

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.923, 531.36

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-2-27-39

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ БОБЫЛЕВА

© Новиков Михаил Алексеевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

© Леоненко Таисия Андреевна

техник,
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
taisialeonenko@yandex.ru

Аннотация. В статье проведено изучение стационарных движений механической автономной консервативной системы, для которой может существовать частный интеграл Д. К. Бобылева. Для системы с частным интегралом Бобылева переходом невырожденной заменой переменных к другой системе координат показана эквивалентная система с частным интегралом Стеклова. В связи с этим нахождение здесь стационарных движений механических систем с частным интегралом Бобылева основано по аналогии с поиском стационарных движений, содержащих частный интеграл Стеклова. Последние ранее изучены и проведено исследование их устойчивости.

Их отыскание опирается на известный эффективный метод Рауса — Ляпунова. При этом большее применение получила неполная связка из первых интегралов, состоящая из общих интегралов: энергии, кинетического момента и Пуассона. Другие два оставшихся первых интеграла, из которых один является частным Бобылева, можно не принимать во внимание и в вычислениях они могут не участвовать. Вместе с тем необходимо учитывать только условия существования частного интеграла Бобылева. В статье были осуществлены поиски стационарных движений двумя подходами. Один из них не учитывал возникающий дополнительный общий интеграл, другой проводил вычисления с учетом этого интеграла. На основе оценки сложности составления решений стационарности и проверки их соответствия стационарности показана предпочтительность первого подхода. Стационарными движениями получены положение покоя и перманентные вращения.

Ключевые слова: стационарное движение, частный интеграл, связка интегралов, решение стационарности, первый интеграл, уравнение движения, условный экстремум.

Благодарности

Статья выполнена в проекте № 126021217176-0.

Для цитирования

Новиков М. А., Леоненко Т. А. О стационарных движениях механических систем, допускающих частный интеграл Бобылева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 2. С. 27–39.

Введение

Многие динамические свойства механических автономных консервативных систем часто выявляются при исследовании стационарных движений. Распространенным для этого объектом может быть задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки [1–3]. Движение твердого тела описывается дифференциальными уравнениями [1–3]:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr + Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C - A)rp + Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A - B)pq + Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz ; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные, связанные с телом оси; x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось OZ , направленную на притягивающий центр (углы Пуассона), M — масса тела; g — ускорение свободного падения.

Для системы (1) известны три общих интеграла [3]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = c_0 = const$$

(интеграл энергии);

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = c_1 = const \text{ (интеграл кинетического момента),}$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \text{ (интеграл Пуассона).}$$

В статьях [4; 5] для существования частных интегралов В. А. Стеклова и Д. К. Бобылева показаны общие необходимые условия:

$$x_0 = 0, z_0 = 0, \quad (2)$$

являющиеся только частью полных условий. В дальнейшем для краткости введем обозначения переменных системы: $m = Mg y_0 / A$; $k_1 = B / A$; $k_2 = C / A$ ($m \neq 0$; $0 < k_1 \neq 1$; $k_2 > 0$); $x = (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — фазовые переменные.

В новых переменных уравнения движения запишутся:

$$\begin{cases} \dot{p} = (k_1 - k_2)qr + m\gamma_3, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{q} = (k_2 - 1)/k_1 rp, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = -[(1 - k_1)pq + m\gamma_1]/k_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (3)$$

Для системы (3) некоторые частные решения, как показано в [3], можно строить исходя из дифференциального равенства для $\dot{q} = 0$. В таких ситуациях обязательно существует общий интеграл:

$$V_3(x) = q = q_0 = const.$$

Это возможно в трех случаях: 1) $r = 0$; 2) $p = 0$; 3) $A = C$ ($k_2 = 1$).

В первом случае для $r = 0$ и при дополнительном условии $q_0 \neq 0$,

$$C > A = B/2 \quad (4)$$

в [4] показано существование дополнительного интеграла Стеклова:

$$V_4(x) = m\gamma_1^2 - 2q_0^2\gamma_2 = const,$$

который считается частным ввиду его зависимости от q_0 .

