

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 621.372.823:537.622.6
doi: 10.18101/2304-5728-2016-2-85-90

© *Г. Б. Итигилов, Д. Ш. Ширанов, В. И. Сажин*

Уравнения Гельмгольца электромагнитных волн в гиперболически намагниченных гиротропных эллиптических волноводах

Получены обобщенные уравнения Гельмгольца электромагнитных волн в регулярных волноводах с ортогональными формами поперечного сечения, заполненных намагниченным ферритом (гиротропной средой). Рассматривается один из двух случаев поперечного намагничивания феррита, когда направление распространения электромагнитной волны и направление внешнего намагничивающего постоянного магнитного поля перпендикулярны, а именно – нормальное намагничивание. Математической основой является модифицированный метод инвариантных преобразований, позволяющий легко осуществить переход к любому регулярному волноводу с прямолинейной и криволинейной ортогональной формой поперечного сечения: прямоугольному, круглому, эллиптическому. На базе полученных выражений впервые выведены уравнения Гельмгольца для наименее исследованных гиротропных эллиптических волноводов при нормальном (гиперболическом) намагничивании. Представленные уравнения Гельмгольца позволяют поставить и решить краевую задачу эллиптического волновода при гиперболическом намагничивании с дальнейшим получением дисперсионного уравнения.

Ключевые слова: произвольное намагничивание, тензор магнитной проницаемости феррита, поперечные компоненты электромагнитной волны, коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля.

© *G. B. Itigilov, D. Sh. Shirapov, V. I. Sazhin*

Helmholtz equations of electromagnetic waves in hyperbolic the magnetized gyrotropic elliptic wave guides

The generalized equations of Helmholtz of electromagnetic waves in the regular wave guides with orthogonal forms of a transverse section filled with the magnetized ferrite (the gyrotropic environment) are received. One of two cases of cross magnetization of ferrite when the direction distribution of electromagnetic wave and the direction of the outside magnetizing constant magnetic field are perpendicular is considered, namely – normal magnetization. A mathematical basis is the modified method of invariant conversions allowing to realize easily transition to any regular wave guide with the rectilinear and curvilinear orthogonal form of a transverse section: rectangular, round, elliptic.

On the basis of the received expressions Helmholtz equations for the least probed gyrotropic elliptic wave guides for the first time are removed in case of normal (hyperbolic) magnetization. The provided Helmholtz equations allow to deliver and solve a boundary value problem of an elliptic wave guide in case of hyperbolic magnetization with further receiving the dispersing equation.

Keywords: the arbitrary magnetization, tensor of magnetic conductivity of ferrite, cross components of an electromagnetic wave, coefficients of Lamé, symbols of Christoffel.

Введение

При разработке различных приборов сверхвысокочастотного диапазона (гираторы, циркуляторы, фазовращатели, ослабители и другие) широко применяются намагниченные ферриты [1, 2]. Феррит при этом может быть намагничен продольно, когда направления распространения электромагнитной волны и намагниченности феррита совпадают, или поперечно, когда они перпендикулярны. В большинстве случаев рассматриваются гиротропные волноводы с круглой и прямоугольной формой поперечного сечения [1-3]. В указанных и в других работах анализ гиротропных эллиптических волноводах носит фрагментарный характер или ограничиваются изотропным случаем.

Целью настоящей работы является получение уравнений Гельмгольца HE и EH волн гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при нормальном намагничивании и на их основе переход к гиротропному эллиптическому волноводу при гиперболическом (нормальном) намагничивании.

1. Уравнения Гельмгольца HE-волн

В [4] было получено общее выражение, позволяющие вывести уравнения Гельмгольца HE-волны для гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании:

$$\Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + j\gamma(\delta_1H_1 + \delta_2H_2) - j\omega^2\epsilon lH_1 - j\omega^2\epsilon mH_2 + \omega^2\epsilon\mu_{33}H_Z = 0, \quad (1)$$

где
$$\Delta_{11} = \delta_1\nabla_1 = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial q_1}; \delta_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2 \right);$$

$$\Delta_{22} = \delta_2\nabla_2 = \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial q_2}; \delta_2 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1 \right); \nabla_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i};$$

$H_3 = H_Z$ – продольная, H_1 и H_2 – поперечные компоненты магнитного поля; j – мнимая единица; γ – постоянная распространения; h_1, h_2 – коэффициенты Ламэ; q_1, q_2 – обобщенные поперечные координаты; $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2$ – символы Кристоффеля; ω – циклическая частота; ϵ – диэлектрическая проницаемость феррита, l, m, μ_{33} – компоненты тензора

магнитной проницаемости феррита.

