

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-2-61-73

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ

© Курохтин Вениамин Юрьевич

кандидат технических наук,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

kurokhtin91@gmail.com

Аннотация. Для приближенного решения задачи оптимального управления с ограничениями рассматривается ее аппроксимация в классе кусочно-постоянных управлений в форме конечномерной задачи оптимизации. В конечномерной задаче конструируется условие оптимальности в виде задачи о неподвижной точке в пространстве управлений. Такое представление позволяет применить и модифицировать известную теорию и методы решения задач о неподвижной точке для поиска кусочно-постоянных экстремальных управлений в системах с ограничениями. Эффективность предлагаемого подхода неподвижных точек для поиска приближенных экстремальных управлений в задаче оптимального управления с ограничениями иллюстрируется на тестовом примере.

Ключевые слова: управляемая система с ограничениями, кусочно-постоянное управление, условие оптимальности управления, задача о неподвижной точке, итерационный метод.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова (проект № 04/01, 2026 г.).

Для цитирования

Курохтин В. Ю. Приближенная оптимизация управляемых систем с ограничениями на основе кусочно-постоянных аппроксимаций управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 2. С. 61–73.

Введение

Распространенным подходом к решению задач оптимального управления с ограничениями является сведение к вспомогательным задачам без ограничений с помощью штрафных функционалов или функционалов Лагранжа. Для решения указанных вспомогательных задач традиционно используются локальные градиентные методы [1; 2], а также нелокальные методы улучшения управления, получившие развитие в работах [3–5]. В работах [6; 7] разработан подход, основанный на представлении необходимых условий оптимальности в форме задач о неподвижной точке операторов в пространстве управлений.

Для приближенного решения задач оптимального управления часто используют дискретную аппроксимацию управлений в различных классах функций [8–13].

В настоящей работе предлагается метод приближенного решения задач оптимального управления с ограничениями в классе кусочно-постоянных управлений на основе необходимых условий оптимальности в виде задач о неподвижной точке.

1 Задача с ограничениями

Рассматривается класс задач оптимального управления с ограничениями, приводимых к следующему каноническому виду:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x^0, u(t) \in U \subset R^m, t \in T = [t_0; t_1], \quad (1)$$

$$J_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (2)$$

$$J_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0, \quad (3)$$

в котором $x(t) \in R^n$ — кусочно-дифференцируемая векторная функция, $u(t)$ — m -мерный вектор управляющих функций, U — замкнутое выпуклое множество. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U : $V = \{u \in PC(T) : u(t) \in U, t \in T\}$. Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируемы на R^n , функции $F_0(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их частные производные по x, u непрерывны по совокупности аргументов на множестве $R^n \times U \times T$. Функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$:

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

К виду (1)–(3) стандартными способами штрафования за нарушение ограничений могут быть сведены многие задачи оптимального управления с фазовыми и терминальными ограничениями.

Доступное управление $u \in V$ называется допустимым, если выполняется функциональное ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим

$$D = \{u \in V : J_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\}.$$

Приближенное решение исходной задачи (1)–(3) будем искать в классе кусочно-постоянных управлений. Для этого введем разбиение фиксированного временного интервала $T = [t_0; t_1]$ на N подынтервалов $T_k = [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, таких что $t_N = t_1$. Аппроксимирующая задача рассматривается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_k, t), x(t_0) = x^0, u_k \in U \subset R^m, \\ t \in T_k &= [t_{k-1}; t_k], k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_N)) + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} F_0(x(t), u_k, t) dt \rightarrow \inf_{u=\{u_1, \dots, u_N\} \in \Omega}, \quad (5)$$

$$\Phi_1(u) = \varphi_1(x(t_N)) = 0. \quad (6)$$

Допустимое кусочно-постоянное управление определяется N -мерным набором m -мерных векторов $u = \{u_1, \dots, u_N\}, u_k \in U, k = 1, 2, \dots, N$. Обозначим Ω множество допустимых наборов векторов управлений.

Обозначим через $x(t, v), t \in T = [t_0; t_N]$ решение системы (4) при управлении $v = \{v_1, \dots, v_N\} \in \Omega$. Значения $x(t, v), t \in T_k, k = 1, 2, \dots, N$ определяются путем последовательного интегрирования системы (4) на интервалах T_k при $u_k = v_k, t \in T_k, k = 1, 2, \dots, N$.

Задача (4)–(6) может рассматриваться как конечномерная задача математического программирования.

Рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе функционала Лагранжа:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_k, t), x(t_0) = x^0, u_k \in U \subset R^m, \\ t \in T_k &= [t_{k-1}; t_k], k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

$$L^\lambda(u) = \lambda_0 \Phi_0(u) + \lambda_1 \Phi_1(u) \rightarrow \inf_{u=\{u_1, \dots, u_N\} \in \Omega}, \lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in R^2, \lambda \neq 0. \quad (8)$$

Введем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$ и стандартную сопряженную систему в задаче Лагранжа (7)–(8):

$$\begin{aligned} H^\lambda(\psi, x, w, t) &= \langle \psi, f(x, w, t) \rangle - \lambda_0 F_0(x, w, t), w \in U \subset R^m, \\ \dot{\psi}(t) &= -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u_k, t), t \in T_k, k = 1, 2, \dots, N, \\ \psi(t_N) &= -\varphi_x^\lambda(x(t_N)), \varphi^\lambda(x) = \lambda_0 \varphi_0(x) + \lambda_1 \varphi_1(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Для допустимого управления $v = \{v_1, \dots, v_N\} \in \Omega$ обозначим через $\psi^\lambda(t, v), t \in T = [t_0; t_N]$ решение стандартной сопряженной системы (9), полученное последовательным интегрированием на интервалах разбиения $T_k, k = 1, 2, \dots, N$ при $u_k = v_k, t \in T_k, k = 1, 2, \dots, N$ и $x(t) = x(t, v), t \in T$.

В соответствии с известной формулой приращения целевого функционала [1] для задач оптимального управления без ограничений в классе кусочно-непрерывных управлений имеет место формула приращения функции Лагранжа в задаче (7), (8):

$$L^\lambda(v) - L^\lambda(u) = - \sum_{k=1}^N \int_{T_k} \langle H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u_k, t), \Delta u_k \rangle dt + o\left(\sum_{k=1}^N \|\Delta u_k\|\right), \quad (10)$$

где H_u обозначает производную функции Понтрягина по переменной управления, $\Delta u_k = v_k - u_k$.

На основе формулы приращения (10) можно получить необходимое условие оптимальности в задаче (4)–(6) для управления $u \in \Omega$ в следующем виде при некотором $\lambda \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^N \int_{T_k} \langle H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u_k, t), v_k - u_k \rangle dt \leq 0,$$

$$v = \{v_1, \dots, v_N\}, v_k \in U, k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\varphi_1(x(t_N, u)) = 0.$$

Эти условия можно представить в эквивалентной форме:

$$\int_{T_k} \langle H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u_k, t), w - u_k \rangle dt \leq 0, \quad w \in U, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

$$\varphi_1(x(t_N, u)) = 0.$$

Систему (11) можно записать в виде системы уравнений:

$$u_k = \arg \max_{w \in U} \int_{T_k} \langle H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u_k, t), w \rangle dt, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

$$\varphi_1(x(t_N, u)) = 0.$$

Обозначим через P_Y оператор проектирования на множество $Y \subset R^m$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \operatorname{argmin}_{y \in Y} (\|y - z\|), z \in R^m.$$

С помощью введенного оператора проектирования систему (11) можно также представить в виде системы уравнений с параметром $\alpha > 0$:

$$u_k = P_U \left(u_k + \alpha \int_{T_k} H_u^\lambda(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), u_k, t) dt \right), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

$$\varphi_1(x(t_N, u)) = 0.$$

Отметим, что для выполнения условия оптимальности (12) достаточно проверить выполнение условия (13) для некоторого $\alpha > 0$. Обратно, из выполнения условия (12) следует выполнение условия (13) для всех $\alpha > 0$.

Вырожденный случай ($\lambda_0 = 0, \lambda_1 \neq 0$) необходимого условия оптимальности в конкретных задачах оптимального управления, как правило, исследуется аналитически. В невырожденном случае ($\lambda_0 = 1, \lambda_1 \in R$) полученные системы уравнений (12) и (13) относительно пары неизвестных $(u, \lambda_1) \in \Omega \times R$ решаются численными методами.

В данной работе для невырожденного случая рассматривается подход к поиску экстремальных управлений, основывающийся на представлении необходимых условий оптимальности (12) и (13) в форме специальных задач о неподвижной точке операторов управления в конечномерном пространстве допустимых наборов векторов $u = \{u_1, \dots, u_N\}$. Такое представ-

ление дает возможность применить и модифицировать известную теорию и методы неподвижных точек для конструирования итерационных алгоритмов поиска экстремальных управлений как решений рассматриваемых задач о неподвижной точке.

