

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-2-51-60

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОИСКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© **Казьмин Иван Дмитриевич**

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

kazminvanya@mail.ru

Аннотация. Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями сводится к эквивалентной задаче оптимального управления с одним терминальным ограничением. Для этой задачи конструируются необходимые условия оптимальности в виде задачи о неподвижной точке. Такой вид задачи позволяет построить проекционный итерационный метод для поиска экстремальных управлений в системах с фазовыми ограничениями. Эффективность метода демонстрируется на модельном примере.

Ключевые слова: система с фазовыми ограничениями, условия оптимальности управления, задача о неподвижной точке, итерационный метод.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Бурятского госуниверситета, проект № 04/01 (2026 г.).

Для цитирования

Казьмин И. Д. Об одном методе поиска экстремальных управлений в системах с фазовыми ограничениями // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 2. С. 51–60.

Введение

Класс задач оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к типу сложнейших задач. Такие задачи исследовались, в частности, в работах [1–3], где для учета фазовых ограничений применялся метод штрафов, с помощью которого задачи сводились к вспомогательным задачам без ограничений. Распространенным подходом для решения задач без ограничений является построение релаксационной последовательности управлений с помощью локальных методов улучшения управления типа градиентных [4–6]. При этом на каждой итерации улучшения управления точное выполнение фазовых ограничений исходной задачи не гарантируется.

В работе [7] в классе задач оптимального управления без ограничений разработаны методы поиска экстремальных управлений на основе поиска неподвижных точек конструируемых операторов в пространстве управлений. В настоящей работе рассматривается метод поиска экстремальных управлений в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями на основе поиска неподвижных точек, который характеризуется условием точного выполнения фазовых ограничений на каждой итерации.

1 Задача и метод

Рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$\dot{z}(t) = p(z(t), u(t), t), \quad z(t_0) = z^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$I(u) = \gamma(z(t_1)) + \int_T P(z(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$h_i(z(t), t) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n_2,$$

$z(t) = (z_1(t), \dots, z_{n_1}(t))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управляющих функций, $U \subseteq R^m$ — компактное выпуклое множество. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U :

$$V = \{v \in PC(T) : v(t) \in U, t \in T\}.$$

Рассматриваемая задача известными способами штрафования за нарушение ограничений может быть приведена к эквивалентной задаче следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (2)$$

$$\Phi_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0, \quad (3)$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $n = n_1 + n_2$. Предполагается, что функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывно-дифференцируемы на R^n , функция $F_0(x, u, t)$ и ее частные производные по x , u непрерывны по совокупности аргументов на множестве $R^n \times U \times T$. Функция $f(x, u, t)$ кусочно-дифференцируема по x , u и удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$:

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Доступное управление $u \in V$ называется допустимым, если выполняется ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим:

$$D = \{v \in V : \Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\}.$$

Рассмотрим функционал и задачу Лагранжа:

$$L(\lambda, u) = \sum_{i=0}^1 \lambda_i \Phi_i(u) \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in R^2. \quad (4)$$

Введем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$:

$$H^\lambda(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F_0(x, u, t),$$

с помощью которой стандартная сопряженная система в задаче Лагранжа (4) принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\sum_{i=0}^1 \lambda_i \varphi_{ix}(x(t_1)). \quad (5)$$

Для управления $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$ — решение системы (4) при $u(t) = v(t)$. Обозначим через $\psi^\lambda(t, v)$, $t \in T$ — решение стандартной сопряженной системы (5) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Известное необходимое условие оптимальности допустимого управления $u \in D$ в форме дифференциального принципа максимума в задаче (1)–(3) при некотором векторе параметров $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$, $\lambda_0 = 0 \vee 1$ можно представить в виде системы уравнений:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u(t), t)), \quad (6)$$

$$\varphi_1(x(t_1, u)) = 0. \quad (7)$$

Система (6), (7) рассматривается как задача о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим уравнением в пространстве доступных управлений. Такое представление дает возможность применить и модифицировать известную теорию и методы неподвижных точек для конструирования итерационного метода для решения задачи (6), (7). В частности, можно применить итерационный метод простой итерации с индексом $k \geq 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u^k), x(t, u^k), u^k(t), t)), \\ \varphi_1(x(t_1, u^{k+1})) = 0.$$