Соответствующие уравнения движения при условии (4) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{p} = (2 - k_2)qr + m\gamma_3, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{q} = 0, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = -(pq + m\gamma_1)/k_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь для твердого тела необходимо выполнение условия $1 < k_2 < 3$.

В статье [6] составлены стационарные движения уравнений (5):

$$(A.0) p_0 = q_0 = r_0 = 0; \gamma_{10} = \gamma_{30} = 0; \gamma_{20} = \pm 1;$$

$$(A.1) p_0 = r_0 = 0; 0 \neq q_0 = const; \gamma_{10} = \gamma_{30} = 0; \gamma_{20} = \pm 1;$$

$$(A.2) p_0 = q_0 \frac{\gamma_{10}}{\gamma_{20}}; q_0 = \pm \sqrt{-m\gamma_{20}}; r_0 = 0; \gamma_{10} = \pm \sqrt{1 - \gamma_{20}^2}; 0 < |\gamma_{20}| \leq 1;$$

$$\gamma_{30} = 0; sign \gamma_{20} = -sign m.$$

Во втором случае $p = 0$ при другом условии $q_0 \neq 0$,

$$A > C = B/2 \quad (6)$$

в [5] показано существование дополнительного интеграла Бобылева:

$$V_5(x) = m\gamma_3^2 - 2k_2q_0^2\gamma_2 = const.$$

Он также является частным и для этого случая необходимо выполнение условия $1/3 < k_2 < 1$. Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{p} = k_2qr + m\gamma_3, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{q} = 0, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = [(1 - 2k_2)pq - m\gamma_1]/k_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь предстоит найти стационарные движения для механической системы, описываемой уравнениями (7).

1 О равнозначности частных интегралов Стеклова и Бобылева

Нахождение стационарных движений будем проводить известным методом Рауса — Ляпунова [7–9]. В статье [6] выявлены упомянутые стационарные движения с частным интегралом Стеклова и установлен ряд свойств, позволяющий упростить процесс отыскания стационарных движений. Поэтому здесь уместно применить известные средства анализа стационарных движений для систем с частным интегралом Стеклова. Особенно если возможно установить соответствие между частными интегралами Стеклова и Бобылева.

Эквивалентность механических систем с указанными частными интегралами можно показать сведением записанных в разных координатах уравнений движения (5) и (7) к одинаковой системе дифференциальных уравнений. С этой целью для интеграла Бобылева в системе (7) введем дополнительные промежуточные обозначения:

$$m_1 = Mg \frac{y_0}{C} = \frac{m}{k_2}; k_3 = \frac{A}{C} = \frac{1}{k_2}; k_4 = \frac{B}{C} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$(m_1 \neq 0; 1/3 < k_3 < 1, k_1/3 < k_4 < k_1).$$

В уравнениях механической системы (3) введем систему координат $Ouvw$ с тем же началом отсчета. При этом ось Ou пусть будет направлена по Oz ; ось Ov полностью совпадает с осью Oy ; ось Ow расположена по оси Ox , но в противоположном направлении. В новой системе координат $Ouvw$ легко пересчитать проекции мгновенной угловой скорости: $p^{(1)} = r; q^{(1)} = q; r^{(1)} = -p$, и углов Пуассона: $\mu^{(1)} = \gamma_3; \mu^{(2)} = \gamma_2; \mu^{(3)} = -\gamma_1$.

Уравнения движения (3) в новой системе координат запишутся в следующем виде:

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}^{(1)} = \dot{r} = \left(\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}\right)(-r^{(1)})q^{(1)} - \frac{m}{k_2}(-\mu^{(3)}) = (k_4 - k_3)r^{(1)}q^{(1)} + m_1\mu^{(3)}, \\ \dot{q}^{(1)} = \dot{q} = \frac{(1-k_3)k_1}{k_2}(-r^{(1)})p^{(1)} = \frac{k_3-1}{k_4}r^{(1)}p^{(1)}, \\ \dot{r}^{(1)} = -\dot{p}^{(1)} = (1-k_4)k_2p^{(1)}q^{(1)} - m_1k_2\mu^{(1)} = \frac{(1-k_4)p^{(1)}q^{(1)} - m\mu^{(1)}}{k_3}, \\ \dot{\mu}^{(1)} = \dot{\gamma}_3 = r^{(1)}\mu^{(2)} - q^{(1)}\mu^{(3)}, \\ \dot{\mu}^{(2)} = \dot{\gamma}_2 = p^{(1)}\mu^{(3)} - r^{(1)}\mu^{(1)}, \\ \dot{\mu}^{(3)} = -\dot{\gamma}_1 = q^{(1)}\mu^{(1)} - p^{(1)}\mu^{(2)}. \end{array} \right.$$

