

Научная статья

УДК 517.9

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-2-14-26

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© **Тында Александр Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный университет
Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
tyndaan@mail.ru

© **Рязанцев Владимир Андреевич**

кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный университет
Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
ryazantsevv@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена численному решению обратной задачи для интегральной динамической модели, описываемой интегральным уравнением Вольтерра первого рода с ядром, терпящим разрыв вдоль гладкой кривой. Уравнения указанного вида находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии. Обратная задача состоит в определении неизвестной кривой разрыва, содержащейся в пределах интегрирования. При такой постановке рассматриваемое уравнение трактуется уже как нелинейное функционально-интегральное уравнение. Предложен численный метод определения неизвестной кривой разрыва, основанный на ее полиномиальной аппроксимации. Коэффициенты разложения определяются в результате минимизации невязки с учетом дополнительных условий-ограничений. Для решения задачи условной оптимизации используются методы последовательного квадратичного программирования. Эффективность предложенного подхода подтверждается результатами решения модельных задач, в работе приведены численные результаты, дана их интерпретация.

Ключевые слова: интегральная динамическая модель, функционально-интегральное уравнение, обратная задача, разрывное ядро, кривая разрыва, полиномиальная аппроксимация, условная оптимизация, квадратичное программирование.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00743, <https://rscf.ru/project/25-21-00743/>

численное исследование которого представляет нетривиальную математическую задачу ввиду наличия неизвестных в пределах интегральных операторов. Сложность прямой дискретизации здесь заключается в необходимости аппроксимации интегралов с неизвестными областями интегрирования.

Модели, описываемые интегральными уравнениями с неизвестными пределами интегрирования, берут свое начало в работах В. М. Глушкова [4], их экономические приложения исследуются в работах N. Hritonenko и Yu. Yatsenko ([5], [6]), ряд прямых и итерационных численных методов предложен в работах [7]–[12].

Настоящая работа является продолжением работы [7] и посвящена построению вариационного метода решения обратной задачи для модели (1)-(2) в скалярном случае.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу (1)-(2) при $n = 2$, состоящую в определении неизвестной функции разрыва $\alpha_1(t) = \alpha(t)$. Имеем функционально-интегральное уравнение следующего вида:

$$\int_0^{\alpha(t)} h_1(t, s) ds + \int_{\alpha(t)}^t h_2(t, s) ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Зная функции $h_1(t, s)$, $h_2(t, s)$ и $f(t)$, поставим при известном значении параметра T задачу о воостановлении неизвестной функции $\alpha(t)$ в следующих дополнительных предположениях.

1. Функция $\alpha(t)$ при $0 \leq t \leq T$ является неубывающей. Если предположить, что неизвестная функция дифференцируема во всех точках $t \in (0, T)$, то тем самым должно выполняться условие:

$$\alpha'(t) \geq 0 \text{ при } t \in (0, T). \quad (4)$$

2. При всех $0 \leq t \leq T$ функция $\alpha(t)$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$0 \leq \alpha(t) \leq t. \quad (5)$$

Здесь и далее без ограничения общности будем считать, что $T = 1$. В самом деле, в случае, если $T \neq 1$, можно выполнить в уравнении (3) замену независимой переменной t :

$$t' = t/T,$$

обеспечив, таким образом, справедливость неравенства $0 \leq t' \leq 1$.

2 Описание метода

Предположим, что подынтегральные функции $h_1(t, s)$ и $h_2(t, s)$ уравнения (3) таковы, что найдутся функции $H_1(t, s)$ и $H_2(t, s)$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial H_1}{\partial s} = h_1(t, s), \quad \frac{\partial H_2}{\partial s} = h_2(t, s). \quad (6)$$

Тогда в результате применения к интегралам в левой части уравнения (3) формулы Ньютона — Лейбница можно переписать его в следующем эквивалентном виде:

$$H_1(t, s) \Big|_{s=0}^{s=\alpha(t)} + H_2(t, s) \Big|_{s=\alpha(t)}^{s=t} = f(t). \quad (7)$$

Заметим, что если для заданных функций $h_1(t, s)$ и $h_2(t, s)$ не найдется функций $H_1(t, s)$ и $H_2(t, s)$, удовлетворяющих условиям (6), то описываемый метод всё же может быть применён, если приближённо заменить в уравнении (3) функции $h_1(t, s)$, $h_2(t, s)$ аппроксимирующими их функциями $\hat{h}_1(t, s)$, $\hat{h}_2(t, s)$, допускающими интегрирование по переменной s ; для построения таких аппроксимаций может быть, в частности, эффективно использован аппарат степенных рядов или рядов Фурье по подходящим ортогональным системам функций. В этом случае после нахождения в результате интегрирования таких функций $H_1(t, s)$, $H_2(t, s)$, что $H_1 = \partial \hat{h}_1 / \partial s$, $H_2 = \partial \hat{h}_2 / \partial s$ может быть аналогичным образом выполнен переход к уравнению (7).