Тензор магнитной проницаемости феррита при произвольном намагничивании можно записать в виде [5]:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, k, l, m$ – компоненты тензора.

При нормальном намагничивании компоненты тензора магнитной проницаемости феррита примут вид:

$$\mu_{11} = \mu_{\parallel}; \mu_{22} = \mu_{33} = \mu; k = l = 0; m \neq 0. \quad (3)$$

Тогда выражение (1) с учетом условий (3) примет вид:

$$\Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + j\gamma(\delta_1H_1 + \delta_2H_2) - j\omega^2\epsilon mH_2 + \omega^2\epsilon\mu H_Z = 0. \quad (4)$$

Поперечные компоненты электромагнитных волн в гиротропных волноводах с ортогональной формой поперечного сечения при нормальном намагничивании имеет вид [4]:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \nabla_1 E_Z + \frac{w\mu}{\gamma} \left(\nabla_2 + \frac{m}{\mu} \gamma \right) H_Z \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_Z - \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \nabla_1 H_Z \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\epsilon}{\gamma} \nabla_2 E_Z - \nabla_1 H_Z \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \frac{w\epsilon}{\gamma} \nabla_1 E_Z + \left(\nabla_2 + \frac{w^2\epsilon m}{\gamma} \right) H_Z \right\}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\nabla_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$, $i=1,2$; E_1, E_2 – поперечные компоненты электрического поля; $E_3 = E_Z$ – продольная компонента электрического поля; $a^2 = w^2\epsilon\mu_{\parallel} - \gamma^2$; $b^2 = w^2\epsilon\mu - \gamma^2$.

Подставив в формулу (4) выражения для поперечных компонент H_1 и H_2 из системы (5) получим уравнение Гельмгольца НЕ-волн для гиротропных волноводов с ортогональной формой поперечного сечения при нормальном намагничивании:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \frac{b^2}{a^2} \Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + \left(c^2 + \frac{m}{\mu} \gamma \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \right) H_Z = \\ & = \frac{\gamma}{\omega\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \Delta_{12}E_Z + \frac{\omega\epsilon m}{\mu} \nabla_1 E_Z, \end{aligned} \quad (6)$$

где $c^2 = \omega^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - m^2}{\mu} - \gamma^2$; $\Delta_{12} = \delta_1 \nabla_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2}$.

Коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля, дифференциальные операторы I-го и II-го порядков для эллиптических волноводов имеют вид [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = h_2 = ed; \quad h_3 = h_Z = 1; \quad \nabla_1 = \frac{1}{ed} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \nabla_2 = \frac{1}{ed} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\ \delta_1 = \frac{1}{ed} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{Sh2\xi}{2d^2} \right); \quad \delta_2 = \frac{1}{ed} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{2d^2} \right); \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{Sin2\varphi}{2d^2}; \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1 = \frac{Sh2\xi}{2d^2}; \\ \Delta_{11} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \quad \Delta_{22} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad \Delta_{12} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где $q_1 = \xi$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = Z$ – координатные линии эллиптической системы координат; e – фокус эллипса; $d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi$.

Подставив выражение (7) в формулу (6) получим уравнение Гельмгольца НЕ-волн гиротропного эллиптического волновода при гиперболическом намагничивании:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{||}}{\mu} \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left(c^2 + \frac{m}{\mu} \gamma \frac{\sin 2\varphi}{2ed^3} \right) H_Z = \\ & = \frac{\gamma}{w\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi \partial \varphi} + ed \frac{w\epsilon m}{\mu} \frac{\partial E_Z}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{11} - \gamma^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{||} - \gamma^2$; $b^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{22} - \gamma^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \gamma^2$;

$c^2 = \omega^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - m^2}{\mu} - \gamma^2$.

