

Научная статья

УДК 517.923, 531.36

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-3-3-15

ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАВЕНСТВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

© Новиков Михаил Алексеевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
nma@icc.ru

Аннотация. В статье рассматриваются явное и косвенное учитывания различных алгебраических равенств, возникающих при исследовании механических задач. В большей мере это касается устойчивости стационарных движений.

Неявное учитывание упомянутых равенств вызвано прежде всего сохранением всех исходных переменных, участвующих в описании движения системы. Также такой способ применяется в составлении уравнений стационарности, исследовании условной знакоопределенности двух квадратичных форм и устойчивости стационарных движений. Хотя при таком подходе часто в нелинейных системах не достигается совпадение достаточных условий устойчивости с необходимыми, он является наиболее распространенным в практических исследованиях.

Особо рассматривается известная задача о знакоопределенности одной знакопеременной квадратичной формы на равной нулю другой знакопеременной квадратичной форме, что выражается явной заменой переменных. По теореме Финслера такая задача эквивалентна знакоопределенности связки из этих двух квадратичных форм, что сводится к неявной замене переменных. В вычислительном аспекте для этого вопроса предпочтительнее неявной исключение переменных.

Для более подробного анализа больше всего подходящим способом является предварительное исключение некоторых переменных. Часто такой подход ввиду меньшего количества переменных позволяет повысить эффективность проведения исследования. В вычислительном процессе нахождения стационарных движений, исследования их устойчивости, условной знакоопределенности двух форм или функций разных порядков такой подход является наиболее востребованным.

В целом рациональным способом является комбинированное применение явного и косвенного учитываний предоставленных алгебраических равенств.

Ключевые слова: полиномиальное равенство, первые интегралы, связка квадратичных форм, знакоопределенность форм, собственное значение, знакопостоянство формы, знакоопределенность связки двух форм.

Благодарности

Статья выполнена в проекте № 126021217176-0.

Для цитирования

Новиков М. А. Об исключении алгебраических равенств в задачах механики // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 3. С. 3–15.

Введение

В описании механических систем часто участвуют разного вида алгебраические равенства. Их можно рассматривать, в частности, дополнительными ограничениями в исследуемых задачах. Кроме того, они могут выступать условиями существования дополнительных интегралов, общих или частных. Аналитические выражения дополнительных интегралов тоже представляют алгебраические равенства.

Для аналитических представлений алгебраических равенств ставится вопрос об их учетывании в явной или неявной форме. При явном учетывании выполняется разрешение относительно одной какой-либо переменной через остальные и затем осуществляется подстановка в описание математической модели исследуемой задачи.

В описании консервативных систем часто используется функция Гамильтона, по которой составляются дифференциальные уравнения движения [1]. Механические системы общего вида характеризуются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Аналогом функции Гамильтона в последних системах является интеграл полной энергии [1–3].

При неявном учетывании некоторых равенств способом Лагранжа [4] формируется связка из функции Гамильтона (интеграла энергии) и участвующих алгебраических равенств в системе с соответствующими вещественными множителями. Последние в дальнейшем могут находиться в зависимости от цели задачи из определенных требований, какими могут быть сохранение гамильтоновой структуры, оптимальный подбор множителей, исключение линейных слагаемых формируемого выражения.

В задачах механики могут возникать ситуации, когда более предпочтительно неявное учетывание полиномиальных равенств. Также существует ряд примеров, где более целесообразно явное исключение одной или нескольких переменных. В связи с этим уместно классифицировать задачи в зависимости от явного или косвенного исключения участвующих полиномиальных равенств.

1 Виды задач с полиномиальными равенствами

Исходя из общего анализа механических систем можно выделить такие полиномиальные равенства:

1. Составление дифференциальных уравнений движения гамильтоновых систем с дополнительными наложенными связями $\omega_1(q, p) = 0, \dots, \omega_k(q, p) = 0$ (k — некоторое натуральное), как приведено в [1].
2. Нахождение стационарных движений методом Рауса — Ляпунова [5–7] автономных консервативных систем, когда некоторые первые интегралы задаются с фиксированными константами.
3. Исследование устойчивости найденных стационарных движений вторым методом Ляпунова [8].