При формальной замене в системе (1.1) переменной $p^{(1)}$ вместо p , переменной $q^{(1)}$ вместо q , переменной $r^{(1)}$ вместо r , переменной $\mu^{(1)}$ вместо γ_1 , переменной $\mu^{(2)}$ вместо γ_2 , переменной $\mu^{(3)}$ вместо γ_3 , в точности получилась система вида (3), где роль параметров k_1, k_2 выполняют соответственно k_4, k_3 . Вместе с тем интеграл Бобылева

$$V_5(x) = m \gamma_1^2 - 2k_2 q_0^2 \gamma_2 = const$$

приводится к интегралу вида

$$m_1 \mu^{(3)2} - 2q_0^{(1)2} \mu^{(2)} = const.$$

Тем самым можно утверждать эквивалентность частных интегралов Стеклова и Бобылева.

В соответствии с установленным здесь соответствием интегралов можно применить приведенные в [6] свойства:

- 1) связь интегралов при нахождении стационарных движений с частным интегралом Бобылева по методу Рауса — Ляпунова можно строить только из трех общих интегралов: $V_0(x) = const$, $V_1(x) = const$, $V_2(x) = 1$ при учете условий (6);
- 2) вместе с нахождением решений стационарности для проверки их постоянных величин обязательное использование обращенных в нуль правых частей системы (7).

Поэтому сразу для проверки постоянных решений системы (7) запишем систему алгебраических равенств:

$$(1.2) \quad \begin{cases} f_1 = k_2 q r + m \gamma_3 = 0, & f_4 = r \gamma_2 - q \gamma_3 = 0, \\ f_3 = (1 - 2k_2) p q - m \gamma_1 = 0, & f_5 = p \gamma_3 - r \gamma_1 = 0, \\ f_6 = q \gamma_1 - p \gamma_2 = 0, & f_7 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Их применение будет востребовано после нахождения решений стационарности при построении стационарных движений.

2 Стационарные движения для интеграла Бобылева

Стационарные движения, следуя методу Рауса — Ляпунова [9], ищутся экстремумом интеграла полной энергии при условии существования остальных первых интегралов. При $p \equiv 0$ и условии (6) для механических систем с частным интегралом Бобылева основные общие интегралы движения принимают вид:

$$V_{01}(x) = 2q^2 + r^2 - 2m/k_2 \gamma_2 = const, \quad V_{11} = 2q \gamma_2 + r \gamma_3 = const.$$

Тогда при составлении условий стационарности переменная p исключается из анализа, а уравнения стационарности будут рассматриваться для остальных переменных.

Согласно сказанному составим связку из первых интегралов:

$$K_1(x, \alpha) = V_{01}(x) - \alpha_1 V_{11}(x) - \alpha_2 V_2(x)$$

с вещественными коэффициентами α_1, α_2 .

Уравнения стационарности согласно [10] здесь имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial q} = F_2 = 2(2q - \alpha_1 \gamma_2) = 0, \\ \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial r} = F_3 = 2r - \alpha_1 \gamma_3 = 0, \\ \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial \gamma_1} = F_4 = -2\alpha_2 \gamma_1 = 0, \\ \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial \gamma_2} = F_5 = -2\left(\frac{m}{k_2} + \alpha_1 q + \alpha_2 \gamma_2\right) = 0, \\ \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial \gamma_3} = F_6 = -(\alpha_1 r + 2\alpha_2 \gamma_3) = 0, \\ \frac{\partial K_1(x, \alpha)}{\partial \alpha_2} = F_7 = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Из равенств $F_2 = 0, F_3 = 0$ легко составить соотношение $r = q\gamma_3 / \gamma_2$.