2. Уравнения Гельмгольца ЕН-волн

Общие выражения, позволяющие вывести уравнения Гельмгольца ЕН-волны для гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании [4]:

$$\begin{aligned} & \mu_{11} \Delta_{11} E_Z + \mu_{22} \Delta_{22} E_Z + j\gamma (\mu_{11} \delta_1 E_1 + \mu_{22} \delta_2 E_2) + \omega (\mu_{11} m \delta_1 - \mu_{22} l \delta_2) H_Z + \\ & + \gamma k \omega (-l H_1 - m H_2 - j \mu_{33} H_Z) - \omega^2 \varepsilon (k^2 - \mu_{11} \mu_{22}) E_Z + \\ & + j\omega (lk \delta_1 + mk \delta_2) H_Z = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) для случая нормального намагничивания с учетом условий (3) примет вид:

$$\mu_{||} \Delta_{11} E_Z + \mu \Delta_{22} E_Z + j\gamma (\mu_{||} \delta_1 E_1 + \mu \delta_2 E_2) + \omega \mu_{||} m \delta_1 H_Z + \omega^2 \varepsilon \mu_{||} \mu E_Z = 0. \quad (10)$$

Подставив в формулу (10) выражения для поперечных компонент E_1 и E_2 из системы (5) получим уравнение Гельмгольца ЕН-волн для гиротропных волноводов с ортогональной формой поперечного сечения при нормальном намагничивании:

$$\Delta_{11}E_z + \frac{b^2}{a^2}\Delta_{22}E_z + b^2E_z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \frac{b^2 - a^2}{a^2}\Delta_{12}H_z - \omega m\delta_1 H_z. \quad (11)$$

Подставив выражение (7) в формулу (11) получим уравнение Гельмгольца ЕН-волн гиротропного эллиптического волновода при гиперболическом намагничивании:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + b^2 e^2 d^2 E_z &= \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi \partial \varphi} - \\ - \omega m e d \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{sh 2\xi}{2d^2} \right) H_z. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Заключение

Впервые получены для гиротропных эллиптических волноводов при гиперболическом намагничивании уравнения Гельмгольца для НЕ-волны (8) и ЕН-волны (12). Полученные уравнения позволяют поставить и решить краевую задачу с последующим выводом дисперсионных уравнений для анализа особенностей распространения электромагнитных волн в указанных волноводах. Результаты дисперсионного анализа имеют большой практический интерес для построения различных приборов сверхвысоко-частотного диапазона.

Литература

1. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. — Л.: Госэнергоиздат, 1963. — 664 с.
2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994. — 464 с.
3. Раевский С. Б., Седаков А. Ю., Титаренко А. А. Метод электродинамического расчета прямоугольных закрытых волноводов с произвольным анизотропным заполнением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2012. — Т. 15, №3. — С.14 – 21.
4. Итигилов Г. Б. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях произвольной формы // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Бурятский государственный университет. — Улан-Удэ, 2014. — 146 с.
5. Неганов В. А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайневых частот. — М.: Педагогика-Пресс, 1998. — 328 с.

References

1. Mikaelyan A. L. The theory and application of ferrite at microwave frequencies. — M.-L.: State Power Press, 1963. — 664 s.
2. Gurevich A. G., Melkov G. A. Magnetic of fluctuation and waves. — M.: Fizmatlit, 1994. — 464 s.
3. Rajevski S. B., Sedakov A. Yu., Titarenko A. A. Electrodynamic method of calculating the rectangular closed waveguides with arbitrary anisotropic filling // Physics of wave processes and radio engineering systems. — 2012. — Т. 15, No. 3. — S. 14 – 21.
4. Itigilov G. B. Mathematical model operation of propagation of electromagnetic waves in restricted gyrotropic areas of the arbitrary form // Dissertation for the degree of candidate of technical sciences. — Buryat State University. — Ulan-Ude, 2014. — 146 p.
5. Neganov V. A., Nefedov E. I., Yarovoi G. P. Modern methods of designing of lines of transfers and resonators microwave and optical frequencies. — M.: Pedagogika-Press, 1998. — 328 s.

Итигилов Гарма Борисович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: gablz@mail.ru.

Ширапов Дашадондок Шагдарович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: shir48@mail.ru.

Сажин Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Радиофизика и радиоэлектроника» Иркутского государственного университета, e-mail: sazhin@physdep.isu.ru.

Itigilov Garma Borisovich, PhD in Engineering, associate professor of the department “Electronic computer systems” of East Siberian State University of Technology and Management.

Shirapov Dashadondok Shagdarovich, DSc in Physics and Mathematics, Professor, head of the department “Electronic computer systems” of East Siberian State University of Technology and Management.

Sazhin Victor Ivanovich, DSc in Physics and Mathematics, Professor, head of the department "Radiophysics and radio electronics" of Irkutsk State University.