Уравнение (7) в развёрнутом виде переписывается следующим образом:

$$H_1(t, \alpha(t)) - H_1(t, 0) + H_2(t, t) - H_2(t, \alpha(t)) = f(t).$$

Наконец, обозначив

$$\tilde{f}(t) = f(t) + H_1(t, 0) - H_2(t, t),$$

получим следующее уравнение, нелинейное относительно искомой функции $\alpha(t)$.

$$H_1(t, \alpha(t)) - H_2(t, \alpha(t)) = \tilde{f}(t). \quad (8)$$

Уравнение (8) лежит в основе предлагаемого численного метода восстановления функции $\alpha(t)$.

Искомую функцию $\alpha(t)$ будем аппроксимировать функцией $\tilde{\alpha}(t)$, определяемой следующим образом:

$$\tilde{\alpha}(t) = \sum_{j=1}^m C_j t^j. \quad (9)$$

Здесь

- m — параметр метода, натуральное число;
- C_1, \dots, C_m — вещественнозначные коэффициенты, подлежащие определению.

Необходимо заметить, что, потребовав, чтобы аппроксимация $\tilde{\alpha}(t)$ удовлетворяла при $0 \leq t \leq 1$ тем же дополнительным условиям неубывания функции $\tilde{\alpha}(t)$ и справедливости неравенства $\alpha(t) \leq t$, заметим, что при $t = 0$ должно выполняться условие $\tilde{\alpha}(0) = 0$. По этой причине в выражении (9) для функции $\tilde{\alpha}(t)$ отсутствует свободный член C_0 , который в силу $\tilde{\alpha}(0) = 0$ должен быть равен нулю.

Используя аппроксимацию (9), заменим уравнение (8) следующим приближенным уравнением:

$$H_1(t, \tilde{\alpha}(t)) - H_2(t, \tilde{\alpha}(t)) = \tilde{f}(t). \quad (10)$$

Подставив в это уравнение представление (9), получим:

$$H_1\left(t, \sum_{j=1}^m C_j t^j\right) - H_2\left(t, \sum_{j=1}^m C_j t^j\right) = \tilde{f}(t). \quad (11)$$

Введём в рассмотрение функцию $\Phi(t; C_1, \dots, C_m)$ в соответствии с формулой:

$$\Phi(t; C_1, \dots, C_m) = \left[H_1\left(t, \sum_{j=1}^m C_j t^j\right) - H_2\left(t, \sum_{j=1}^m C_j t^j\right) - \tilde{f}(t) \right]^2.$$

Коэффициенты C_j ($j = \overline{1, m}$) будем выбирать таким образом, чтобы стремилась к минимуму функция $\varepsilon(C_1, \dots, C_m)$, которую определим следующим образом.

Введём на сегменте $t \in [0, 1]$ равномерную сетку из узлов $t_i = ih$, где $i = \overline{1, N}$, $h = 1/N$ и N — целое положительное число, являющееся параметром метода.

Коэффициенты C_1, \dots, C_m будем фиксировать таким образом, чтобы своего минимума достигала функция:

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_1, \dots, C_m) &= \sum_{i=1}^N \Phi(t_i; C_1, \dots, C_m) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[H_1\left(t_i, \sum_{j=1}^m C_j t_i^j\right) - H_2\left(t_i, \sum_{j=1}^m C_j t_i^j\right) - \tilde{f}(t_i) \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, задача приближённого восстановления функции $\alpha(t)$ сведена к задаче минимизации нелинейной функции $\varepsilon(C_1, \dots, C_m)$. Эта задача может быть решена при помощи любого современного численного метода нелинейной оптимизации. При этом если функция $\varepsilon(C_1, \dots, C_m)$ имеет несколько локальных минимумов, то среди них необходимо выбрать наименьший.

Для корректного решения задачи минимизации функции в общем случае необходимо учесть наличие дополнительных условий 1, 2, наложенных на искомую функцию $\alpha(t)$.

