

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-3-39-52

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА И НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

© **Срочко Владимир Андреевич**

доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
srochko@math.isu.ru

© **Аксеньюшкина Елена Владимировна**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Байкальский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
aksenyushkinaev@bgu.ru

Аннотация. Рассматривается линейно-квадратичная по фазовой переменной задача оптимального управления в общей невыпуклой постановке. Известная в этом случае точная (без остаточных членов) формула приращения функционала используется в нетрадиционном аспекте для получения необходимого условия оптимальности. Это условие в отличие от принципа максимума Понтрягина носит нелокальный характер и использует в качестве второй сопряженной переменной матричную функцию Габасова. Условие имеет возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Его реализация связана с решением задачи Коши для фазовой системы с позиционным управлением из операции на максимум функции Понтрягина.

Для линейного варианта задачи используется вторая формула приращения, которая порождает условие оптимальности на основе сопряженной системы с позиционным управлением. Эффективность этого условия подтверждается примером.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, точные формулы приращения, необходимые условия оптимальности, позиционные управления.

Для цитирования

Срочко В. А., Аксеньюшкина Е. В. Точные формулы приращения функционала и нелокальные условия оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 3. С. 39–52.

Введение

В теории оптимального управления для задач без фазовых ограничений специальные формулы приращения целевого функционала имеют историческое значение. Они явились основой для доказательства необходимых и достаточных условий оптимальности и построения конструктивных методов численного решения для широкого класса задач. Выделим избранные работы этого направления исследований [1]–[8], в которых конструируются и используются разнообразные формулы в рамках «метода приращений».

В последнее время возродился интерес к точным формулам приращения, которые не содержат остаточных членов тех или иных разложений и позволяют относительно просто получать результаты нелокального сорта без использования достаточно малых параметров. Первые формулы такого типа для линейно-квадратичных задач представлены в монографии [8] вместе с процедурами улучшения допустимых управлений и методами последовательных приближений. В недавних публикациях [9], [10] точные формулы приращения в рамках незаурядной методики построены для нелинейной задачи терминального управления с широким спектром обобщений. На этой основе получены позиционные условия оптимальности, альтернативные принципу максимума Понтрягина (ПМП).

В данной статье с аналогичной позиции рассматриваются точные формулы для линейно-квадратичной задачи. В результате получены новые условия оптимальности на уровне значений целевого функционала. Реализация (проверка) этих условий связана с позиционными процедурами улучшения допустимых управлений на основе интегрирования фазовой или сопряженной системы. Необходимо, конечно, отметить незаурядную возможность улучшения управлений, удовлетворяющих ПМП.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \langle c, x(t_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t_1), Cx(t_1) \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} (b_0(u, t) + \langle a(u, t), x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x(t), D(u, t)x(t) \rangle) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

связанного с линейной по состоянию динамической системой

$$\dot{x} = A(u, t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (2)$$

при ограничениях на управление в каждый момент времени

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Класс допустимых управлений V определим как множество кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих условию (3) с компактным множеством $U \subset R^r$.

Внесем необходимые предположения. Для функционала (1) считаем, что $(n \times n)$ матрицы C , $D(u, t)$ симметричны и функции $b_0(u, t)$, $a(u, t)$, $D(u, t)$ непрерывны по своим аргументам на $U \times T$. Для системы (2) сохраняем свойство непрерывности относительно матричной функции $A(u, t)$ и вектор-функции $b(u, t)$.

Для дальнейших соотношений удобно использовать следующие обозначения:

$$\varphi(x) = \langle c, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Cx \rangle, \quad f(x, u, t) = A(u, t)x + b(u, t),$$

$$f_0(x, u, t) = b_0(u, t) + \langle a(u, t), x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, D(u, t)x \rangle.$$

Введем теперь стандарты необходимых условий оптимальности:

функция Понтрягина и ее частное приращение по управлению:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - f_0(x, u, t),$$

$$\Delta_v H(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, v, t) - H(\psi, x, u, t);$$

первая сопряженная задача относительно вектор-функции $\psi(t)$:

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)); \quad (4)$$

вторая сопряженная задача относительно матричной функции Габасова $\Psi(t)$:

$$\dot{\Psi} = -A(u, t)^T \Psi - \Psi A(u, t) + D(u, t), \quad \Psi(t_1) = -C. \quad (5)$$

Далее, для управления $u \in V$ будем обозначать $x^u(t)$, $\psi^u(t)$, $\Psi_u(t)$, $t \in T$ соответствующие решения фазовой и сопряженных систем.

