно проверить, что все условия краевой задачи выполняются.

Заключение

В журнальной литературе имеются работы, которые затрагивают многие вопросы решения интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы поднимали и решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевой задачи одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа. Для всех уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры этот вопрос решён положительно в работе [3]. Для уравнений нейтрального и опережающего типов такое преобразование возможно только для некоторых классов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение её точного или приближённого решений за счёт оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

Литература

1. Громова П. С. Некоторые вопросы качественной теории интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М., 1967. — Т. 5. — С. 61 – 76.

2. Куликов Н. К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1964. — 207 с.

3. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. — М.,1974. — С. 47 – 57.

4. Шишкин Г. А. Функция гибкой структуры и её модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием // Вестник БГУ. — 2013. — Вып. 9. — С. 144 – 147.

5. Шишкин Г. А. Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа // Вестник БГУ. — 2014. — Вып. 9(2). — С. 85 – 88.

6. Шишкин Г. А. Краевая задача одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа // Вестник БГУ. — 2014. — Вып. 2. — С. 67 – 70.

References

1. Gromova P. S. Nekotorye voprosy kachestvennoj teorii integro-differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom // Trudy seminara po teorii differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja ar-gumentom. — M., 1967. — T. 5. — S. 61 – 76.

2. Kulikov N. K. Inzhenernyj metod reshenija i issledovanija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. — M.: Vysshaja shkola, 1964. — 207 s.

3. Kulikov N. K. Reshenie i issledovanie obyknovennyh differen-cial'nyh uravnenij na osnove funkcij s gibkoj strukturoj // Tematiche-skij sb. MTIPP. — M.,1974. — S.47 – 57.

4. Shishkin G. A. Funkcija gibkoj struktury i ejo modifikacija pri reshenii kraevyh zadach dlja uravnenij s funkcional'nym zapazdyvani-em // Vestnik BGU. — 2013. — Vyp. 9. — S. 144 – 147.

5. Shishkin G. A. Kraevye zadachi integrodifferencial'nyh uravne-nij Vol'terra zapazdyvajushhego tipa // Vestnik BGU. — 2014. — Vyp. 9(2). — S. 85 – 88.

6. Shishkin G. A. Kraevaja zadacha odnogo vida integrodifferenci-al'nyh uravnenij Vol'terra nejtral'nogo tipa // Vestnik BGU. — 2014. — Vyp. 2. — S. 67– 70.

Шишкин Геннадий Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики Бурятского государственного университета.

Shishkin Gennady Aleksandrovich, PhD in Physics and Mathematics, A/Professor, applied mathematics department, Buryat State University.