ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научная статья

УДК 517.98
DOI: 10.18101/2304-5728-2026-2-3-13

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Мижидон Арсалан Дугарович
доктор технических наук, профессор,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
miarsdu@mail.ru

© Хамханов Алдар Кимович
старший преподаватель,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
msdos147@gmail.com

Аннотация. В настоящей статье исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с переменными сингулярными коэффициентами, зависящими от дельта-функций Дирака. Актуальность работы обусловлена необходимостью строгого математического обоснования моделей гибридных систем дифференциальных уравнений. Такие модели широко применяются при описании динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами на основе вариационного принципа Гамильтона, а также при анализе импульсных воздействий в электрических цепях.

С использованием математического аппарата теории обобщенных функций в работе вводится строгое понятие обобщенного решения рассматриваемого уравнения. Доказывается теорема о структуре общего решения, которое представляется в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и частного решения, выраженного через фундаментальную функцию и классическую функцию Хевисайда.

Особое внимание уделено алгоритму нахождения решения. Авторами выведены и математически обоснованы рекуррентные соотношения, позволяющие последовательно вычислять значения дифференциальных операторов от решения в точках сингулярности. В результате получено полное аналитическое представление решения задачи Коши. Предложенный общий подход устраняет пробелы в существующих прикладных исследованиях, обеспечивая математическую строгость и корректность моделирования систем с дискретно-континуальными характеристиками.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение n-го порядка, задача Коши, сингулярные коэффициенты, дельта-функция Дирака, обобщенное решение.

Для цитирования
Мижидон А. Д., Хамханов А. К. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 2. С. 3–13.

Введение

У авторов статьи интерес к исследованию линейного дифференциального уравнения n-го порядка с сингулярными коэффициентами, зависящими от δ-функций Дирака, возник в связи с рассмотрением гибридных систем дифференциальных уравнений (ГСДУ), состоящих из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. К рассмотрению ГСДУ приводит применение для построения уравнений динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами вариационного принципа Гамильтона [1–6]. Исследование ГСДУ, описывающих обобщенные математические модели механических системы, для которых расчетными схемами исследования является твердое тело (или система твердых тел), соединенное упругими связями со стержнем, проводилось в работах [2–4]. Общие теоретические основы исследования таких ГСДУ приведены в [5; 6]. Предложенный подход к исследованию собственных колебаний получил дальнейшее развитие в работах [7; 8].

Следует отметить, что актуальность проводимых исследований также связана с приложениями, в которых математические модели описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, зависящими от δ-функций Дирака. В частности, такая математическая модель предлагается в [9] для исследования импульсного температурного воздействия на термистор в последовательном колебательном контуре. В целом проведенные в [9] исследования математически строго не обоснованы, порой некорректны, а сделанные выводы вызывают сомнение, что скорее всего связано с тем, что статья написана специалистами в предметной области при отсутствии общих теоретических основ исследования таких уравнений.

В данной работе с использованием математического аппарата теории обобщенных функций [10] исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с коэффициентами, зависящими от δ-функций Дирака. При этом предложен общий подход к решению такой задачи.

1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n}(t)+(a_{n-1}+\sum_{i=1}^{m}(b_{n-1}^{i}\delta(t-\tau_i))\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)+\ldots+$$
$$+(a_1+\sum_{i=1}^{m}b_1^i\delta(t-\tau_i))\frac{dx}{dt}(t)+(a_0+\sum_{i=1}^{m}b_0^i\delta(t-\tau_i))x(t)=0, \qquad (1)$$

где $x(t)\in R^1$; $a_i\,(i=0,1,2,...,n),\ b_i\ (i=0,1,2,...,n-1)$ — постоянные коэффициенты; $\delta(x-\tau)$ — функция Дирака.

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши с начальными условиями:

$$x(t_0)=x_0,\ \frac{dx}{dt}(t_0)=x_0^{(1)},...,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0)=,\ \ x_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n}(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}(t)+a_0x(t)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(b_{n-1}^{i}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)+\ldots+b_1^i\frac{dx}{dt}(t)+b_0^ix(t)\right)\delta(t-\tau_i). \qquad (3)$$

Введя дифференциальные операторы

$$L(\cdot)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0,\qquad \left(p=\frac{d}{dt}(\cdot)\right),$$

$$\tilde{L}(\cdot,b)=b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+\ldots+b_1p+b_0,\ \left(p=\frac{d}{dt}(\cdot),\ \ b=(b_0,b_1,...,b_{n-2},b_{n-1})\right),$$

запишем уравнение (3) в операторной форме:

$$L(x(t))=-\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(t),b^i)\,\delta(t-\tau_i))\,. \qquad (4)$$

Решение дифференциального уравнения (4) следует понимать в обобщенном смысле.