2 Итерационные методы

Для решения системы (12) рассматривается итерационный процесс с индексом $s \geq 0$ с заданным начальным приближением управления $u^0 \in \Omega$ при $s = 0$:

$$u_k^{s+1} = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_{T_k} \left\langle H_u^\lambda \left(\psi^\lambda(t, u^s), x(t, u^s), u_k^s, t \right), w \right\rangle dt, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

$$\varphi_1 \left(x(t_N, u^{s+1}) \right) = 0.$$

При заданном $\alpha > 0$ для решения системы (13) рассматривается процесс:

$$u_k^{s+1} = P_U \left(u_k^s + \alpha \int_{T_k} H_u^\lambda \left(\psi^\lambda(t, u^s), x(t, u^s), u_k^s, t \right) dt \right), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$\varphi_1 \left(x(t_N, u^{s+1}) \right) = 0.$$

В невырожденном случае ($\lambda_0 = 1$) на каждой итерации предлагаемых процессов решается неявно заданное уравнение:

$$\varphi_1 \left(x(t_N, u^{s+1}) \right) = 0 \quad (16)$$

относительно скалярного множителя Лагранжа $\lambda_1 \in R$. В случае если такое решение существует, итерационные приближения управлений в процессах (14) и (15) являются допустимыми, т. е. удовлетворяют ограничениям задачи. При этом начальное приближение $u^0 \in \Omega$ при $s = 0$ можно выбрать недопустимым.

В отличие от известных градиентных методов предлагаемые методы (14) и (15) для поиска экстремальных управлений не гарантируют релаксацию по целевой функции на каждой итерации методов. Свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления и отсутствием на каждой итерации достаточно трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления в окрестности текущего приближения управления. На каждой итерации осуществляется поиск множителя Лагранжа $\lambda_1 \in R$, при котором выполняется терминальное ограничение (16). Это позволяет сузить пространство поиска экстремальных управлений до пространства допустимых управлений.

Указанные свойства предлагаемых итерационных процессов являются важными для практической реализации поиска экстремальных управлений. В частности, итерационные процессы можно использовать для поиска приемлемых на практике допустимых управлений для достижения заданных значений критерия оптимальности.

Сходимость указанных итерационных процессов можно анализировать с помощью известного принципа сжимающих отображений [14]. Результаты сходимости итерационных процессов зависят от выбора начального приближения процессов. Процесс (15), в отличие от (14), обладает возможностью регулировки свойства сходимости за счет выбора параметра проектирования $\alpha > 0$.

3 Пример

Рассмотрим известную тестовую задачу оптимального управления с терминальным фазовым ограничением [15]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t); x_1(0) = 1; \\ \dot{x}_2(t) &= u^2(t) + x_1^2(t); x_2(0) = 0; \\ \Phi_0(u) &= x_2(2) \rightarrow \inf; \Phi_1(u) = x_1(2) = 0; \\ u(t) &\in U = [-2; 2], t \in T = [0; 2]. \end{aligned}$$

Известно точное решение поставленной задачи [15]:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) = \left(-\frac{e^t - e^{4-t}}{-1 + e^4}, \frac{e^{2t} - e^{8-2t} + e^8 - 1}{(-1 + e^4)^2}, -\frac{e^t + e^{4-t}}{-1 + e^4} \right), \tilde{\Phi}_0 = 1,0373.$$

В работе [15] задача решалась с применением алгоритма поиска управления в виде кусочно-линейной функции на двух интервалах с нефиксированным моментом переключения. Начальное управление выбиралось равным

$$u^0(t) = \begin{cases} t-1, & t \in [0; 1], \\ 0, & t \in [1; 2] \end{cases}$$

с точкой переключения $\tau_1^0 = 1$. При этом отклонение $x_1^0(2)$ от нуля составляло 0,5. Получено расчетное управление:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0,54t - 0,96, & t \in [0; 1,389], \\ 0,18t - 0,61, & t \in [1,389; 2], \end{cases}$$

Момент переключения сдвинулся в точку $\tau_1^* = 1,389$, а отклонение $x_1^*(2)$ от нуля уменьшилось до 0,0032. Значение целевой функции составило $\Phi_0^* = 1,0387$. На рисунке 1 представлены графики найденного управления u^* и соответствующей ему траектории x_1^* .