2 Пример

Рассматривается известная задача с фазовыми ограничениями, линейная по управлению, которая исследовалась в работах [8], [9]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t), & \begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = 2, \end{cases} \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t), \end{cases} \\ -8 \leq x_1(t) \leq 0, \quad -4 \leq x_2(t) \leq 2, \quad t \in T = [0, 10], \\ \Phi(u) = 3x_1(10) - x_2(10) \rightarrow \inf_{u \in V}, \\ V = \{u = (u_1, u_2) \in PC(T) : u(t) \in U, t \in T\}, \\ U = \{u = (u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, \quad 1 \leq u_2 \leq 2\}.$$

В работе [8] применялась комбинация методов штрафов. Для решения задач Коши использовался метод Эйлера с пересчетом (2-го порядка точности) с постоянным шагом $h = 10^{-1}$. Стартовое управление: $u_1^0 = -1$, $u_2^0 = 1$. Было получено расчетное значение целевого функционала $\hat{\Phi} = -12.5000$. При этом максимальное нарушение фазовых ограничений на сетке дискретизации имело значение $M = 0.000001$.

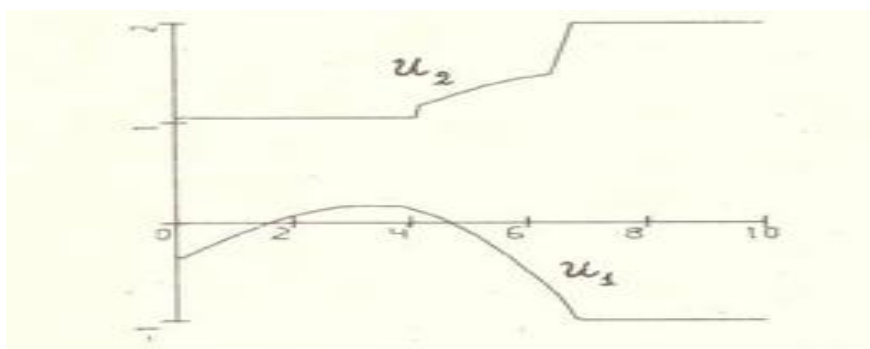


Рис. 1. Расчетные управления, полученные в [8]

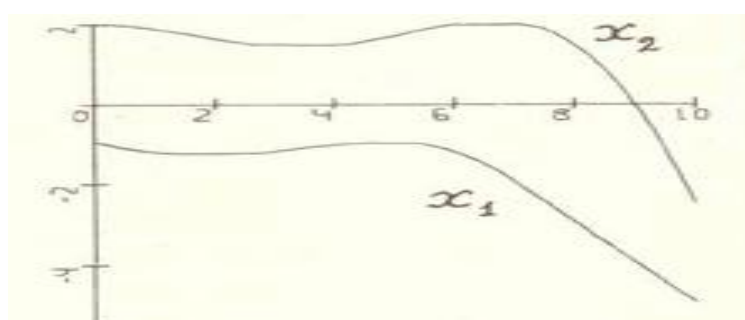


Рис. 2. Расчетные траектории, полученные в [8]

В работе [9] исходная задача сводилась к задаче линейного программирования на основе кусочно-постоянной аппроксимации управления на сетке с шагом $h = 10^{-1}$, для которой использовались многометодные вычислительные технологии. Для решения задач Коши использовался метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности. Стартовое управление: $u_1^0 = -1$, $u_2^0 = 1$. Было получено расчетное значение целевого функционала $\hat{\Phi} = -12.5$. На рисунках 3 и 4 представлены найденное управление и соответствующие ему траектории фазовых переменных.