Непосредственное исключение каких-либо переменных из полиномиальных равенств может приводить к нарушению гамильтоновой структуры. Поэтому при составлении уравнений движения целесообразно применять неявное учётывание имеющихся полиномиальных связей в выражении функции Гамильтона линейной комбинацией с вещественными коэффициентами [1].

При составлении уравнений стационарности обычно применяется по методу Рауса — Ляпунова [5–7] связка из первых интегралов. Это выражается учётыванием имеющихся неявных полиномиальных равенств. В дальнейшем вычислительном процессе отыскания стационарных движений потребуется прямое исключение некоторых переменных из промежуточных равенств.

Конечно, явное исключение переменных необходимо в большинстве вычислительных процессов. В частности, оно относится к исследованию устойчивости стационарных и установившихся движений.

В третьем пункте часто возникают такие вопросы:

- 1) для двух вещественных знакопеременных квадратичных форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ ($x \in R^n$) проверить возможность существования одного знака значений $V_2(x)$ на равном нулю множестве $V_1(x)$;
- 2) для тех же форм проверить возможность знакоопределенности связки $(V_2(x) - \sigma V_1(x))$ при некоторых вещественных σ ;
- 3) аналогично для двух знакопеременных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ проверить возможность существования одного знака значений $F_2(x)$ на равном нулю множестве $F_1(x)$.

По утверждению П. А. Кузьмина [9], для первых двух вопросов существует эквивалентность, которую выражает

ТЕОРЕМА Финслера [9]

Для того, чтобы для заданных вещественных знакопеременных квадратичных форм $V_1(x) = x'Ax$ и $V_2(x) = x'Bx$ можно было составить знакоопределенную связку $(V_2(x) - \sigma V_1(x))$, необходимо и достаточно, чтобы форма $V_2(x)$ была знакоопределена на равном нулю многообразии $V_1(x)$.

Прежде всего в приведенной трактовке не совсем четка терминология знакоопределенности $V_2(x)$ на равном нулю многообразии $V_1(x)$: на любых отдельных решениях $V_1(x) = 0$ или на всех одновременно.

Обсуждению этого и связанного с ним вопросов посвящена настоящая статья.

2 О знакоопределенности связки двух квадратичных форм

Упомянутый вопрос в [9] изучен полно. При этом предполагается выполнение следующих свойств:

- 1) все собственные значения характеристического уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$ (2.1) имеют только вещественные корни,
- 2) исследуемые квадратичные формы ранее одновременно приведены к полным квадратам.

Поэтому будем полагать заданными матрицы этих форм:

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ (n — натуральное), и все элементы матрицы A отличны от нуля. Тогда связка форм запишется в виде:

$$K(x, \sigma) = \sum_{i=1}^n (b_i - \sigma a_i) x_i^2. \quad (2.2)$$

В таком представлении для положительной определенности $K(x, \sigma)$ необходимо выполнение условия

$$b_i - \sigma a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Соответственно для отрицательной определенности $K(x, \sigma)$ необходимо выполнение

$$b_i - \sigma a_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Для анализа условий (2.3) и (2.4) в [9] введено понятие «разделение корней» характеристического уравнения (2.1). Оно состоит в том, что выделяется два множества корней $\Lambda^{(+)}$ и $\Lambda^{(-)}$. К множеству $\Lambda^{(+)}$ относятся те корни $\lambda_i = \frac{b_i}{a_i}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), для которых $a_i > 0$. Пусть их будет в количестве k_1 , меньшем n .

Аналогично множество $\Lambda^{(-)}$ состоит из $\lambda_i = \frac{b_i}{a_i}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), для которых $a_i < 0$ с общим количеством $(n - k_1)$.