1. Условие $\tilde{\alpha}'(t) \geq 0$ приводит к неравенству:

$$\sum_{j=1}^m jC_j t^{j-1} \geq 0.$$

Фиксируя в этом неравенстве последовательно $t = t_i$, где $i = 0, \dots, N$, получаем следующий набор дополнительных условий:

$$C_1 \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m jC_j t_i^{j-1} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

2. Условие $0 \leq \tilde{\alpha}(t) \leq t$ порождает неравенство:

$$\sum_{j=1}^m C_j t^j \leq t.$$

Последовательно полагая в указанном неравенстве $t = t_i$, где $i = 1, \dots, N$, приходим к следующей последовательности дополнительных условий:

$$\sum_{j=1}^m C_j t_i^j \leq t_i. \quad (14)$$

Тем самым приходим к задаче минимизации определенной формулой (12) функции $\varepsilon(C_1, \dots, C_m)$ при условиях (13) и (14). Для завершения алгоритма найденные в результате решения задачи минимизации функции $\varepsilon(C_1, \dots, C_m)$ значения коэффициентов C_1, \dots, C_m необходимо подставить в формулу (9) для получения аппроксимации $\tilde{\alpha}(t)$ функции $\alpha(t)$.

Необходимо отметить, что предлагаемый метод в описанном виде имеет существенное ограничение применимости: хотя теоретически имеется возможность получать решение задачи с произвольной точностью

за счёт увеличения степени m аппроксимирующей функцию $\alpha(t)$ полинома, на практике увеличение m сверх какого-то сравнительно небольшого значения приводит не к увеличению, а напротив, к падению точности и эффективности метода. Тем не менее имеется возможность достаточно простого обобщения описанного метода, позволяющего выполнять восстановление функции $\alpha(t)$ с произвольно заданной точностью; далее опишем это обобщение.

Сначала введём на сегменте $t \in [0, 1]$ равномерную сетку из узлов $t_i = ih_1$, где $i = \overline{0, N_1}$, N_1 — фиксированное целое положительное число и $h_1 = 1/N_1$. Затем каждый из N_1 полученных сегментов $[t_i, t_{i+1}]$ равной длины h_1 , где $i = \overline{0, N_1 - 1}$, в свою очередь, разбивается на N_2 промежутков $[t_{i,j}, t_{i,j+1}]$; здесь $t_{i,j} = t_i + jh_2$, где $j = \overline{0, N_2 - 1}$, N_2 — фиксированное целое положительное число и $h_2 = h_1/N_2$.

Вновь, как и ранее, зафиксировав не слишком большое целое положительное число m , являющееся параметром метода, будем аппроксимировать функцию $\alpha(t)$ с помощью функции $\tilde{\alpha}(t)$, определяемой следующим образом:

$$\tilde{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^m C_{i,k} t^k, \text{ если } t_i < t \leq t_{i+1}, \quad (15)$$

где $i = \overline{0, N_1 - 1}$, а коэффициенты $C_{i,k}$, где $i = \overline{0, N_1 - 1}$ и $k = \overline{0, m}$, подлежат определению; заметим, что в силу условия $\alpha(0) = 0$ можно сразу же зафиксировать $C_{0,0} = 0$.

Подставив определённую таким образом функцию $\tilde{\alpha}(t)$ в уравнение (10), введём в рассмотрение функцию:

$$\Phi(t; \mathbf{C}) = \left[H_1(t, \tilde{\alpha}(t)) - H_2(t, \tilde{\alpha}(t)) - \tilde{f}(t) \right]^2. \quad (16)$$

Здесь \mathbf{C} обозначает набор коэффициентов

$$C_{0,1}, \dots, C_{0,m}, C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,m}, \dots, C_{N_1-1,0}, C_{N_1-1,1}, \dots, C_{N_1-1,m}.$$

Запишем определённую формулой (16) функцию $\Phi(t, \mathbf{C})$ в точках $t = t_{i,j}$, где $i = \overline{0, N_1 - 1}$ и $j = \overline{1, N_2}$, и будем искать такой набор значений \mathbf{C} , который доставлял бы глобальный минимум функции:

$$\varepsilon(\mathbf{C}) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} \Phi(t_{i,j}; \mathbf{C}). \quad (17)$$

Минимизацию функции $\varepsilon(\mathbf{C})$ будем проводить при следующих дополнительных условиях-ограничениях.