В дальнейшем полагаем $\gamma_2 \neq 0$, иначе при $\gamma_2 = 0$ из $F_2 = 0, F_5 = 0$ должно выполняться $m = 0$, что недопустимо по условию задачи.

Равенство $F_4 = 0$ образует два варианта поиска решений стационарности системы (2.1): 1) $\gamma_1 = 0$, 2) $\alpha_2 = 0$.

Для первого варианта при $\gamma_1 = 0$ упрощается только выражение $F_7 = 0$. Исключение переменной r из $F_3 = 0, F_6 = 0$ приводит к равенству:

$$\gamma_3(\alpha_1^2 + 4\alpha_2) = 0. \quad (2.2)$$

Первое предположение равенства (2.2) $\gamma_3 = 0$ приводит к $r = 0$. Исключение α_1 из уравнений $F_2 = 0, F_5 = 0$ позволяет составить соотношение $q^2 = -(m\gamma_2 + \alpha_2 \gamma_2^2)$. Так как здесь на α_2 не имеются ограничения, то его значение можно выбирать произвольным вещественным и тогда q также будет произвольной величиной. Следовательно, можно записать такое решение стационарности:

$$(P.C.1) \quad p = r = 0; \quad q = const; \quad \gamma_1 = \gamma_3 = 0; \quad \gamma_2 = \pm 1.$$

Для равенств (1.2) найденное решение стационарности выполняется без всяких условий. Тогда стационарным движением будет

$$(II.1) \quad p_0 = r_0 = 0; \quad 0 \neq q_0 = const; \quad \gamma_{10} = \gamma_{30} = 0; \quad \gamma_{20} = \pm 1.$$

В частности, стационарным движением допускается более простое состояние покоя:

$$(II.0) \quad p_0 = q_0 = r_0 = 0; \quad \gamma_{10} = \gamma_{30} = 0; \quad \gamma_{20} = \pm 1.$$

Для другого решения (2.2) при $\gamma_3 \neq 0$ подстановка $\alpha_2 = -\alpha_1^2/4$ в $F_5 = 0$ сводится к равенству $\frac{m}{k_2} + \alpha_1 q - \frac{\alpha_1^2}{4} \gamma_2 = 0$. Следующая подстановка $\alpha_1 = 2q/\gamma_2$ из $F_2 = 0$ приводит последнее соотношение к равенству $k_2 q^2 + m\gamma_2 = 0$, откуда следует $q = \pm \sqrt{\frac{-m\gamma_2}{k_2}}$. Конечно, здесь знак γ_2 подбирается в зависимости от знака m .

Окончательно решением стационарности здесь будет:

$$(P.C.2) \quad p = 0; \quad q = \pm \sqrt{\frac{-m\gamma_2}{k_2}}; \quad r = q \frac{\gamma_3}{\gamma_2}; \quad \gamma_1 = 0; \quad 0 < |\gamma_2| \leq 1; \quad \gamma_3 = \pm \sqrt{1 - \gamma_2^2};$$

$$\text{sign } \gamma_2 = -\text{sign } m.$$

Найденное решение стационарности полностью удовлетворяет всем равенствам системы (1.2) и поэтому является стационарным движением:

$$(II.2) \quad p_0 = 0; \quad q_0 = \pm \sqrt{\frac{-m\gamma_{20}}{k_2}}; \quad r_0 = q_0 \frac{\gamma_{30}}{\gamma_{20}}; \quad \gamma_{10} = 0; \quad 0 < |\gamma_{20}| \leq 1;$$

$$\gamma_{30} = \pm \sqrt{1 - \gamma_{20}^2}, \quad \text{sign } \gamma_{20} = -\text{sign } m.$$

Рассмотрим другой вариант решения $\alpha_2 = 0$. Здесь недопустимо одновременное выполнение $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ в предположении $m \neq 0$. Иначе из $F_5 = 0$ непосредственно следовало бы $m = 0$. Исключение α_1 из $F_2 = 0, F_5 = 0$ приводит к равенству $2k_2 q^2 + m\gamma_2 = 0$.