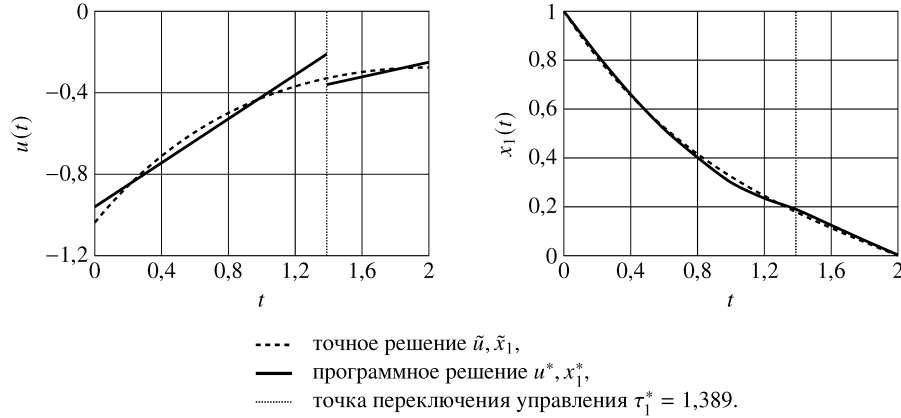


Рис. 1. Графики управления u^* и траектории x_1^* [15]

Аппроксимируем задачу в классе кусочно-постоянных управлений с разбиением интервала $T = [0; 2]$ на N частей. Конечномерная задача аппроксимации рассматривается с управлением $u = \{u_1, \dots, u_N\}$, $u_k \in U = [-2; 2]$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим несколько случаев, когда N принимает следующие значения: 2; 4; 8; 100. Границы интервалов разбиения вычисляются по формуле:

$$T_k = [t_{k-1}; t_k], \quad t_k = \frac{2k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функция Понтрягина и сопряженная система в аппроксимирующей задаче имеют вид:

$$H^\lambda(\psi, x, \omega, t) = \psi_1 \omega + \psi_2 (\omega^2 + x_1^2);$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -2\psi_2(t)x_1(t), \quad \psi_1(2) = -\lambda_1,$$

$$\dot{\psi}_2(t) = 0, \quad \psi_2(2) = -1.$$

В случае $N = 2$ задача о неподвижной точке принципа максимума (13) с $u = \{u_1, u_2\}$ при $\alpha > 0$ принимает вид:

$$u_1 = P_{[-2; 2]} \left(u_1 + \alpha \int_0^1 (\psi_1(t, u) + 2\psi_2(t, u)u_1) dt \right),$$

$$u_2 = P_{[-2; 2]} \left(u_2 + \alpha \int_1^2 (\psi_1(t, u) + 2\psi_2(t, u)u_2) dt \right),$$

$$x_1(2, u) = 0.$$

В случае других N уравнения для $u_k, k = 1, 2, \dots, N$ составляются по аналогии.

Решим поставленную задачу аналитически для случая $N = 2$.

Интегрируя фазовую и сопряженную системы уравнений на интервалах $T_1 = [0; 1]$ и $T_2 = [1; 2]$ при кусочно-постоянном управлении $u = \{u_1, u_2\}$, получаем систему уравнений:

$$u_1 = P_{[-2; 2]} \left(u_1 + \alpha \left(-\frac{14}{3} u_1 - u_2 - \lambda_1 - 3 \right) \right),$$

$$u_2 = P_{[-2; 2]} \left(u_2 + \alpha \left(-u_1 - \frac{8}{3} u_2 - \lambda_1 - 1 \right) \right),$$

$$u_1 + u_2 + 1 = 0.$$

Методом несложного перебора возможных случаев системы получаем единственное решение:

$$u_1^* = -\frac{11}{16} = -0,6875; u_2^* = -\frac{5}{16} = -0,3125;$$

$$\lambda_1^* = \frac{25}{48} \approx 0,5208; \Phi_0^*(u) = \frac{103}{96} \approx 1,0729.$$

Для произвольного N задача о неподвижной точке принципа максимума (13) с $u = \{u_1, \dots, u_N\}$ при $\alpha > 0$ принимает вид:

$$u_k = P_{[-2; 2]} \left(u_k + \alpha \int_{T_k} (\psi_1(t, u) + 2\psi_2(t, u) u_k) dt \right), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_1(2, u) = 0.$$