Для пары управлений $u, v \in V$ определим комбинированную вектор-функцию:

$$p^u(t, x^v(t)) = \psi^u(t) + \Psi_u(t)(x^v(t) - x^u(t)), \quad t \in T.$$

Теперь имеется возможность представить формулу приращения функционала [8]:

$$\Phi(v) - \Phi(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), u(t), t) dt. \quad (6)$$

Остается добавить, что это точная (без остаточных членов) формула приращения, которая открывает возможность нелокального (без варьирования) улучшения для управления $u(t)$ на основе операции на максимум функции Понтрягина. При этом условие неухудшения автоматически становится необходимым условием оптимальности. Кроме того, та же формула содержит потенциал для достаточных условий локальной и глобальной оптимальности управления с помощью той же операции с функцией Понтрягина.

2 Условия улучшения и оптимальности

На основании формулы (6) определим управление $v(t)$ вместе с фазовой траекторией $x^v(t)$ следующим экстремальным условием:

$$v(t) = \arg \max_{w \in U} H(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), w, t), \quad t \in T. \quad (7)$$

Пусть $V_u \subset V$ — множеств таких H -максимизирующих управлений. В результате получаем неравенство для интегранта из (6):

$$\Delta_{v(t)} H(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), u(t), t) \geq 0, \quad t \in T,$$

это приводит к улучшению управления $u(\cdot)$ на основе условия (7):

$$\Phi(v) \leq \Phi(u), \quad v \in V_u.$$

Отсюда очевидно следует необходимое условие оптимальности для управления $u(\cdot)$ (условие неухудшения):

$$\Phi(u) = \Phi(v), \quad v \in V_u. \quad (8)$$

Согласно той же формуле (6) получаем поточечный (в каждой точке $t \in T$) вариант этого условия

$$\Phi(v) - \Phi(u) = 0 \Leftrightarrow \Delta_{v(t)} H(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), u(t), t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} H(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), w, t), \quad t \in T, \quad v \in V_u. \quad (9)$$

Таким образом, формула приращения (6) приводит к необходимому условию оптимальности для управления $u(\cdot)$ в функциональном варианте (8) и традиционной версии (9).

Отметим ситуацию «не выполнения» условия (8): найдется управление $\bar{v} \in V_u$ с неравенством $\Phi(\bar{v}) < \Phi(u)$. Это управление сразу решает задачу улучшения без дополнительных затрат (нелокальное улучшение).

Выделим характерный случай, когда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет ПМП, т.е.

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi^u(t), x^u(t), w, t), \quad t \in T.$$

Это соответствует условию улучшения (7) при $v = u$, поскольку $p^u(t, x^u(t)) = \psi^u(t)$. Следовательно, в данном случае $u \in V_u$. Однако при этом условие максимума (9) накладывает на управление $u(\cdot)$ дополнительное требование максимизировать функцию H для «чужих» траекторий $x^v(t)$, $v \in V_u \setminus \{u\}$. Иными словами, нелокальное условие (8) может преодолевать «барьер ПМП», т. е. не выполняться на управлениях, удовлетворяющих ПМП (раздел 4, пример 2).

Тем не менее ПМП не является следствием условия (8), которое может выполняться на управлениях, не удовлетворяющих ПМП (раздел 4, пример 1).

В результате заключаем, что нелокальное условие (8) и ПМП являются независимым.

В связи с этим следует отметить, что указанные условия совпадают в простейшей задаче оптимального управления

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min, \quad u \in V, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0. \end{aligned}$$

3 Конструктивная процедура улучшения

Представим механизм реализации условия улучшения (7) или технологию проверки управления $u(\cdot)$ на оптимальность с помощью условия (8).

Определим вектор-функцию $u^*(\psi, x, t)$ экстремальным соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi, x, u, t)$$

и предположим, что доступно аналитическое выражение для $u^*(\psi, x, t)$, которое формализует кусочно-непрерывную вектор-функцию на $R^n \times R^n \times T$.

Схема улучшения управления $u \in V$ в рамках условий оптимальности (8), (9) выглядит следующим образом:

- 1) по допустимой паре $(u(t), x^u(t))$ найдем решения $\psi^u(t), \Psi_u(t)$ сопряженных задач (4), (5);
- 2) образуем вектор-функцию

$$p^u(t, x) = \psi^u(t) + \Psi_u(t)(x - x^u(t))$$

и сформируем позиционное управление

$$v^*(x, t) = u^*(p^u(t, x), x, t), \quad x \in R^r, \quad t \in T;$$

- 3) найдем решение $x(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (10)$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(x(t), t), \quad t \in T$.