Приведем основной критерий знакоопределенности связки квадратичных форм. Хотя в [9] он явно не сформулирован, но его выражает приведенная здесь

ТЕОРЕМА 2 (Кузьмина)

Для приведенных к полным квадратам квадратичных форм $x'Ax$ и $x'Bx$ связка квадратичных форм $K(x, \sigma) = x'(B - \sigma A)x$ положительно определена при выполнении условия

$$\lambda_{\min}^{(+)} = \min_{(i=1,2,\dots,k_1)} \lambda_i^{(+)} > \max_{(j=1,2,\dots,n-k_1)} \lambda_j^{(-)} = \lambda_{\max}^{(-)}$$

для значений $\sigma \in (\lambda_{\max}^{(-)}; \lambda_{\min}^{(+)}) = J_1$;

соответственно связка $K(x, \sigma) = x'(B - \sigma A)x$ отрицательно определена при выполнении условия

$$\lambda_{\min}^{(-)} = \min_{(j=1,2,\dots,n-k_1)} \lambda_j^{(-)} > \max_{(i=1,2,\dots,k_1)} \lambda_i^{(+)} = \lambda_{\max}^{(+)}$$

для значений $\sigma \in (\lambda_{\max}^{(+)}; \lambda_{\min}^{(-)}) = J_2$.

Здесь основными характеристиками являются $\lambda_{\min}^{(-)}, \lambda_{\max}^{(-)}, \lambda_{\min}^{(+)}, \lambda_{\max}^{(+)}$.

Приведем пояснительный пример 1.

Пусть заданы матрицы квадратичных форм: $A = [-3, -2, -1, 1, 1, 2]$,

$B = [-5, -2, -1, 2, 3, 4]$, $x \in R^6$. Согласно критерию Кузьмина по теореме 2

основные значения корней уравнения (2.1) здесь следующие: $\lambda_{\min}^{(-)} = +1$,

$\lambda_{\max}^{(-)} = 5/3$, $\lambda_{\min}^{(+)} = 2$, $\lambda_{\max}^{(+)} = 3$. В данном случае имеет место соотношение:

$\lambda_{\min}^{(+)} = 2 > 5/3 = \lambda_{\max}^{(-)}$. По теореме 2 для значений $\sigma \in (5/3; 2) = J_1$

связка квадратичных форм (2.2)

$$K(x, \sigma) = (-5 + 3\sigma)x_1^2 + (-2 + 2\sigma)x_2^2 + (\sigma - 1)x_3^2 + (2 - \sigma)x_4^2 + (3 - \sigma)x_5^2 + 2(2 - \sigma)x_6^2$$

положительно определена. Рассмотрим теперь возможность построения знакоопределенности формы $V_2(x) = x'Bx$ на форме $V_1(x) = x'Ax = 0$.

В курсах математического анализа под этим понимается вычисление $V_2(x)$ на одном вещественном корне уравнения $V_1(x) = 0$.

Составим последовательно решения уравнения $V_1(x) = 0$ и вычислим на них значения $V_2(x)$.

Первым решением будет $x_1 = \pm \sqrt{(-2x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_6^2)/3}$. Как для положительных, так и для отрицательных значений x_1 при подстановке в

$V_2(x)$ получается выражение: $V_{21}(x) = (4x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 4x_5^2 + 2x_6^2)/3$.

В общем случае оно представляет квадратичную форму от пяти переменных. Поэтому в любом случае последняя форма $V_{21}(x)$ не знакоопределена. Формально она знакопостоянна.

На другом решении $x_2 = \pm\sqrt{(-3x_1^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_6^2)/2}$ форма $V_2(x)$ примет вид $V_{22}(x) = -2x_1^2 + x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2$. Она является формой от четырех переменных и знакопеременна по формальному составу. Поэтому знакоопределенности здесь формально не может быть при любых обстоятельствах. Следовательно, и здесь нельзя сделать заключение о знакоопределенности.

На третьем решении $x_3 = \pm\sqrt{-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_6^2}$ форма $V_2(x)$ будет такой $V_{23}(x) = -2x_1^2 + x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2$. Последнее выражение в точности совпадает с $V_{22}(x)$ и заключение аналогичное.

На четвертом решении $x_4 = \pm\sqrt{3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_5^2 - 2x_6^2}$ форма $V_2(x)$ получается равной $V_{24}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_5^2$. Конечно, последняя форма не принимает отрицательных значений ввиду знакопостоянного выражения, поэтому нет оснований считать ее положительно определенной. Следует отметить, что последнее выражение задано от четырех переменных.