Введем понятие обобщенного решения дифференциального уравнения (4). Для этого рассмотрим множество K основных функций:

$$K=\left\{\varphi(\cdot):\ \varphi(\cdot)\in C_{\infty,[t_0,\infty]}\right\}.$$

Определение 1. Функцию $x(t)$ назовем обобщенным решением дифференциального уравнения (4), если для любой основной функции $\varphi(\cdot)\in K$ имеет место тождество:

$$\int_{t_0}^{\infty}L(x(t))\varphi(t)dt=-\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)\,\varphi(\tau_i)\,. \qquad (5)$$

Определение 2. Под решением задачи Коши для дифференциального уравнения (4) с начальными условиями (2) будем понимать функцию $x(\cdot) \in C_{n-1,[t_0,\,T]}$, если функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2) и для любой основной функции $\varphi(\cdot) \in K$ удовлетворяет тождеству (5).

2 Представление для обобщенного решения линейного дифференциального уравнения

Теорема 1. Общее обобщенное решение $x(t) = x(t, c_1, c_2, ..., c_n)$ уравнения (4) может быть представлено в виде суммы:

$$x(t) = \overline{x}(t) + \tilde{x}(t)\,, \tag{6}$$

где $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c_1, c_2, ..., c_n)$ — общее решение однородного уравнения

$$L(\overline{x}(t)) = 0\,, \tag{7}$$

а $\tilde{x}(t)$ — функция, удовлетворяющая соотношению:

$$\tilde{x}(t) = -\sum_{i=1}^{m} G(t-\tau_i)\tilde{L}(x(\tau_i), b^i)\,. \tag{8}$$

Здесь функция $G(t)$ некоторое обобщенное решение уравнения:

$$L(G(t)) = \delta(t)\,. \tag{9}$$

***Доказательство*:** в том, что представление (6) является обобщенным решением дифференциального уравнения (4), убедимся непосредственной подстановкой (6) в левую часть (5). Учитывая, что $\overline{x}(t)$ решение однородного уравнения (7), получим:

$$\int_{t_0}^{\infty} L(x(t))\varphi(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} (L(\overline{x}(t) + \tilde{x}(t))\varphi(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} L(\tilde{x}(t)\,\varphi(t)dt\,. \tag{10}$$

Представим (8) в виде:

$$\tilde{x}(t) = -\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} G(t-\xi)\tilde{L}(x(\xi), b^i)\,\delta(\xi-\tau_i)d\xi\,. \tag{11}$$

Подставим (11), в правую часть соотношения (10). Далее, меняя порядок интегрирования и учитывая (9), получим:

$$\int_{t_0}^{\infty} L(\tilde{x}(t))\varphi(t)dt = -\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} L(G(t-\xi))\cdot \tilde{L}(x(\xi),b^i)\delta(\xi-\tau_i)\,d\xi\,\varphi(t)dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\delta(t-\xi)\cdot\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(\xi),b^i)\delta(\xi-\tau_i)\,d\xi\,\varphi(t)dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(\xi),b^i)\delta(\xi-\tau_i)\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\delta(t-\xi)\,dt\,d\xi =$$

$$= -\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(\xi),b^i)\varphi(\xi)\delta(\xi-\tau_i)d\xi = -\sum_{i=1}^{m}\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)\cdot\varphi(\tau_i),$$

что совпадает с правой частью (5).

Таким образом, для общего обобщенного решения $x(t)$ дифференциального уравнения (4) справедливо представление в виде суммы (6). *Теорема доказана.*

Замечание 1. С учетом (8) для общего решения дифференциального уравнения (4) $x(t) = x(t, c_1, c_2, ..., c_n)$ справедливо представление:

$$x(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} G(t-\tau_i)\tilde{L}(x(\tau_i),b^i), \qquad (12)$$

где $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, c_1, c_2, ..., c_n)$ — общее решение однородного дифференциального уравнения (5).