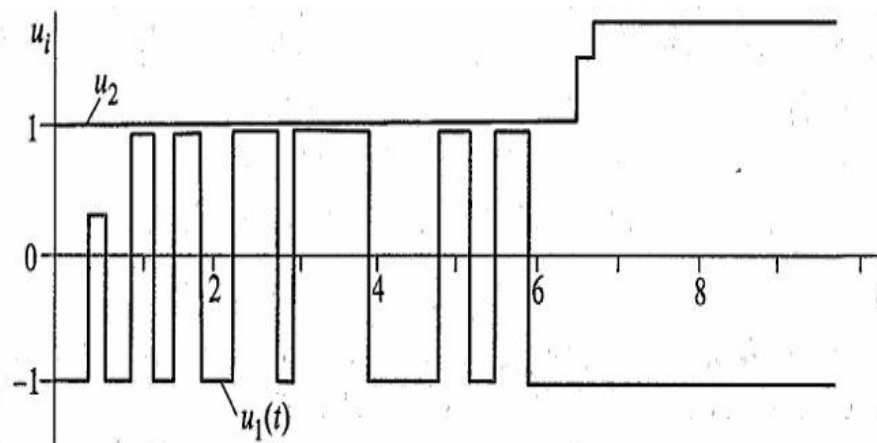


Рис. 3. Расчетные управления, полученные в [9]

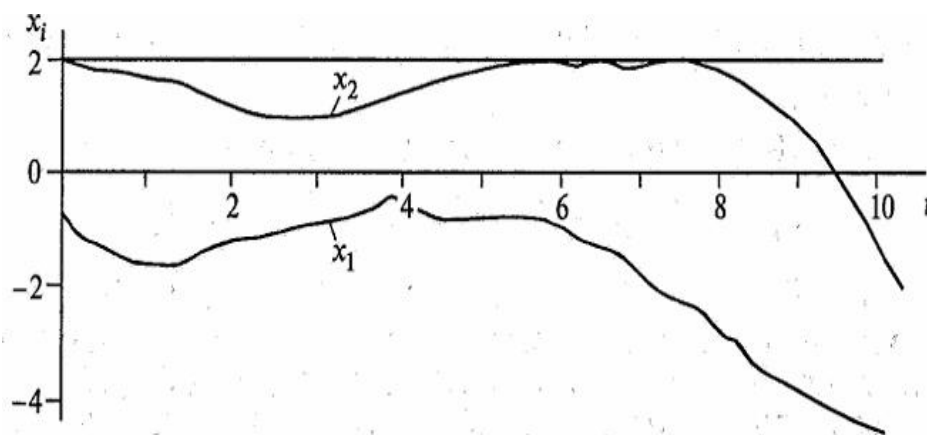


Рис. 4. Расчетные траектории, полученные в [9]

В настоящей работе введением дополнительных фазовых переменных с использованием кубических штрафных функций задача сводится к эквивалентной задаче с одним терминальным ограничением-равенством:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = Q_1(x_1(t)), \\ \dot{x}_4(t) = Q_2(x_2(t)), \end{cases} \begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = 2, \\ x_3(0) = 0, \\ x_4(0) = 0, \end{cases} \quad t \in T,$$

$$Q_1(x_1(t)) = \begin{cases} x_1^3(t), & x_1(t) > 0, \\ 0, & x_1(t) \in [-8, 0], \\ (-x_1(t) - 8)^3, & x_1(t) < -8, \end{cases}$$

$$Q_2(x_2(t)) = \begin{cases} (x_2(t) - 2)^3, & x_2(t) > 2, \\ 0, & x_2(t) \in [-4, 2], \\ (-x_2(t) - 4)^3, & x_2(t) < -4, \end{cases}$$

$$\Phi(u) = 3x_1(10) - x_2(10) \rightarrow \inf_{u \in U},$$

$$x_3(10) + x_4(10) = 0.$$

Рассмотрим задачу без ограничений на основе регулярного функционала Лагранжа:

$$L(\lambda, u) = 3x_1(10) - x_2(10) + \lambda(x_3(10) + x_4(10)) \rightarrow \inf, \lambda \in R.$$

Функция Понтрягина и сопряженная система в задаче Лагранжа соответственно имеют вид:

$$H^\lambda(\psi, x, u, t) = \psi_1 u_1 + \psi_2(x_1 + u_2) + \psi_3 Q_1(x_1) + \psi_4 Q_2(x_2);$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -\psi_2(t) - \psi_3(t)G_1(x_1(t)), & \begin{cases} \psi_1(10) = -3, \\ \psi_2(10) = 1, \\ \psi_3(10) = -\lambda, \\ \psi_4(10) = -\lambda, \end{cases} \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_4(t)G_2(x_2(t)), \\ \dot{\psi}_3(t) = 0, \\ \dot{\psi}_4(t) = 0, \end{cases}$$

$$G_1(x_1(t)) = \begin{cases} 3x_1^2(t), & x_1(t) > 0, \\ 0, & x_1(t) \in [-8, 0], \\ -3(-x_1(t) - 8)^2, & x_1(t) < -8; \end{cases}$$

$$G_2(x_2(t)) = \begin{cases} 3(x_2(t) - 2)^2, & x_2(t) > 2, \\ 0, & x_2(t) \in [-4, 2], \\ -3(-x_2(t) - 4)^2, & x_2(t) < -4. \end{cases}$$