Для следующего решения $x_5 = \pm\sqrt{3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_6^2}$ вычисления явно получается $V_{25}(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - 2x_6^2$, откуда не следуют определенные заключения, так как она знакопеременна от пяти переменных.

На последнем решении $x_6 = \pm\sqrt{(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2)/2} \equiv V_{24}(x)$, где формально не очевидна знакоопределенность.

Из предварительного анализа предложенного примера можно составить

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Для приведенных к полным квадратам знакопеременных форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ подстановка одного из корней $\lambda_i (i \in R^n)$ характеристического уравнения (2.1) в выражение связи $K(x, \sigma)$ эквивалентна исключению соответствующей переменной x_i из равенства $V_1(x) = 0$ при подстановке в $V_2(x)$.

Это означает: вычисление формы $V_2(x)$ на решениях $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ уравнения $V_1(x) = 0$ равносильно подстановке $\sigma = \lambda_i$ в выражение (2.2).

Как видно из рассмотренного примера, исключение переменных $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ при подстановке в $V_2(x)$ сопровождается знакопеременным или знакопостоянным выражением формы $V_{2i}(x)$ от меньшего шести количества переменных. К тому же формы $V_{22}(x)$ и $V_{23}(x) = V_{22}(x)$, также $V_{24}(x)$ и $V_{26}(x) = V_{24}(x)$ зависят только от четырех переменных.

Это объясняется тем, что выполняются соотношения $\lambda_2 = \lambda_3$ и $\lambda_4 = \lambda_6$. Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Для приведенных к полным квадратам знакопеременных форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ исключение переменной x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) из уравнения $V_1(x) = 0$ соответствующей кратному корню λ_i уравнения (2.1) кратности k_2 , при подстановке в $V_2(x)$ приводит к выражению от $(n - k_2)$ переменных.

Далее можно отметить следующее свойство, что исключение переменных x_i ($i = 1, 4, 6$) приводит к подстановке в $V_2(x)$ к знакопостоянным выражениям. При этом $\lambda_1 = 5/3, \lambda_4 = \lambda_6 = 2$ являются границами интервала J_1 . Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3

Для приведенных к полным квадратам знакопеременных форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ исключение переменной x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) из уравнения $V_1(x) = 0$, соответствующих значениям границ интервалов J_1 или J_2 , при подстановке в $V_2(x)$ доставляет знакопостоянные выражения.

Соответственно можно отметить

УТВЕРЖДЕНИЕ 4

Для приведенных к полным квадратам знакопеременных форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ исключение переменной x_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) из уравнения $V_1(x) = 0$, не соответствующих значениям границ интервала J_1 или J_2 , при подстановке в $V_2(x)$ доставляет знакопеременные выражения.

Сразу отметим, что составленные утверждения выполняются только для приведенных к полным квадратам знакопеременных форм.

Таким образом, если исключение одной переменной из уравнения $V_1(x) = 0$ при подстановке также в квадратичную форму $V_2(x)$ получает знакопостоянное выражение, то это может быть предпосылкой к знакоопределенности связки форм $K(x, \sigma) = x'(B - \sigma A)x$. Более подробный подход показывает необязательность такого предположения. Это видно из следующего примера 2 с заданными квадратичными формами

$V_3(x) = x'A_3x$ и $V_4(x) = x'B_4x$, где $A_3 = [-1, -2, 1, 3]$, $B_3 = [-2, 3, 2, 7]$. Исключение $x_1 = \pm\sqrt{-2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2}$ и также $x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_4^2}$ приводит к одинаковому знакопостоянному выражению $V_{21}(x) = V_{23}(x) = x_2^2 + x_4^2$. Но можно легко проверить, что связка форм $(V_4(x) - \sigma V_3(x))$, в лучшем случае знакопостоянна; притом только при единственном значении

$\sigma = 2$. При этом исключения переменных x_2 или x_4 приводят к формально знакопеременным выражениям. Поэтому требуется более полный анализ значений одной формы на равной нулю другой квадратичной форме и применения знакопостоянных связок квадратичных форм.