При дальнейших исследованиях будем использовать обобщенное решение уравнения (7) $G(t)$, удовлетворяющее условию $G(t) = 0$ при $t < 0$. Для этого воспользуемся теоремой о нахождении фундаментального решения линейного дифференциального оператора [10].

Теорема 2. Обобщенное решение уравнения (8) $G(t)$ можно представить в виде:

$$G(t) = g(t)\theta(t), \qquad (13)$$

где $\theta(x)$ — классическая функция Хэвисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0, \end{cases} \qquad (14)$$

а $g(t)$ частное решение однородного дифференциального уравнения

$$Lg(t) = 0, \qquad (15)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$g(0) = 0,\ \ \frac{dg}{dx}(0) = 0, ..., \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}(0) = 0,\ \ \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{a_n}. \qquad (16)$$

3 К нахождению решения задачи Коши

Представление общего решения (12) дифференциального уравнения (4) с учетом (13) запишем в виде:

$$x(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} g(t-\tau_i)\,\theta(t-\tau_i)\,L(x(\tau_i), b^i)\,. \tag{17}$$

Из представления (17) с учетом определения функции Хэвисайда (14) следует:

при $t_0 \le t < \tau_1$

$$x(t) = \bar{x}(t)\,. \tag{18}$$

В силу (18) следует справедливость утверждения.

Утверждение 1. Для выполнения начальных условий (2) для уравнения (4) должны выполняться начальные условия для решения $x(t) = \bar{x}(t)$ однородного уравнения (5).

В дальнейшем будем считать, что $\bar{x}(t)$ решение однородного уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Из представления (17) с учетом определения функции Хэвисайда (14) следует:

при $\tau_1 \le t < \tau_2$

$$x(t) = \bar{x}(t) - g(t-\tau_1)\tilde{L}(x(\tau_1), b^1) \tag{19}$$

при $\tau_{k-1} \le t < \tau_k$ $(k = 3, 4, \dots, m)$

$$x(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} g(t-\tau_i)\,L(x(\tau_i), b^i) \tag{20}$$

при любом $t \ge \tau_m$

$$x(t) = \bar{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} g(t-\tau_i)\,L(x(\tau_i), b^i)\,. \tag{21}$$

Продифференцируем представление (19) $n-1$ раз:

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x}(t) - g(t-\tau_1)\tilde{L}(x(\tau_1), b^1) \\ \dfrac{dx}{dt}(t) = \dfrac{d\bar{x}}{dt}(t) - \dfrac{dg}{dt}(t-\tau_1)\tilde{L}(x(\tau_1), b^1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t) = \dfrac{d^{n-1}\bar{x}}{dt^{n-1}}(t) - \dfrac{dg^{n-1}}{dt^{n-1}}(t-\tau_1)\tilde{L}(x(\tau_1), b^1). \end{cases} \tag{22}$$

Умножив в (22) первое выражение на b_0^1, второе на $b_1^1, \dots,$ n-е выражение на b_{n-1}^1, далее сложив, получим:

$$\tilde{L}(x(t), b^1) = \tilde{L}(\bar{x}(t), b^1) - \tilde{L}(g(t-\tau_1), b^1)\cdot\tilde{L}(x(\tau_1), b^1)\,. \tag{23}$$

Поставив в (23) $t=\tau_1$, найдем

$$\tilde{L}(x(\tau_1),b^1)=\frac{\tilde{L}(\overline{x}(\tau_1),b^1)}{1+\tilde{L}(g(0),b^1)}.$$

Отсюда, учитывая, что в силу условий (16) справедливо:

$$\tilde{L}(g(0),b^1)=\frac{b_{n-1}^1}{a_n},$$

получим

$$\tilde{L}(x(\tau_1),b^1)=\frac{a_n}{a_n+b_{n-1}^1}\tilde{L}(\overline{x}(\tau_1),b^1). \tag{24}$$

