

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-3-16-24

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОСИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

© Казьмин Иван Дмитриевич

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4

kazminvanya@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается класс модельных задач оптимального управления энергосистемами, линейных по управлению. Предлагается новый подход к поиску оптимального решения задач на основе принципа максимума, который заключается в переходе от решения краевой задачи принципа максимума к решению эквивалентных задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Форма конструируемых задач о неподвижной точке дает возможность применить и модифицировать известную теорию и методы неподвижных точек для поиска управлений, удовлетворяющих принципу максимума. На каждой итерации построенных методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется, но это свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления и отсутствием достаточно трудоемкой операции варьирования управления в отличие от известных градиентных методов. Трудоемкость вычислительной реализации одной итерации предлагаемых методов составляет две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных. Свойства и сравнительная эффективность новых методов иллюстрируются на примере расчета известной модельной задачи оптимального управления энергосистемой.

Ключевые слова: задача оптимального управления энергосистемой, принцип максимума, задача о неподвижной точке, итерационный метод.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Бурятского госуниверситета, проект № 04/01 (2026 г.).

Для цитирования

Казьмин И. Д. Об одном подходе к решению задач оптимального управления энергосистемой на основе принципа максимума // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 3. С. 16–24.

Введение

Математическое моделирование, планирование и оперативное управление режимами работы современных энергосистем представляют собой одну из важнейших научно-инженерных задач энергетики. Сложность данной проблемы обусловлена не только колоссальной размерностью реальных электроэнергетических сетей, но и жесткими требованиями к скорости принятия решений в условиях стохастического характера потребления и генерации. Актуальность моделей энергосистем существенно возросла в последние годы в связи с глобальной цифровизацией энергетического сектора, активным использованием возобновляемых источников энергии с нестабильной выработкой, а также резким повышением требований к безопасности и системной надежности объектов критической инфраструктуры в условиях динамических нагрузок [1–2].

Математическим базисом для описания моделей энергосистем традиционно служат управляемые динамические системы. В большинстве практических приложений динамика энергообъектов описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а целевые функционалы, отражающие экономические или технические критерии (например, минимизация потерь или максимизация пропускной способности), являются выпуклыми. Особое место среди них занимают линейные по управлению системы. Такие модели оптимального управления, несмотря на свою кажущуюся простоту, сохраняют все существенные черты нелинейных задач (наличие ограничений на фазовые переменные и управления, возможная неединственность решения) и изучались во многих фундаментальных и прикладных работах [3–5].

В настоящей работе предлагаются новые методы в задачах оптимального управления энергосистемой, основанные на поиске неподвижных точек условий принципа максимума.

Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется на упрощенной линеаризованной оптимизационной модели энергосистемы, которая изучалась в работе [5] и решалась алгоритмом, использующим необходимые условия оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина и методом условного градиента.

1 Методы неподвижных точек принципа максимума

Рассматривается класс задач оптимального управления энергосистемой в следующем общем виде:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0, u(t) \in U \subset R^m, t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управления. В качестве допустимых управлений $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ рассматривается множество V кусочно-

непрерывных функций на интервале T со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема на R^n , функции $a(x, t)$, $d(x, t)$, $A(x, t)$, $b(x, t)$ дифференцируемы по переменной x и непрерывны по переменной по t на множестве $R^n \times T$.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) представляется в следующем виде:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \\ H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Введем следующие обозначения для $v \in V$:

$x(t, v)$, $t \in T$ — решение системы (2) при $u(t) = v(t)$;

$\psi(t, v)$, $t \in T$ — решение системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации:

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle, \quad x \in R^n, \quad \psi \in R^n, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^* условие известного принципа максимума [6] для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Обозначим P_Y — оператор проектирования на множество $Y \subset R^k$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in R^k.$$

Важным свойством оператора проектирования является выполнение неравенства:

$$\langle y - P_Y(z), z - P_Y(z) \rangle \leq 0, \quad y \in Y.$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования:

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad x \in R^n, \quad \psi \in R^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Определим отображения X, Ψ, V^α , $\alpha > 0$ следующими соотношениями:

$$X(u) = x, \quad u \in V, \quad x(t) = x(t, u), \quad t \in T, \\ \Psi(u) = \psi, \quad u \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, u), \quad t \in T, \\ V^\alpha(\psi, x, u) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad u \in V,$$

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

Введем отображение X^α следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, u) = x, \quad \psi \in C(T), \quad u \in V,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V, \quad (7)$$

Построим оператор Ψ^α по правилу:

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi, \quad x \in C(T), \quad u \in V,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_3^α :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Можно показать, что задачи о неподвижной точке (7) и (8) являются эквивалентными условию принципа максимума (5).