Для последнего вопроса, беря за основу теорему Кузьмина, можно составить следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 3

Для приведенных к полным квадратам квадратичных форм $x'Ax$ и $x'Bx$ связка квадратичных форм $K(x, \sigma) = x'(B - \sigma A)x$ знакопостоянна при выполнении одного из условий

- 1) $\lambda_{\min}^{(+)} = \lambda_{\max}^{(-)}$ для положительно постоянных связок форм;
- 2) $\lambda_{\min}^{(-)} = \lambda_{\max}^{(+)}$ для отрицательно постоянных связок форм.

При подробном подходе видно, что отличие знакоопределенных связок форм от знакопостоянных состоит в количестве, равном двум, знакопостоянных различных выражений при исключении определенных переменных из уравнения $V_1(x) = 0$, а для знакопостоянных связок форм существует только один вид знакопостоянного выражения.

Можно отметить, что в теореме Кузьмина не оговаривается равная нулю квадратичная форма $V_1(x)$. Формы $V_1(x)$ и $V_2(x)$ можно полагать при любых вещественных значениях, не обязательно равных нулю. Это позволяет распространить анализ знакоопределенности на связки полиномиальных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, состоящих из суммы форм, начинающихся со второго порядка. Такое изучение функций вполне обосновано ввиду исследования устойчивости по знакоопределенным в малом связкам форм, составленным из $F_1(x) = V_1(x) + W_1(x)$ и $F_2(x) = V_2(x) + W_2(x)$, где $V_1(x)$ и $V_2(x)$ являются квадратичными формами, а $W_1(x)$ и $W_2(x)$ являются полиномами выше второго порядка.

Если при этом из $V_1(x)$ и $V_2(x)$ можно составить знакоопределенную связку $(V_2(x) - \sigma V_1(x))$, то и связка функций $(F_2(x) - \sigma F_1(x))$ при тех же значениях σ также заведомо знакоопределена. Но для функций нельзя исключать из рассмотрения в лучшем случае знакопостоянных связок квадратичных частей, так как слагаемые выше второго порядка могут иногда доопределить знакоопределенность $(F_2(x) - \sigma F_1(x))$.

Пусть задан простой пример 3 с функциями $V_1(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2$, $V_2(x) = 3x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_4^2$, $W_1(x) = x_1x_3^2 - x_3^4 + 2x_4^4$, $W_2(x) = 2x_1x_3^2 - 5x_3^4 - x_4^4$

Здесь для квадратичных форм имеет место соотношение $\lambda_{\min}^{(-)} = \lambda_{\max}^{(+)} = 2$. Следовательно, по теореме 3 здесь можно составить только отрицательно

постоянную квадратичную форму $K_1(x, \sigma) = V_2(x) - 2V_1(x) = -x_1^2 - 2x_2^2$.

При этом соответствующая связка функций

$(F_2(x) - 2F_1(x)) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^4 - 5x_4^4$, как легко видеть, является отрицательно определенной.

Отсюда следует

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если из квадратичных частей полиномов $F_1(x)$ и $F_2(x)$, начинающихся членами второго порядка, можно составить в лучшем случае знакопостоянную связку $(V_2(x) - \sigma V_1(x))$, то вопрос знакоопределенности связки полиномов $(F_2(x) - \sigma F_1(x))$ при тех же значениях σ может решаться членами выше второго порядка.

Сформулированный теоремой 1 алгоритм проверки знакоопределенности приведенных к полным квадратам знакопеременной квадратичной формы на равной нулю другой знакопеременной квадратичной форме создает повышенные вычислительные сложности по сравнению с теоремой Кузьмина.

В целом для анализа знакоопределенности двух многообразий, состоящих из полиномов второго и высшего порядков, предпочтительны теоремы 2 и 3.

3 Прямое исключение переменных

В ряде задач целесообразно непосредственное исключение переменных и алгебраических равенств, как полиномиальных, так и числовых. Примером тому могут быть интеграл Гесса [10] и равенство Аппельрота. Это объясняется тем, что любое уменьшение числа переменных упрощает исследование задачи.