Продифференцируем представление (20) $n-1$ раз:

$$\begin{cases} x(t)=\overline{x}(t)-\sum\limits_{i=1}^{k-1}g(t-\tau_i)\tilde{L}(x(\tau_i),b^i) \\ \dfrac{dx}{dt}(t)=\dfrac{d\overline{x}}{dt}(t)-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{dg}{dt}(t-\tau_i)\tilde{L}(x(\tau_i),b^i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)=\dfrac{d^{n-1}\overline{x}}{dt^{n-1}}(t)-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{dg^{n-1}}{dt^{n-1}}(t-\tau_i)\tilde{L}(x(\tau_i),b^i). \end{cases} \tag{25}$$

Умножив в (25) первое выражение на b_0^{k-1}, второе на b_1^{k-1},..., n-е выражение на b_{n-1}^{k-1}, далее сложив, получим:

$$\tilde{L}(x(t),b^{k-1})=\tilde{L}(\overline{x}(t),b^{k-1})-\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{L}(g(t-\tau_i),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i). \tag{26}$$

Выделив в (26) в сумме последнее слагаемое

$$\tilde{L}(x(t),b^{k-1})=\tilde{L}(\overline{x}(t),b^{k-1})-\sum_{i=1}^{k-2}\tilde{L}(g(t-\tau_i),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)-$$
$$-\tilde{L}(g(t-\tau_{k-1}),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1}),$$

подставим $t=\tau_{k-1}$

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1})=\tilde{L}(\overline{x}(\tau_{k-1}),b^{k-1})-\sum_{i=1}^{k-2}\tilde{L}(g(\tau_{k-1}-\tau_i),b^i)\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)-\\ -\tilde{L}(g(0),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1}).\end{aligned} \tag{27}$$

В силу условий (16) имеем

$$\tilde{L}(g(0),b^{k-1})=\frac{b_{n-1}^{k-1}}{a_n}.$$

Таким образом из (27) получим:

$$\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1})=\tilde{L}(\overline{x}(\tau_{k-1}),b^{k-1})-\sum_{i=1}^{k-2}\tilde{L}(g(\tau_{k-1}-\tau_i),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)-$$
$$-\frac{b_{n-1}}{a_n}\cdot\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1}).$$

Отсюда следует, что при $k=3,4,...,m$

$$\tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1})=-\frac{a_n}{a_n+b_{n-1}^{k-1}}\cdot\left(\tilde{L}(\overline{x}(\tau_{k-1}),b^{k-1})-\sum_{i=1}^{k-2}\tilde{L}(g(\tau_{k-1}-\tau_i),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)\right). \tag{28}$$

Аналогично из представления (21) найдем:

$$\tilde{L}(x(\tau_m),b^m)=-\frac{a_n}{a_n+b_{n-1}^{m}}\cdot\left(\tilde{L}(\overline{x}(\tau_m),b^m)-\sum_{i=1}^{m-1}\tilde{L}(g(\tau_m-\tau_i),b^m)\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)\right). \tag{29}$$

Заметим, что (29) совпадает с (28) при $k=m+1$, поэтому для вычисления $\tilde{L}(x(\tau_m),b^m)$ можно воспользоваться формулой (28). Полученные соотношения (24), (28) представляют собой рекуррентные соотношения для нахождения $L(x(\tau_i),b^i)$, входящие в представление общего решения (17) дифференциального уравнения (4).

Таким образом, решение задачи Коши (1)-(2) может быть найдено согласно представлению (17) в виде:

$$x(t)=\overline{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}g(t-\tau_i)\theta(t-\tau_i)\,L(x(\tau_i),b^i), \tag{30}$$

где $\overline{x}(t)$ — решение однородного уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (2). Входящие в (30) значения $L(x(\tau_i),b^i)$, $(i=1,2,...,m)$ находятся из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases}\tilde{L}(x(\tau_1),b^1)=\dfrac{\tilde{L}(\overline{x}(\tau_1),b^1)}{1+\tilde{L}(g(0),b^1)},\\ \tilde{L}(x(\tau_{k-1}),b^{k-1})=-\dfrac{a_n}{a_n+b_{n-1}^{k-1}}\cdot\\ \qquad\cdot\left(\tilde{L}(\overline{x}(\tau_{k-1}),b^{k-1})-\displaystyle\sum_{i=1}^{k-2}\tilde{L}(g(\tau_{k-1}-\tau_i),b^{k-1})\cdot\tilde{L}(x(\tau_i),b^i)\right),\\ k=3,4,...,m+1.\end{cases} \tag{31}$$