При заданном $\alpha > 0$ для численного решения задач о неподвижной точке принципа максимума (6) – (8) предлагаются соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k), \quad (9)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k), \quad (10)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k). \quad (11)$$

Процесс (10) в поточечной форме имеет вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Понятно, что $x(t) = x(t, v^{k+1})$, $t \in T$. Таким образом, итерационный процесс (14) в поточечной форме может быть записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad v^0 \in V, \quad t \in T,$$

или в операторной форме:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^{k+1}), v^k), \quad v^0 \in V.$$

Процесс (11) в поточечной форме принимает вид:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \\ \psi(t_1) &= -\varphi_x(x(t_1, v^k)). \end{aligned}$$

Анализ сходимости построенных итерационных процессов (9) – (11) можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений [7].

2 Задача оптимального управления энергосистемой

Рассматривается известный модельный пример управления энергосистемой [5], который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= x_1^2(1.4) + x_2^2(1.4) + x_3^2(1.4) \rightarrow \inf_{u \in V}, \\ |u(t)| &\leq 2.59, \quad t \in T = [0, 1.4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 0.115, \\ \dot{x}_2(t) &= -6.725x_1(t) - 16.19x_3(t) + 0.19394, & x_2(0) &= 1.926, \\ \dot{x}_3(t) &= -0.066x_1(t) - 0.257x_3(t) + 0.19u + 0.017566, & x_3(0) &= 0.055. \end{aligned}$$

Система представляет собой линеаризованную модель энергосистемы «станция — шина бесконечной мощности»; $u(t)$ — вынужденная электродвижущая сила; $x_1(t)$ — угол сдвига фазовой электродвижущей силы и напряжения.

В работе [5] задача оптимального управления энергосистемой решалась алгоритмом, использующим необходимые условия оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина и методом условного градиента. В качестве начального приближения выбиралось управление $u(t) = 0$, $t \in T$. Система решалась известным методом Рунге — Кутта 4-го порядка с шагом дискретизации $h = 10^{-2}$. Было получено расчетное значение функционала при расчете этими методами: $\hat{\Phi} = 0.002$. Соответствующие расчетные управления представлены на рисунке 1.

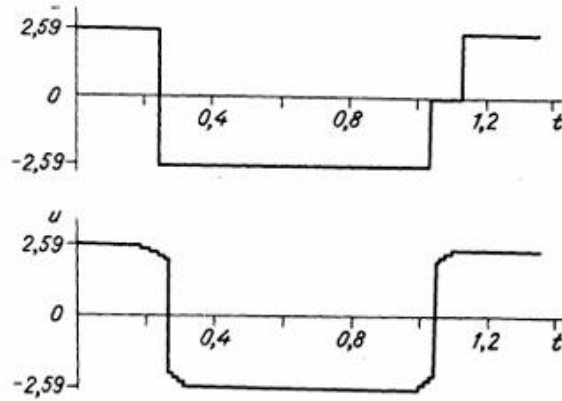


Рис. 1. Расчетные управления, полученные в работе [5]

Функция Понтрягина в задаче имеет вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 x_2 - 6.725 \psi_2 x_1 - 16.19 \psi_2 x_3 + 0.19394 \psi_2 - \\ - 0.066 \psi_3 x_1 - 0.257 \psi_3 x_3 + 0.19 \psi_3 u + 0.017566 \psi_3$$

Стандартная сопряженная система принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 6.725 \psi_2(t) + 0.066 \psi_3(t), & \psi_1(1.4) &= -2x_1(1.4), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), & \psi_2(1.4) &= -2x_2(1.4), \\ \dot{\psi}_3(t) &= 16.19 \psi_2(t) + 0.257 \psi_3(t), & \psi_3(1.4) &= -2x_3(1.4). \end{aligned}$$

Условие принципа максимума в форме задачи о неподвижной точке (6) на основе операции проектирования принимает вид:

$$u(t) = P_{[-2.59, 2.59]}(u(t) + 0.19 \alpha \psi_3(t, u)), \quad t \in T.$$

Итерационный метод неподвижных точек (11) принимает вид при $k \geq 0$:

$$v^{k+1}(t) = P_{[-2.59, 2.59]}(v^k(t) + 0.19 \alpha \psi_3(t)), \quad t \in T, \quad (12)$$

где $\psi(t)$, $t \in T$ является решением сопряженной системы при $x(t, v^k)$, $t \in T$.

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось с помощью модуля DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования Fortran Power Station 4.0 [8]. Данный модуль реализует метод Рунге — Кутты — Вернера (5–6) порядка точности. Значения вычисляемых фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-2}$. В промежутках между соседними узлами сетки значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Критерием остановки метода (12) являлось достижение достаточно малого значения показателя невязки принципа максимума для управления v^k :

$$\max \left\{ \left\langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \right\rangle, t \in T_h \right\} \leq 10^{-7},$$

где $g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t)$.