Кроме того, теорема Финслера обладает уникальным свойством: в связке форм $(V_2(x) - \sigma V_1(x))$, не уменьшая общности, форму $V_1(x)$ можно полагать равной нулю, что в исходной постановке задачи не оговаривается.

Наряду с вышеизложенными предварительными заключениями следует учитывать востребованность теоремы 1. Такое может возникать при составлении условий устойчивости в анализе двух форм или функций. Прежде всего это относится не к квадратичным, а более высокого порядка формам $V_2(x)$. Так как канонический вид форм выше второго порядка в настоящее время не установлен, то полагаем форму $V_2(x)$, состоящей из мономов четных степеней и слагаемых с другими дополнительными параметрами. В таких случаях единственным способом исследования знакоопределенности связки двух форм будет теорема Финслера. Теорема Кузьмина здесь не приемлема ввиду неопределенности значений σ для

форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ разных порядков, где σ будут не числовыми собственными значениями, а возможно функциями.

Типичным примером может быть обстоятельно исследованная КАМ-теория [11, 12]. В ней рассматривается консервативная система двух степеней свободы с отсутствием резонансов до четвертого порядка и нормализованным гамильтонианом до четвертого порядка

$$H(q, p) = \sum_1^2 \alpha_i r_i + \sum_1^2 \beta_{ij} r_i r_j + H_5(q, p),$$

где $r_i = q_i^2 + p_i^2$ ($i=1,2$); q_i — позиционные координаты, p_i — соответствующие им импульсы; α_i, β_{ij} — вещественные отличные от нуля числа, при этом α_1 и α_2 разных знаков; $H_5(q, p)$ — слагаемые выше четвертого порядка, не обязательно нормализованные.

Задача в [11, 12] заключалась в составлении условий устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений движения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \quad (i=1,2). \quad (3.1)$$

Нормализация Гамильтониана до заданного порядка k может быть проведена любым известным способом, например, Биркгофа [13]. В практических работах часто используют нормализацию, основанную на преобразованиях Ли [14]. Искомые условия устойчивости нулевого решения системы (3.1) записываются неравенством [11, 12], согласно которому для этого необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$D = \det \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = -(\beta_{11}\alpha_2^2 - 2\beta_{12}\alpha_1\alpha_2 + \beta_{22}\alpha_1^2) \neq 0.$$

Можно показать получение этого условия с использованием теоремы Финслера. Для этого применим часто используемый многими авторами [15] подход при исследовании устойчивости нулевого решения нормализованных систем. Он основан на существовании до заданного порядка первого интеграла. Вкратце опишем его сущность.

В системе уравнений движения (3.1) при отсутствии нетождественных резонансов для монома $r_1^{k_1} r_2^{k_2}$, где k_i ($i=1,2$) — целые положительные, вычисление производной в силу дифференциальных уравнений (3.1) содержит мономы не ниже $[4 + 2(k_1 + k_2 - 1)]$ порядка. Следовательно, производная от формы $V_1(q, p) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ не содержит слагаемых ниже четвертого порядка. Эту форму можно трактовать как первый интеграл $V_1(q, p) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = \text{const}$, вычисленный с точностью до членов четвертого порядка.

Тогда функцию $V_2(q, p) = H(q, p) - V_1(q, p)$ также можно считать первым интегралом до того же порядка, не ниже четвертого. В этом случае

можно применять теорему Финслера для знакоопределенности связи $(V_2(q, p) - \sigma V_1(q, p))$. И здесь своевременно ставится вопрос о знакоопределенности функции $V_2(q, p)$ на равной нулю форме $V_1(q, p)$.

Далее из равенства $V_1(q, p) = 0$ выразим $r_2 = -\alpha_1 r_1 / \alpha_2$ и подставим в выражение $V_2(q, p)$, которое примет вид:

$$V_2(q, p) = r_1^2 [\beta_{11} \alpha_2^2 - 2\beta_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{22} \alpha_1^2] / \alpha_2^2 + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые выше четвертого порядка. Условие знакоопределенности первого слагаемого $V_2(q, p)$ приводит к требованию знакоопределенной величины $D_1 = \beta_{11} \alpha_2^2 - 2\beta_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{22} \alpha_1^2$. Так как знак последнего выражения неопределен, то последнее сводится к не обращению в нуль величины D_1 , а в точности совпадает с выражением D .