В данной задаче Лагранжа ввиду линейности по управлению дифференциальный принцип максимума является эквивалентным известному принципу максимума.

Задача о неподвижной точке дифференциального принципа максимума (6), (7) в данной задаче принимает вид:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= P_{|u_1| \leq 1} (u_1(t) + \alpha \psi_1(t, u_1)), \\ u_2(t) &= P_{1 \leq u_2 \leq 2} (u_2(t) + \alpha \psi_2(t, u_2)), \\ t &\in [0, 10], \\ x_3(10, u) + x_4(10, u) &= 0. \end{aligned}$$

Итерационный метод простой итерации имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1^{k+1}(t) &= P_{|u_1| \leq 1} (u_1^k(t) + \alpha \psi_1(t, u_1^k)), \\ u_2^{k+1}(t) &= P_{1 \leq u_2 \leq 2} (u_2^k(t) + \alpha \psi_2(t, u_2^k)), \\ t &\in [0, 10], \\ x_3(10, u^{k+1}) + x_4(10, u^{k+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши производилось методом Рунге — Кутты 4-го порядка точности. Значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах фиксированной равномерной сетки T_h на интервале T . В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Расчет проводился с шагом сетки дискретизации $h = 10^{-4}$ при проекционном параметре $\alpha = 10^{-5}$ и стартовом управлении при $k = 0$: $u_1^0 = -1$, $u_2^0 = 1$.

На каждой итерации реализация ограничения сводится к решению неявно заданного уравнения относительно множителя $\lambda \in R$. Численное решение алгебраического уравнения относительно параметра $\lambda \in [-1000, 1000]$ осуществлялось известным методом золотого сечения с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$.

Критерием остановки расчета являлось достижение достаточно малого значения невязки дифференциального принципа максимума для управления u^k :

$$\max_{t \in T_h} \left\{ \begin{aligned} &\psi_1(t, u^k)(u_1^{k+1}(t) - u_1^k(t)) + \\ &+ \psi_2(t, u^k)(u_2^{k+1}(t) - u_2^k(t)) \end{aligned} \right\} \leq 10^{-14}.$$

Было получено расчетное значение целевого функционала $\hat{\Phi} = -12.49992$. При этом максимальное нарушение фазовых ограничений на сетке дискретизации составило значение $M = 0.00009$. На рисунках 5 и 6 представлены графики расчетного управления и соответствующих траекторий.