Итерационным методом (12) с параметром $\alpha = 1.0$ с того же стартового управления $v^0(t) = 0, t \in T$ было получено расчетное значение функционала $\hat{\Phi} = 5.394368497505489\text{E-}004$. Расчетное экстремальное управление представлено на рисунке 2.

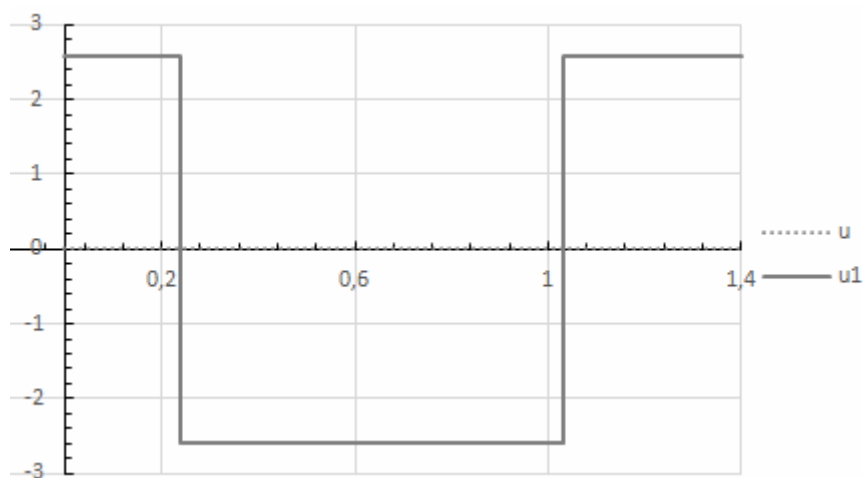


Рис. 2. Расчетное экстремальное управление $u1$, полученное методом неподвижных точек (12) с начальным управлением $u = v^0$

Проведенные расчеты в рамках модельной задачи демонстрируют достаточно высокую качественную и количественную эффективность предлагаемого метода неподвижных точек по сравнению с методом условного градиента и алгоритмом, использующим необходимые условия оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина [5].

Заключение

В классе линейных по управлению задач оптимального управления энергосистемой:

1. Получены новые формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке конструируемых операторов управления.
2. Разработаны новые итерационные методы для поиска экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке.

Предлагаемые итерационные методы поиска экстремальных управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления энергосистемой характеризуются простотой вычислительной реализации, нелокальностью последовательных приближений управления и

отсутствием достаточно трудоемкой процедуры параметрического варьирования управления на каждой итерации, в отличие от известных градиентных методов. В рассматриваемых методах неподвижных точек параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется и легко подбирается экспериментально для обеспечения сходимости итерационных процессов методов в каждой конкретной задаче.

Указанные свойства методов являются важными для повышения эффективности поиска решения рассматриваемых задач.

Литература

1. Wang X., Liu Y., Zhang J. A Review of Reliability Research in Regional Integrated Energy Systems. *Buildings*. 2024; 14, 11: 3428.
2. Ansari M. S., Jalil M. F., Bansal R. Hybrid Renewable Energy Systems — A Review of Optimization Techniques. *Applied Sciences*. 2025; 15, 4: 1744.
3. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987. 226 с.
4. Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, 1997. 175 с.
5. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1992. 194 с.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.
8. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Москва: Диалог-МИФИ, 2001. Ч. 3. 368 с.

Статья поступила в редакцию 30.08.2026; одобрена после рецензирования 10.09.2026; принята к публикации 17.09.2026.

ON AN APPROACH TO SOLVING POWER SYSTEM OPTIMAL CONTROL
PROBLEMS BASED ON THE MAXIMUM PRINCIPLE

Ivan D. Kazmin

Cand. Sci. (Phys. and Math.),

Senior researcher,

Banzarov Buryat State University

4 Ranzhurov St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. This paper examines a class of model problems concerning the optimal control of power systems that are linear in the control variable. A new approach is proposed for finding the optimal solution based on the maximum principle; this approach involves shifting from solving the maximum principle's boundary-value problem to solving equivalent fixed-point problems in the control space. The formulation of these fixed-point problems allows for the application and modification of established fixed-point theory and methods to identify controls that satisfy the maximum principle. While the proposed methods do not guarantee a decrease in the objective functional at each iteration, this lack of monotonic improvement is offset by the non-local nature of the successive control approximations and the absence of the computationally intensive control variation operation characteristic of standard gradient methods. The computational cost of a single iteration involves solving two Cauchy problems—one for the state variables and one for the adjoint variables. The properties and comparative efficiency of the new methods are demonstrated through the solution of a well-known model problem regarding the optimal control of a power system.

Keywords: power system optimal control problem, maximum principle, fixed point problem, iterative algorithm.

For citation

Kazmin I. D. On an Approach to Solving Power System Optimal Control Problems Based on the Maximum Principle. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2026. N. 3. P. 16–24.

The article was submitted 30.08.2026; approved after reviewing 10.09.2026; accepted for publication 17.09.2026.