Соответствующим решением стационарности здесь будет:

$$(P.C.3) \quad p = 0; \quad q = \pm \sqrt{\frac{-m\gamma_2}{2k_2}}; \quad r = q \frac{\gamma_3}{\gamma_2}; \quad \gamma_1 = 0 < |\gamma_2| \leq 1; \quad \gamma_3 = \pm \sqrt{1 - \gamma_2^2},$$

$$\text{sign } \gamma_2 = -\text{sign } m.$$

Его подстановка в равенства (1.2) приводит к $\gamma_3 = 0$. Конечным результатом после проверки условий (1.2) получаются стационарные движения вида (II.1), существующие при конкретном значении q_0 .

Стационарные движения (II.0) реализуются при следующих значениях множителей Лагранжа: $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = \frac{-m}{k_2 \gamma_{20}}$. Для стационарных движений (II.1) и (II.2) значениями множителей Лагранжа являются:

$$\alpha_1 = \pm 2 \sqrt{\frac{-m}{k_2 \gamma_{20}}}; \quad \alpha_2 = \frac{-m}{k_2 \gamma_{20}}.$$

Как и в случае частного интеграла Стеклова, для частного интеграла Бобылева существует восемь простейших стационарных движений.

Конечно здесь может возникнуть вопрос о составлении стационарных движений в предположении постоянными значениями величины $q = q_0 = const$. В изложенном подходе при исключении переменной $p \equiv 0$ вместе с игнорированием общего интеграла $V_3(x) = q = q_0 = const$ и интеграла Бобылева $V_5(x) = m \gamma_3^2 - 2k_2 q_0^2 \gamma_2 = const$ стационарные движения были получены без особых затруднений. Вместе с тем может рассматриваться уточнение постоянной величины q и тогда в уравнениях стационарности (2.1) она должна быть непременной. В таком случае не допускается частная производная от $K_1(x, \alpha)$ по q . Также в интеграле энергии $V_{01}(x) = 2q^2 + r^2 - 2m/k_2 \gamma_2 = const$ первое слагаемое является постоянной величиной и его можно исключить из рассмотрения. В этом случае первыми интегралами будут:

$$V_{02}(x) = r^2 - 2m/k_2 \gamma_2 = const, \quad V_{12} = 2q \gamma_2 + r \gamma_3 = const,$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \text{ Связка интегралов согласно [9] тогда будет такой:}$$

$$K_2(x, \beta) = V_{02}(x) - \beta_1 V_{12}(x) - \beta_2 V_2(x)$$

с вещественными коэффициентами β_1, β_2 . Уравнения стационарности в таком случае имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_2(x, \beta)}{\partial r} = F_{23} = 2r - \beta_1 \gamma_3 = 0, \\ \frac{\partial K_2(x, \beta)}{\partial \gamma_1} = F_{24} = -2\beta_2 \gamma_1 = 0, \\ \frac{\partial K_2(x, \beta)}{\partial \gamma_2} = F_{25} = -2\left(\frac{m}{k_2} + \beta_1 q + \beta_2 \gamma_2\right), \\ \frac{\partial K_2(x, \beta)}{\partial \gamma_3} = F_{26} = -(\beta_1 r + 2\beta_2 \gamma_3) = 0, \\ \frac{\partial K_2(x, \beta)}{\partial \beta_2} = F_{27} = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1) = 0. \end{array} \right.$$

Для равенства $F_{24} = 0$ рассматриваются две возможности составления решений: 1) $\beta_2 = 0$; 2) $\gamma_1 = 0$.

В первой возможности при $\beta_2 = 0$ из равенства $F_{26} = 0$ возникает два варианта решений: а) $\beta_1 = 0$; б) $r = 0$.

В случае первого варианта $\beta_1 = 0$ из $F_{25} = 0$ получается $m = 0$, что недопустимо по условию задачи в предположении $y_0 \neq 0$. Поэтому далее всюду предполагается $\beta_1 \neq 0$.