Для численного решения задачи о неподвижной точке с различными N применялся итерационный процесс метода неподвижных точек (15) с начальным управлением $u^0 = \{u_1^0, \dots, u_N^0\}$, $u_k^0 = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$:

$$u_k^{s+1} = P_{[-2; 2]} \left(u_k^s + \alpha \int_{T_k} (\psi_1(t, u^s) + 2\psi_2(t, u^s) u_k^s) dt \right), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_1(2, u^{s+1}) = 0.$$

Численное решение задач Коши для фазовой и сопряженной систем осуществлялось с помощью подпрограммы DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования Fortran, реализующей метод Рунге — Кутты — Вернера [16]. Значения расчетных фазовых, сопряженных и управляющих переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-3}$ на интервале $[0; 2]$. Использовался следующий критерий окончания итераций:

$$\max_{t_k, k=1, 2, \dots, N} \left\{ \|u^{s+1}(t_k) - u^s(t_k)\| \right\} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$ при всех N . Для решения уравнения $x_1(2, u^{s+1}) = 0$ относительно множителя Лагранжа λ_1 с точностью 10^{-6} использовался комби-

В. Ю. Курохтин. Приближенная оптимизация управляемых систем с ограничениями на основе кусочно-постоянных аппроксимаций управления

нированный алгоритм, включающий метод деления отрезка пополам и метод Фибоначчи на интервале $\lambda_1 \in [-1000; 1000]$. Метод Фибоначчи находит значение λ_1 , при котором значение $\|x_1(2, u^{s+1})\|$ максимально сближается с осью абсцисс в случае, если корень уравнения $x_1(2, u^{s+1}) = 0$ на указанном интервале отсутствует.

Результаты расчетов представлены в таблице 1. При $N = 2, 4, 8$ приведены результаты расчетов с $\alpha = 0,5$. При $N = 100$ представлены результаты расчета с $\alpha = 10$.

Таблица 1

Результаты расчетов для начального управления $u_k^0 = 0, k = 1, 2, \dots, N$

N	Число итераций	Управления		$\Phi_0(u)$	$\Phi_1(u)$
		k	u_k		
2	10	1	-0,6875	1,0729	$-4,02 \cdot 10^{-7}$
		2	-0,3125		
4	12	1	-0,8312	1,0465	$-2,85 \cdot 10^{-6}$
		2	-0,5262		
		3	-0,3584		
		4	-0,2843		
8	21	1	-0,9241	1,0396	$-9,41 \cdot 10^{-7}$
		2	-0,7301		
		...			
		7	-0,2953		
		8	-0,2776		
100	14	1	-1,0274	1,0373	$-4,37 \cdot 10^{-7}$
		2	-1,0079		
		...			
		99	-0,2757		
		100	-0,2755		

Для других начальных управлений u^0 ($u_k^0 = 2, u_k^0 = 1, u_k^0 = -1, u_k^0 = -2, k = 1, 2, \dots, N$) итерационный процесс сходится с получением значений целевой функции, совпадающих с точностью до четырех знаков после запятой со значениями, приведенными в таблице 1. Соответствующие результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты расчетов для других начальных управлений u^0

N	α	$u_k^0, k = 1, 2, \dots, N$				$\Phi_0(u)$	$\Phi_1(u)$ (среднее)
		2	1	-1	-2		
		Количество итераций					
2	0,5	11	11	10	11	1,0729	$-2,66 \cdot 10^{-6}$
4		12	11	9	11	1,0465	$-4,21 \cdot 10^{-6}$
8		23	22	21	22	1,0396	$-2,21 \cdot 10^{-6}$
100	10	17	16	14	16	1,0373	$-1,62 \cdot 10^{-6}$

Проведенные расчеты в рамках примера демонстрируют получение достаточно хороших приближений решения исходной задачи по значению функционала при выборе достаточно небольшого количества временных интервалов кусочно-постоянной аппроксимации.

На рисунках 2–5 представлены графики полученных управлений и соответствующих фазовых траекторий переменной x_1 для рассмотренных N .