1. Требование неубывания функции $\tilde{\alpha}(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ приводит к неравенствам:

$$\sum_{k=1}^m k C_{i,k} t_{i,j}^{k-1} \geq 0 \text{ при } i = \overline{0, N_1 - 1}, j = \overline{0, N_2}. \quad (18)$$

2. Требование $\tilde{\alpha}(t) \leq t$ при $0 \leq t \leq 1$ означает справедливость неравенств:

$$\sum_{k=0}^m C_{i,k} t_{i,j}^k \leq t \text{ при } i = \overline{0, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2}. \quad (19)$$

3. Наконец, потребовав непрерывности функции $\tilde{\alpha}(t)$, получим следующие дополнительные условия:

$$\sum_{k=0}^m C_{i,k} t_{i,N_2}^k = \sum_{k=0}^m C_{i+1,k} t_{i+1,0}^k, \quad i = \overline{0, N_1 - 2}. \quad (20)$$

Искомый набор коэффициентов \mathbf{C} , полностью определяющий аппроксимацию $\tilde{\alpha}(t)$ искомой функции $\alpha(t)$, может быть получен в результате минимизации функции $\varepsilon(\mathbf{C})$ при условиях (18)-(20). Подстановка найденного набора значений \mathbf{C} в формулу (15) завершает решение задачи.

3 Численная иллюстрация

Для иллюстрации эффективности предлагаемого алгоритма выполним решение ряда модельных примеров. Первый модельный пример определяется следующими исходными данными:

$$\begin{aligned} h_1 &= \cos(t + s), & h_2 &= \sin(t - s), \\ f(t) &= 1 - \sin(t) + \sin(t + \sin^3(t)) - \cos(t - \sin^3(t)). \end{aligned}$$

Точное решение задачи даётся функцией:

$$\alpha(t) = \sin^3(t).$$

В соответствии с описанием метода зафиксируем $T = 1$, $N = 100$. Для решения задачи ограниченной нелинейной оптимизации использован метод SQP последовательного квадратичного программирования. Расчеты произведены в системе компьютерной математики Maple с количеством значащих цифр в вычислениях равным 16 (задан параметр `Digits:=16`).

В следующей таблице приведены результаты численного решения первого модельного примера.

m	ε_{\min}	δ
1	0.140	0.305
2	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$4.62 \cdot 10^{-2}$
3	$8.16 \cdot 10^{-4}$	$2.46 \cdot 10^{-2}$
4	$3.87 \cdot 10^{-7}$	$4.98 \cdot 10^{-4}$
5	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$2.60 \cdot 10^{-4}$
6	$1.68 \cdot 10^{-10}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$
7	$2.08 \cdot 10^{-11}$	$6.91 \cdot 10^{-6}$

В этой таблице:

- m обозначает степень полинома в формуле (9), используемого для аппроксимации искомой функции $\alpha(t)$;
- ε_{\min} обозначает минимальное значение определённой формулой функции (12), соответствующее набору значений коэффициентов C_1, \dots, C_m , который определяет приближённое решение $\tilde{\alpha}(t)$ поставленной задачи восстановления функции $\alpha(t)$;
- δ обозначает погрешность приближённого решения задачи, вычисляемую по формуле

$$\delta = \min_{j=1, \dots, M} \|\alpha(j\tau) - \tilde{\alpha}(j\tau)\|, \quad \tau = 1/M.$$

При численных расчётах значение M было зафиксировано равным $M = 10^3$.

В качестве примера на рисунке 1 приведён график точного и приближённого решения задачи при $m = 3$. При этом сплошной линией на графике показано точное решение задачи $\alpha(t)$, а пунктирной линией показано приближённое решение задачи $\tilde{\alpha}(t)$.

Рассмотрим вторую модельную задачу с входными функциями другого вида:

$$h_1 = (t + s)^2, \quad h_2 = \frac{1}{(t-s)^2 + 1},$$

$$f(t) = \frac{t^3 (e^{t-1} + 1)^3}{3} - \frac{t^3}{3} - \arctg((e^{t-1} - 1)t).$$