Тот же способ применен и для систем с внутренними резонансами до четвертого порядка 1:2 и 1:3 [15], когда возникают дополнительные параметры в исследовании устойчивости.

Заключение

Даже неполный перечень описанных в статье механических задач показывает применение как прямого, так и косвенного исключения некоторых переменных из полиномиальных равенств. Притом не всех переменных, а только некоторых исключительных. Каждый из этих способов может быть более подходящим для своего типа задач.

В рассмотренных задачах проводится анализ двух квадратичных форм и функций, заданных суммой форм, начинающихся с квадратичных. Для них более эффективно косвенное исключение переменных.

Тем не менее в ряде механических задач иногда единственным способом решения целесообразно применять прямой метод исключения переменных, особенно когда исследование касается разных порядков форм $V_1(x)$ и $V_2(x)$ или при возникновении дополнительных параметров.

Литература

1. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1999. 584 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 487 с.
3. Парс Л. А. Аналитическая динамика. Москва: Наука, 1971. 635 с.
4. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Москва: Гостехиздат, 1953. Т. 2. 440 с.
5. Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion. London: McMillan, 1877. 108 p.
6. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
7. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Москва: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.

8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собрание сочинений. Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
9. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. Москва: Наука, 1973. 206 с.
10. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
11. Арнольд В. И. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // ДАН. 1961. № 2. С. 225–227.
12. Мозер Ю. КАМ-теория и проблема устойчивости. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 448 с.
13. Биркгоф Дж. Динамические системы. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1941. 320 с.
14. Сокольский А. Г., Хованский С. А. Вычислительный алгоритм нормализации двумерных канонических систем. Москва: Изд-во МАИ, деп. ВИНТИ, 1981. С. 1–40.
15. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: ГИФМЛ, 1978. 312 с.

Статья поступила в редакцию 18.08.2026; одобрена после рецензирования 10.09.2026; принята к публикации 17.09.2026.

ON ELIMINATION OF ALGEBRAIC EQUALITIES IN MECHANICS PROBLEMS

Mikhail A. Novikov

Dr. Sci. (Phys. And Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for Systems Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (ISDTM SB RAS),
134 Lermontov str. Irkutsk, 664033, Russia
nma@icc.ru

Abstract. The article discusses the explicit and indirect consideration of various algebraic equalities that arise in the study of mechanical problems. To a greater extent, this concerns the stability of steady-state motions.

The implicit consideration of the mentioned equalities is caused, first of all, by the preservation of all initial variables involved in the description of the system's motion. This method is also applied to the construction of stationarity equations, the research of the conditional sign definiteness of two quadratic forms, and the study of the stability of steady-state motions. Although this approach often makes it impossible to achieve a coincidence of sufficient stabilization conditions with necessary ones in nonlinear systems, it is widespread in practical researches.

In particular, the well-known problem of the sign definiteness of one alternating quadratic form on another alternating quadratic form equal to zero is considered, that is expressed by an explicit change of variables. According to the Finsler theorem, such a problem is equivalent to the sign definiteness bundle of these two quadratic forms, that reduces to an implicit change of variables. In computational aspect, implicit variable elimination is preferable for this issue.

For a more detailed analysis, the most suitable method is to pre-exclude some variables. Often, this approach, due to the smaller number of variables, allows to enhance the effectiveness of research. In the computational process of finding steady-state motions, researches their stability, conditional sign definiteness of two forms or functions of different orders, this approach is the most in demand.

In general, a rational method is the composed use of explicit and indirect consideration of the provided algebraic equalities.

Keywords: polynomial equality, first integrals, bundle of quadratic forms, sign definiteness of forms, eigenvalue, fixed sign of form, sign definiteness bundle of two forms.

For citation

Novikov M. A. On Elimination of Algebraic Equalities in Mechanics Problems. Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 3. P. 3–15.

The article was submitted 18.08.2026; approved after reviewing 10.09.2026; accepted for publication 17.09.2026.