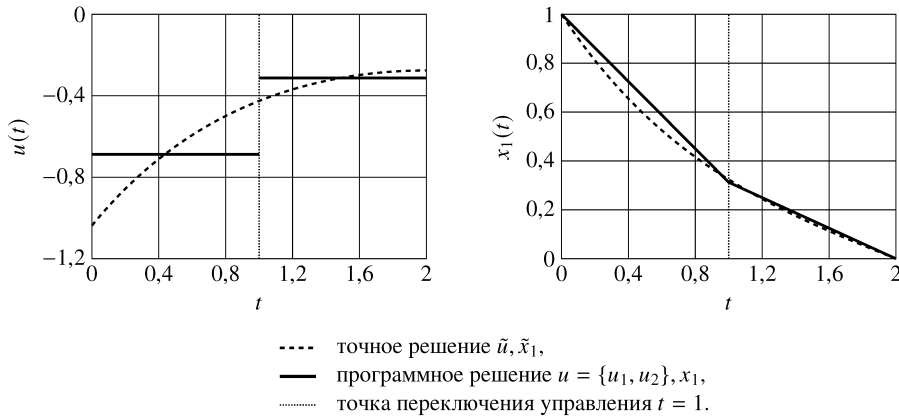


Рис. 2. Графики управления и фазовой траектории x_1 ($N = 2$)

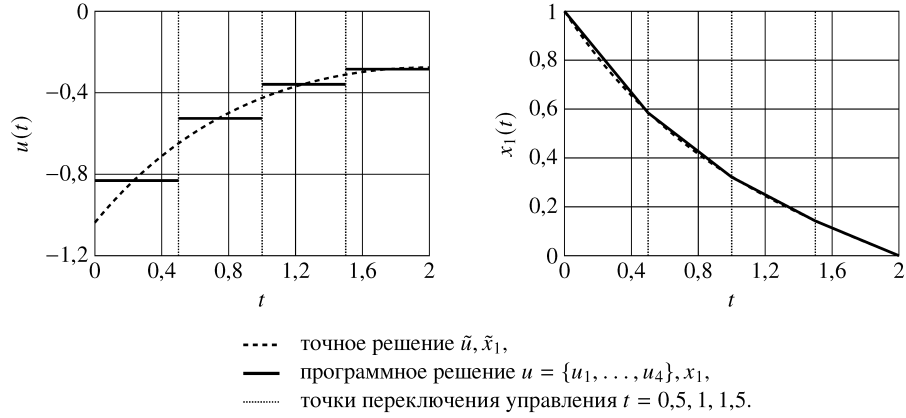


Рис. 3. Графики управления и фазовой траектории x_1 ($N = 4$)

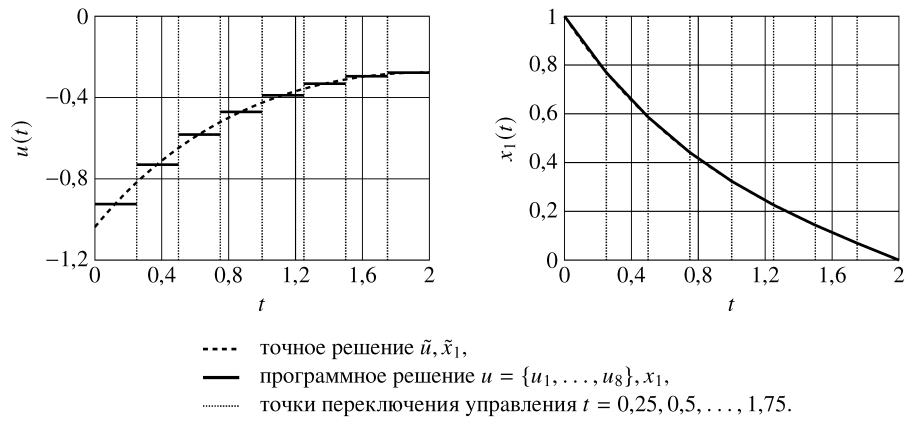


Рис. 4. Графики управления и фазовой траектории x_1 ($N = 8$)