Точное решение задачи 2 определяется функцией:

$$\alpha(t) = te^{t-1}.$$

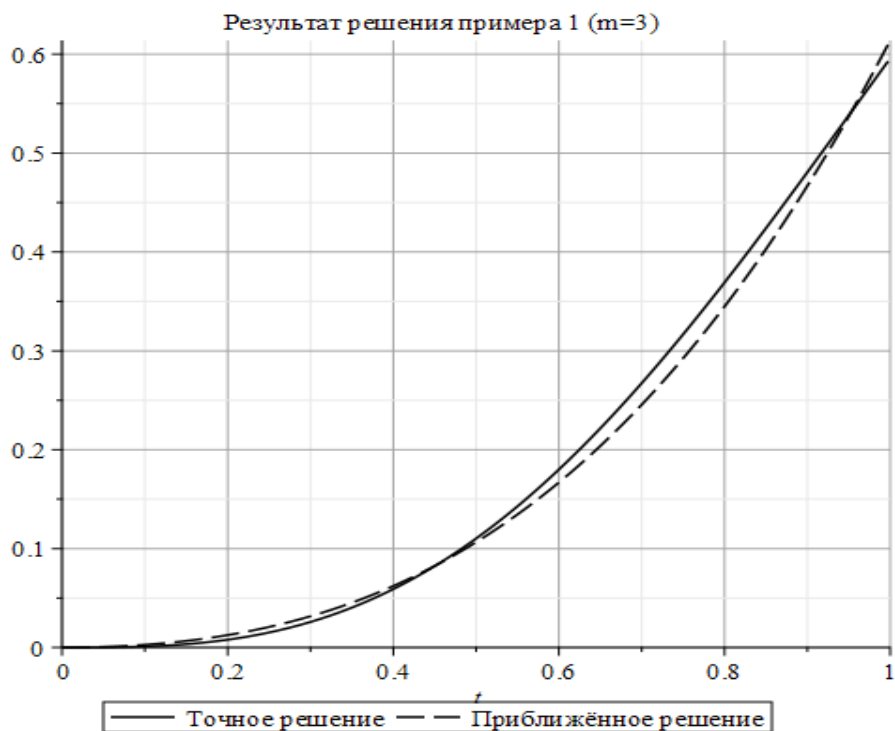


Рис. 1. Решение первого модельного примера при $m = 3$

При расчётах согласно описанию метода было зафиксировано $T = 1$. Значение N , как и ранее, было принято равным 100: $N = 100$.

Следующая таблица содержит результаты численного решения второго модельного примера с использованием прежних обозначений.

m	ε_{\min}	δ
1	0.580	0.155
2	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$
3	$4.15 \cdot 10^{-5}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$
4	$1.75 \cdot 10^{-7}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$
5	$7.94 \cdot 10^{-9}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$
6	$4.30 \cdot 10^{-12}$	$9.66 \cdot 10^{-7}$

В качестве примера на рисунке 2 показан график точного и приближенного решения задачи при $m = 2$.