Заключение

В работе получено аналитическое представление (30) решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами, зависящими от дельта-функций Дирака. Входящие в решение значения дифференциальных операторов в точках сингулярности эффективно вычисляются с помощью выведенных рекуррентных соотношений (31). В отличие от существующих прикладных исследований (например, работы [9]), где модели импульсных систем часто строятся без строгого математического обоснования, предложенный подход опирается на классический аппарат теории обобщенных функций. Это гарантирует математическую строгость и исключает некорректность моделей на уровне дифференциальных уравнений. Теоретическая значимость полученных результатов заключается в построении универсального алгоритма нахождения обобщенных решений для уравнений произвольного порядка. В свою очередь, практическая значимость состоит в возможности непосредственного использования выведенных рекуррентных формул при численном моделировании динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также при анализе электрических цепей с дискретно-континуальными характеристиками.

Литература

1. Мижидон А. Д. Гибридные системы дифференциальных уравнений в приложении к исследованию одного класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // Материалы XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов: в четырех томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 21–23.

2. Мижидон А. Д., Баргуев С. Г. Краевая задача для одной гибридной системы дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. 2013. № 9. С. 130–137.

3. Mizhidon A. D. A generalized mathematical model for a class of mechanical systems with lumped and distributed parameters. *AIMS Mathematics*. 2019; 4; 3: 751–762.

4. Mizhidon A. D. Modelling of mechanical systems basing on interconnected differential and partial differential equations. *Bulletin of SUSU MMCS*. 2017; 10; 1: 22–34.

5. Мижидон А. Д., Мижидон К. А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 911–922.

6. Мижидон А. Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.

7. Мижидон А. Д., Харахинов А. В. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая системы твердых тел, прикрепленных к балке Тимошенко // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 1. С. 88–96.

8. Мижидон А. Д., Хамханов А. К. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая твердое тело, прикрепленное к двум упругим стержням // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 38–47.

9. Путилин А. Б., Либерзон Р. Е., Курбаналиев В. К. Применение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами Δ -функциями Дирака к исследованию последовательной RLC-цепи с дискретно-континуальными характеристиками // Журнал радиоэлектроники. 2014. № 12. С. 1–6.

10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1979. 320 с.

Статья поступила в редакцию 16.05.2026; одобрена после рецензирования 09.06.2026; принята к публикации 10.06.2026.

CAUCHY PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Arsalan D. Mizhidon
Doctor of Technical Sciences, Professor,
East Siberian State University of Technology and Management
Russia, 670013, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40V
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
miarsdu@mail.ru

Aldar K. Khamkhanov
Senior Lecturer,
East Siberian State University of Technology and Management
Russia, 670013, Ulan-Ude, st. Klyuchevskaya, 40V
msdos147@gmail.com

Abstract. This paper investigates the Cauchy problem for an n-th order linear differential equation with variable singular coefficients depending on the Dirac delta functions. The relevance of this work is due to the need for a rigorous mathematical foundation for models of hybrid systems of differential equations. Such models are widely used to describe the dynamics of mechanical systems with lumped and distributed parameters based on Hamilton's variational principle, as well as to analyze impulse effects in electrical circuits.

Using the mathematical apparatus of the theory of generalized functions, the paper introduces a rigorous concept of a generalized solution for the equation under consideration. A theorem on the structure of the general solution is proved, which is represented as the sum of the solution to the corresponding homogeneous equation and a particular solution expressed via the fundamental function and the classical Heaviside step function.

Special attention is paid to the algorithm for finding the solution. The authors derive and mathematically substantiate recurrent relations that allow for the sequential calculation of the values of differential operators applied to the solution at singular points. As a result, a complete analytical representation of the solution to the Cauchy problem is obtained. The proposed general approach eliminates gaps in existing applied research, ensuring mathematical rigor and correctness in the modeling of systems with discrete-continuum characteristics.

Keywords: n-th order differential equation, Cauchy problem, singular coefficients, Dirac delta function, generalized solution.

For citation

Mizhidon A. D., Khamkhanov A. K. Cauchy Problem for a Linear Differential Equation With Singular Coefficients // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 2. P. 3–13.

The article was submitted 16.05.2026; approved after reviewing 09.06.2026; accepted for publication 10.06.2026.