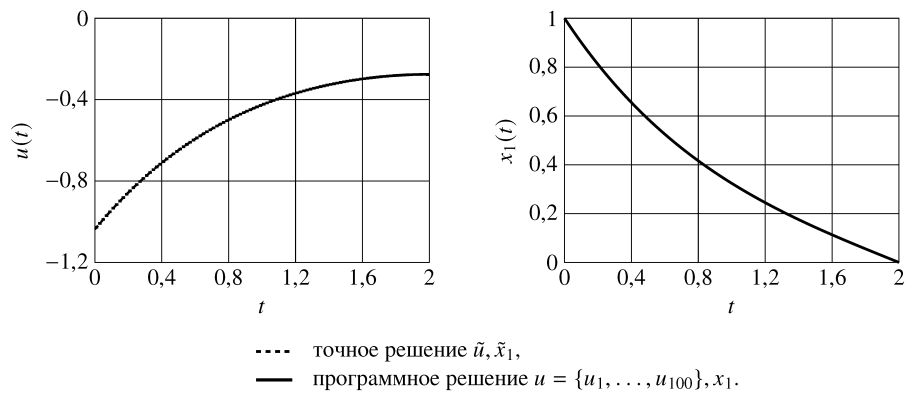


Рис. 5. Графики управления и фазовой траектории x_1 ($N = 100$)

Заключение

Разработанный итерационный метод приближенного решения задач оптимального управления с ограничениями в классе кусочно-постоянных управлений характеризуется выполнением ограничений задачи в ходе итераций, нелокальностью последовательных приближений управления и отсутствием трудоемкой процедуры варьирования управления в окрестности текущего приближения в отличие от градиентных методов. Результаты численных расчетов тестовой задачи показывают, что предложенный метод позволяет получать достаточно точные приближения экстремальных управлений даже при небольшом количестве временных интервалов дискретизации управления. Указанные свойства метода являются важными для повышения эффективности поиска приближенного решения задач с ограничениями.

Литература

1. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. 340 с.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980. 518 с.
3. Новые методы улучшения управляемых процессов / В. И. Гурман, В. А. Батулин, Е. В. Данилина [и др.]. Новосибирск: Наука, 1987. 184 с.
4. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
5. Krotov V. F. *Global Methods in Optimal Control*. New York: Marcel Dekker, 1996. 384 p.
6. Buldaev A. S., Burlakov I. D. On a method for finding extremal controls in systems with constraints // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. 2019. Т. 30. С. 16–30. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.30.16.
7. Булдаев А. С., Думнов В. А. Операторные формы и методы принципа максимума в задачах оптимального управления с ограничениями // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2022. Т. 213. С. 47–53. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-47-53.
8. Болдырев В. И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. № 1. С. 28–123.
9. Квитко А. Н., Якушева Д. Б. Алгоритм построения кусочно-постоянного синтезирующего управления при решении граничной задачи для нелинейной стационарной системы // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2012. № 1. С. 138–145.
10. Моисеев А. А. Оптимальное управление при дискретных управляющих воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1991. № 9. С. 123–132.
11. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. Москва: Наука, 1975. 280 с.
12. Levine W. S. *The control handbook: Control system advanced methods*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2010. 942 p.
13. Li R., Teo K. L., Wong K. H., Duan G. R. Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems. *Mathematical and Computer Modelling*. 2006; 43 (11–12): 1393–1403. DOI: 10.1016/j.mcm.2005.08.012.

В. Ю. Курохтин. Приближенная оптимизация управляемых систем с ограничениями на основе кусочно-постоянных аппроксимаций управления

14. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.

15. Фесько О. В. Модели и методы управления параметризованной структуры: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Переславль-Залесский, 2013. 106 с.

16. Бартеньев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Москва: Диалог-МИФИ, 2001. Т. 3. 372 с.

Статья поступила в редакцию 24.05.2026; одобрена после рецензирования 01.06.2026; принята к публикации 10.06.2026.

APPROXIMATE OPTIMIZATION OF CONSTRAINED CONTROL SYSTEMS BASED ON PIECEWISE CONSTANT CONTROL APPROXIMATIONS

Veniamin Yu. Kurokhtin
Cand. Sci. (Engineering),
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. For the approximate solution of a constrained optimal control problem, its approximation in the class of piecewise constant controls is considered in the form of a finite-dimensional optimization problem. In the finite-dimensional problem, an optimality condition is constructed as a fixed point problem in the control space. This representation enables the application and modification of the well-known theory and methods for solving fixed point problems to find piecewise constant extremal controls in constrained systems. The effectiveness of the proposed fixed point approach for searching for approximate extremal controls in the constrained optimal control problem is illustrated by a test example.

Keywords: constrained control system, piecewise-constant control, control optimality condition, fixed point problem, iterative method.

For citation

Kurokhtin V. Yu. Approximate Optimization of Constrained Control Systems Based on Piecewise Constant Control Approximations // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 2. P. 61–73.

The article was submitted 24.05.2026; approved after reviewing 01.06.2026; accepted for publication 10.06.2026.