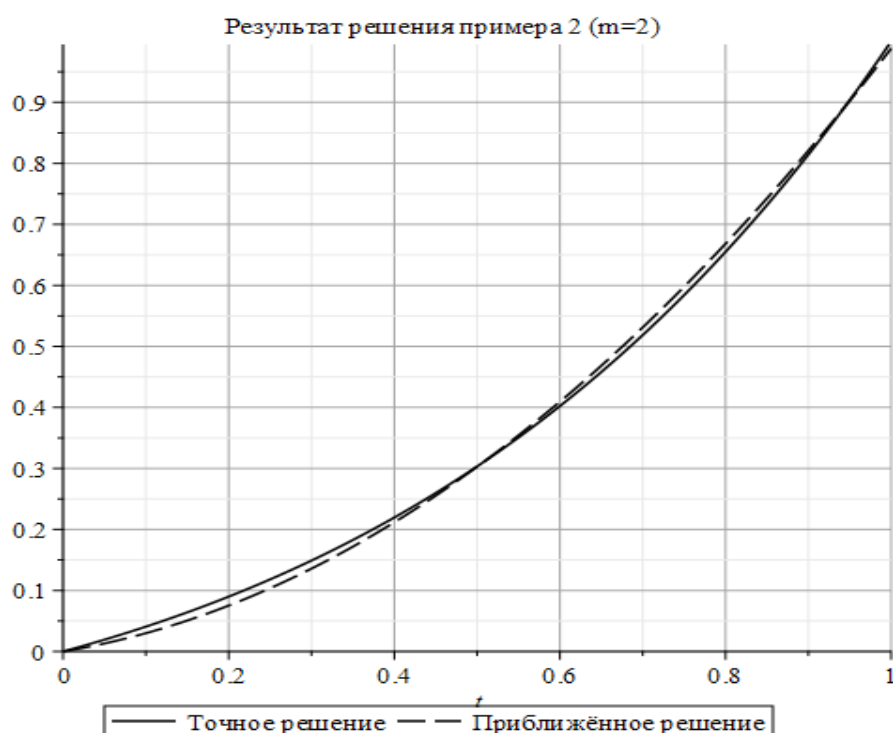


Рис. 2. Решение второго модельного примера при $m = 2$

Заключение

По представленным выше результатам расчетов можно судить об эффективности предложенного вариационного подхода к решению обратной задачи (3). Даже при небольших степенях аппроксимирующих полиномов можно получить результат с приемлемой точностью. Дальнейшее увеличение степени m является нецелесообразным. Для более точных расчетов применяется аппроксимация локальными сплайнами с небольшими степенями компонентов. Нужно отметить, что предложенный подход дает хорошую альтернативу прямым методам дискретизации подобных нелинейных функционально-интегральных уравнений. Дело в том, что ввиду наличия неизвестных в пределах интегральных операторов возникает необходимость аппроксимации интегралов с неизвестными областями интегрирования. И тут приходится либо применять самые простейшие квадратуры (формулу прямоугольников), либо усугублять проблему ветвления решений. Дальнейшее развитие авторы видят в обобщении предложенного подхода на системы уравнений с произвольным количеством кривых разрыва, введенные в работе [7].

Литература

1. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015, 260 p.
2. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 313, 2017, Pages 119-128, ISSN 0377-0427, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.09.003>.
3. Sidorov D.; Tynda A.; Muftahov I.; Dreglea A.; Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. *Mathematics*. 2020. 8, 1257 DOI: 10.3390/math8081257
4. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. Москва: Наука, 1983. 352 с.
5. Yatsenko Yu. Volterra integral equations with unknown delay time. *Methods and Applications of Analysis*. 1995. 2 (4): 408–419.
6. N. Hritonenko and Yu. Yatsenko *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Edition 2. Springer New York, NY. 2014: 296.
7. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels. *Mathematics*. 2022; 10(21): 3945; <https://doi.org/10.3390/math10213945>.
8. Tynda A. N. Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay. *PAMM*. 2009; 9; 1: 591–592.
9. Boikov I. V., Tynda A. N. Approximate solution of nonlinear integral equations of developing systems theory. *Differential Equations*. 39:9 (2003): 1214–1223.
10. Тында А. Н. Решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестными задержками // Труды Средневолжского математического общества. 2007. Т. 9, № 1. С. 253–259.
11. Tynda A. N. Direct numerical methods for the systems of Volterra integral equations with nonlinear delay-time // Труды Средневолжского математического общества. 2008. Т. 10, № 1. С. 306–311.
12. Тында А. Н., Танасов Г. Д. Численное решение обратной задачи для интегральной модели с двумя неизвестными линиями разрыва // Материалы XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. Под редакцией И. В. Бойкова. Пенза, 2023. С. 109–113.

Статья поступила в редакцию 20.05.2026; одобрена после рецензирования 01.06.2026; принята к публикации 10.06.2026.

A VARIATIONAL APPROACH TO SOLVING THE INVERSE
PROBLEM FOR AN INTEGRAL DYNAMIC MODEL

Aleksandr N. Tynda

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Head of Higher and applied mathematics department
Penza State University
40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia

Vladimir A. Ryazantsev

Cand. Sci. (Engineering), A/Prof,
Higher and applied mathematics department
Penza State University
40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia

Abstract. The paper is devoted to the numerical solution of the inverse problem for an integral dynamic model described by a Volterra integral equation of the first kind with a kernel that is discontinuous along a smooth curve. Equations of this type are used to model various dynamic processes, including energy storage systems. The inverse problem consists of determining the unknown curve within the integration limits. In this case, the equation is treated as a nonlinear functional-integral equation. A numerical method for determining an unknown discontinuity curve based on its polynomial approximation is proposed. The decomposition coefficients are determined by minimizing the residual error, taking into account additional constraint conditions. Sequential quadratic programming methods are used to solve the conditional optimization problem. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by the results of solving model problems. The paper presents numerical results and their interpretation.

Keywords: Integral dynamic model, functional-integral equation, inverse problem, discontinuous kernel, discontinuity curve, polynomial approximation, conditional optimization, quadratic programming.

For citation

Tynda A. N., Ryazantsev V. A. A Variational Approach to Solving the Inverse Problem for an Integral Dynamic Model // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 2. P. 14–26.

The article was submitted 20.05.2026; approved after reviewing 01.06.2026; accepted for publication 10.06.2026.