В случае $r = 0$ из $F_{23} = 0$ следует $\gamma_3 = 0$ ($\beta_1 = 0$, как ранее установлено, не допускается). При этом из $F_{25} = 0$ можно составить решение

$q = -\frac{m}{k_2\beta_1}$, являющееся конечным. Окончательно решение стационарности можно составить в виде:

$$(P.C.4) \quad p = 0; \quad q = -\frac{m}{k_2\beta_1}; \quad r = 0; \quad \gamma_1 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}; \quad \gamma_3 = 0.$$

Подстановка этого решения в (1.2) получает следующие требования:

$$q\gamma_1 = 0; \quad 1 - \gamma_2^2 = 0.$$

Остальные условия выполняются тождественно. Отсюда следует $\gamma_1 = 0; \gamma_2 = \pm 1$. Ввиду значений β_1 , не имеющих определенных значений, здесь полученное стационарное движение полностью совпадает с (II.1).

Для второй возможности при $\gamma_1 = 0$, из равенств $F_{23} = 0, F_{26} = 0$ исключая в общем случае нетривиальные r, γ_3 , можно составить условие:

$$\beta_1^2 + 4\beta_2 = 0.$$

Из равенства $F_{23} = 0$ в предположении $\gamma_3 \neq 0$ выразим $\beta_1 = \frac{2r}{\gamma_3}$. Да-

лее для $F_{26} = 0$ тогда можно заключить $\beta_2 = -r^2/\gamma_3^2$, откуда, в частности, следует $r \neq 0$. Далее из равенства $F_{25} = 0$ в таком случае выразим:

$$q = \frac{\left(\frac{r^2}{\gamma_3^2}\gamma_2 - \frac{m}{k_2}\right)\gamma_3}{2r}. \quad (2.3)$$

Решение стационарности здесь тогда можно составить таким:

$$(P.C.5) \quad p = 0; \quad q = \frac{\left(\frac{r^2}{\gamma_3^2}\gamma_2 - \frac{m}{k_2}\right)\gamma_3}{2r}; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_3 = \pm\sqrt{1-\gamma_2^2}.$$

Подстановка составленного решения в (1.2) задает такие условия:

$$\begin{cases} \frac{k_2 r^2 \gamma_2}{\gamma_3^2} + m = 0, \\ \left(\frac{r^2 \gamma_2}{\gamma_3^2} - \frac{m}{k_2} \right) \gamma_3 - 2r^2 \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы можно установить одно общее равенство $r^2 \gamma_2 + \frac{m}{k_2} \gamma_3^2 = 0$, откуда решением будет $r = \pm \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \sqrt{\frac{-m \gamma_2}{k_2}}$.

Подстановка составленного значения в выражение для q по формуле

(2.3) позволяет выразить $q = \pm \frac{(-m \gamma_2)}{k_2 \sqrt{\frac{-m \gamma_2}{k_2}}} = \pm \sqrt{\frac{-m \gamma_2}{k_2}}$. Таким образом,

в результате стационарным движением и здесь окончательно получается (II.2).

При этом следует отметить, что в последнем подходе (при учете $q = q_0 = const$) стационарное движение получилось с более трудными вычислительными выкладками. Наиболее простое решение состоит в формальной подстановке в первые интегралы только условий: $p = 0, B = 2C$ и системы (1.2) для проверки постоянных решений.

В целом можно отметить следующее.

Свойство 1.

При нахождении методом Рауса — Ляпунова стационарных движений механических систем с частным интегралом Бобылева не следует исключать из анализа переменных q , кроме переменной p , входящей в условия существования частного интеграла при условии $p \equiv 0$.

Величина $q = q_0 = const$ устанавливается только из дифференциальных уравнений движения (7). При этом для стационарных движений все переменные системы (7) являются в конечном итоге постоянными величинами. Поэтому система (2.1) одинаково относится ко всем постоянным значениям фазовых переменных.

Точно такое же свойство имеет место для механических систем с частным интегралом Стеклова, с тем лишь отличием, что используется условие $r \equiv 0$, и тем самым переменная r исключается из анализа.

В целом для механических систем с частными интегралами Стеклова или Бобылева можно составить важное

Свойство 2.

При нахождении методом Рауса — Ляпунова стационарных движений механических систем с частным интегралом Бобылева или Стеклова необязательно участие их аналитических выражений, а необходимы лишь их условия существования.