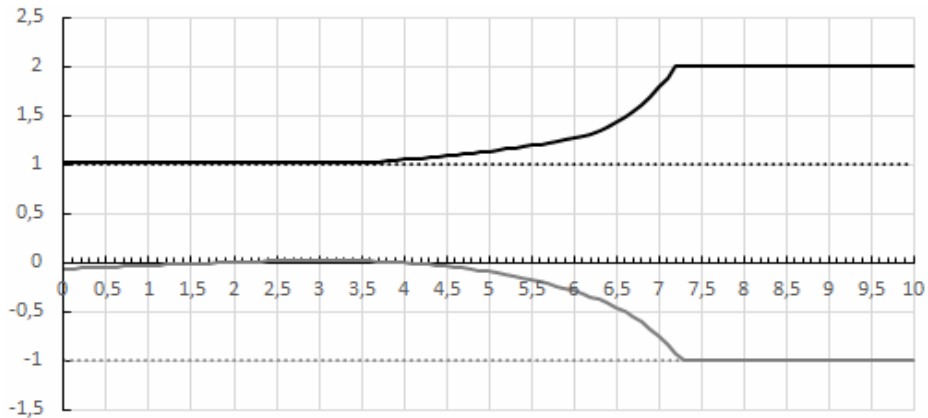


Рис. 5. Расчетные (сплошные линии) и стартовые (пунктирные линии) управления

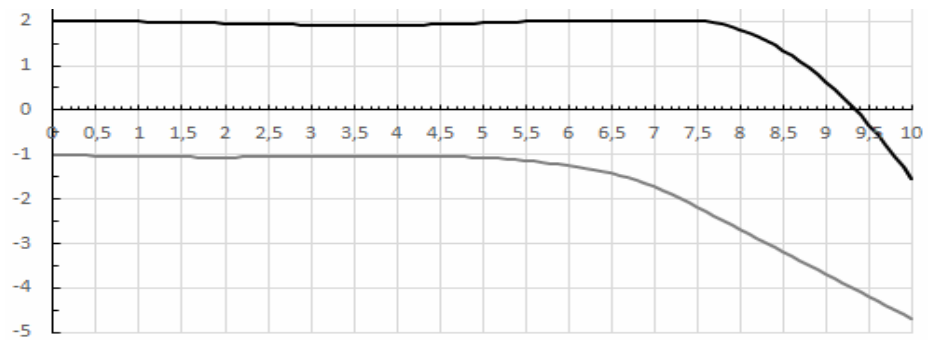


Рис. 6. Расчетные траектории

Расчетное экстремальное управление по своей структуре качественно похоже на управление из работы [8]. Полученное управление, как и в работах [8], [9], является особым, т. е. имеет интервалы, на которых управление принимает неограниченные значения. Полученные количественные результаты демонстрируют достаточно приемлемую для практики вычислительную эффективность предлагаемого метода в сравнении с многометодными технологиями [8], [9].

При достаточно больших $\alpha > 0$ итерационный процесс перестает сходиться, при достаточно малых $\alpha > 0$ сходимость существенно замедляется с соответствующим увеличением суммарного количества расчетных задач Коши. При дальнейшем улучшении точности расчета ограничения $\varepsilon > 0$ наблюдается некоторое уменьшение расчетного значения целевого функционала (в значащих цифрах, начиная с шестой после запятой) с увеличением суммарного количества расчетных задач Коши.

Заключение

Рассматриваемый метод неподвижных точек для поиска экстремальных управлений систем с фазовыми ограничениями характеризуется условием выполнения фазовых ограничений на итерациях метода и достаточно простой вычислительной реализацией. Для вычисления очередного приближения управления на каждой итерации метода решаются две задачи Коши и не используется трудоемкая операция выпуклого или игольчатого варьирования управления для улучшения по целевому функционалу, в отличие от градиентных методов. В предлагаемом методе проекционный параметр $\alpha > 0$ фиксируется, его можно легко подобрать экспериментально для выполнения сходимости итерационного процесса метода в каждой конкретной задаче.

Указанные свойства важны для повышения вычислительной эффективности решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, в том числе особых задач, которые имеют особые экстремальные управления.

Литература

1. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. Москва: Наука, 1997. 288 с.
2. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. Москва: Наука, 1982. 432 с.
3. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва: Наука, 1978. 488 с.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. 340 с.
5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980. 518 с.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
7. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224. С. 19–27.
8. Грачев Н. И., Фильков А. Н. Решение задач оптимального управления в системе ДИСО. Москва: ВЦ АН СССР, 1986. 66 с.
9. Тятюшкин А. И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006. 343 с.

Статья поступила в редакцию 24.05.2026; одобрена после рецензирования 01.06.2026; принята к публикации 10.06.2026.

ON A METHOD FOR SEARCHING FOR EXTREMAL CONTROLS
IN SYSTEMS WITH PHASE CONSTRAINTS

Ivan D. Kazmin

Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Senior researcher,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. An optimal control problem with phase constraints is reduced to an equivalent optimal control problem with a single terminal constraint. For this problem, the necessary optimality conditions are constructed in the form of a fixed-point problem. This type of problem allows for the construction of a projection iterative method for finding extremal controls in systems with phase constraints. The effectiveness of the method is demonstrated using a model example.

Keywords: system with phase constraints, control optimality conditions, fixed point problem, iterative method.

For citation

Kazmin I. D. On a Method for Searching for Extremal Controls in Systems With Phase Constraints // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 2. P. 51–60.

The article was submitted 24.05.2026; approved after reviewing 01.06.2026; accepted for publication 10.06.2026.