Для частного интеграла Стеклова условия существования заключаются в выполнении геометрических соотношений $x_0 = z_0 = 0$ и динамических условий: $r = 0, B = 2A$.

Точно так же для частного интеграла Бобылева условия существования состоят в выполнении геометрических соотношений $x_0 = z_0 = 0$ и динамических условий: $p = 0, B = 2C$.

Второе свойство является необычным для метода Рауса — Ляпунова ввиду того, что его основу [9] составляют только первые интегралы уравнений движения.

Заключение

Проведенные в [6] и настоящей статье исследования нахождения методом Рауса — Ляпунова стационарных движений механической системы с частными интегралами В. А. Стеклова и Д. К. Бобылева продемонстрировали возможность применения неполной связки интегралов. Особенность состоит в том, что при их отыскании можно не учитывать аналитические выражения частных интегралов. Неполная связка востребована прежде всего для упрощения построения решений стационарности. Это сопровождается уменьшением вычислительного процесса для формирования стационарных движений.

Стационарные движения для частных интегралов Стеклова и Бобылева формально похожи и одинаковы по количеству стационарных движений.

Литература

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. Москва: Изд-во ГИФМЛ, 1960. 487 с.
2. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 584 с.
3. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
4. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку (сообщение в заседании Харьковского математического общества 5 марта 1893 г.) // Стеклов В. А. Сочинения. Москва: Тип. М. Г. Волчанинова, 1896. 9 с.
5. Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (сообщение в заседании С.-Петербургского мат. общества 15 февраля 1893 г.) // Бобылев Д. К. Сочинения. Москва: Тип. М. Г. Волчанинова, 1896. 13 с.

6. Новиков М. А. О стационарных движениях механической системы с частным интегралом Стеклова // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 3. С. 19–30.

7. Routh E. J. *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion*. London: McMillan, 1877. 108 p.

8. Routh E. J. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*. London: McMillan, 1884. 343 p.

9. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. 1. Москва: Изд-во АН СССР, 1954. С. 276–319.

10. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Статья поступила в редакцию 13.05.2026; одобрена после рецензирования 01.06.2026; принята к публикации 10.06.2026.

ON STEADY-STATE MOTIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH THE PARTIAL BOBYLEV'S INTEGRALS

Mikhail A. Novickov

Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS),
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia
nma@icc.ru

Taisia A. Leonenko

Technician of Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS),
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia
taisialeonenko@yandex.ru

Abstract. The article studies the steady-state motions of a mechanical autonomous conservative system for which a partial D.K. Bobylev's integral may exist. For a system with a partial Bobylev integral, an equivalent system with a partial Steklov integral is shown by a transition to another coordinate system by a non-degenerate change of variables. In this context, the search for steady-state motions of mechanical systems with a partial Bobylev integral is based on analogy with the search for steady-state motions containing a partial Steklov integral. The latter have been previously studied, and their stability has been investigated.

Their searching is based on the well-known effective Routh-Lyapunov method. Moreover, the incomplete bundle of first integrals, consisting of general integrals: energy, moment of momentum and Poisson, has received greater application. The other two remaining first integrals, one of which is partial Bobylev's integral, can be disregarded and may not be involved in the computations. At the same time, it is necessary to take into account only the conditions for the existence of the partial Bobylev integral. In the article, the searches for steady-state motions were carried out using two approaches. One of them did not take into account the additional general integral that

М. А. Новиков, Т. А. Леоненко. О стационарных движениях механических систем, допускающих частный интеграл Бобылева

arose, while the other carried out computations taking this integral into account. Assessing the complexity of constructing stationary solutions and checking their compliance with stationarity, the first approach is shown to be preferable. Steady-state motions obtained the resting position and permanent solutions.

Keywords: steady-state motion, partial integral, bundle of integrals, stationary solution, first integral, equation of motion, constrained extremum.

For citation

Novikov M. A., Leonenko T. A. On Steady-State Motions of a Mechanical System With the Partial Bobylev's Integrals // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 2. P. 27–39.

The article was submitted 13.05.2026; approved after reviewing 01.06.2026; accepted for publication 10.06.2026.