Проведем обсуждение процедуры 1)-3).

Предположим, что решение $x(t)$ системы (10) существует (возможно, не единственное) и управление $v(t)$ является кусочно-непрерывной вектор-функцией на T . Тогда $v \in V$, $x(t) = x^v(t)$, и на выходе процедуры получаем допустимый процесс $(v(t), x^v(t))$.

Кроме того,

$$v(t) = u^*(p^u(t, x^v(t)), x^v(t), t), \quad t \in T.$$

Это значит, что $v \in V_u$ (условие (7) выполнено), т. е. имеет место слабое улучшение $\Phi(v) \leq \Phi(u)$. Строгое неравенство означает невыполнение условия (8) и спуск по функционалу. В случае равенства $\Phi(v) = \Phi(u)$ для полной проверки условия (8) $\forall v \in V_u$ необходимо найти все решения $x(t)$ системы (10) вместе с порождающими управлениями $v(t), t \in T$.

Отметим ситуацию, когда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет ПМП, т. е.

$$u(t) = u^*(\psi^u(t), x^u(t), t), \quad t \in T.$$

Это значит, что $u \in V_u$, т. е. траектория $x^u(t)$ является решением системы (10) и пара $(u(t), x^u(t))$ имеется на выходе процедуры 1)-3). Иными словами, совпадение $v(t) = u(t), t \in T$ означает, что управление $u(\cdot)$ удовлетворяет ПМП.

4 Сравнение условий оптимальности

Выясним взаимодействие ПМП и нелокального условия (8) (выполняется, не выполняется) на примерах.

Пример 1.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 2].$$

В данном случае

$$H = \psi u - \frac{1}{2} x^2, \quad u^* = \text{sign } \psi,$$

$$\dot{\psi} = x, \quad \psi(2) = 0, \quad \dot{\Psi} = 1, \quad \Psi(2) = 0.$$

Рассмотрим управление $u = -1$ с траекториями

$$x^u(t) = 1 - t, \quad \psi^u(t) = \frac{1}{2} t(2 - t), \quad \Psi_u(t) = t - 2.$$

Данное управление не удовлетворяет ПМП: $\psi^u(t) > 0, t \in (0, 2)$.

Проверим условие (8) в соответствии с процедурой 1)-3). В данном случае

$$p^u(t, x) = (2 - t)(1 - x - \frac{1}{2}t),$$

$$v^*(x, t) = \text{sign } p^u(t, x).$$

Решаем уравнение

$$\dot{x} = \text{sign } p^u(t, x), \quad x(0) = 1. \quad (11)$$

Начальная точка $t = 0$ является особой: $p^u(0, x(0)) = 0$, поэтому требуется апробация вариантов. Предположения $p^u(t, x(t)) < 0$, $p^u(t, x(t)) > 0, t > 0$ в силу уравнения (11) приводят к противоречию. Остается особый случай $p^u(t, x(t)) = 0, t > 0$, которому соответствует скользящий режим $x(t) = 1 - \frac{1}{2}t$ с порождающим управлением $v(t) = -\frac{1}{2}, t \in [0, 2]$. При этом значение функционала сохраняется: $\Phi(u) = \Phi(v) = \frac{1}{3}$.

Отметим, что скользящий режим является устойчивым в том смысле, что $\forall \tau \in (0, 2)$ задача Коши

$$\dot{x} = \text{sign } p^u(t, x), \quad x(\tau) = 1 - \frac{1}{2}\tau$$

имеет единственное решение $x(t) = 1 - \frac{1}{2}t, t \in [\tau, 2]$ (выход из скользящего режима невозможен). Этот факт проверяется в полной аналогии с предыдущим случаем, когда $\tau = 0$.

Таким образом, нелокальное условие (8) для управления $u = -1$ выполняется с единственным управлением $v = -\frac{1}{2}$ на выходе процедуры 1)-3) без улучшения: $\Phi(u) = \Phi(v)$.

Пример 2.

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данном случае

$$H = \psi u + \frac{1}{2} x^2, \quad u^* = \text{sign } \psi, \quad \dot{\psi} = -x, \quad \psi(1) = 0,$$

$$\dot{\Psi} = -1, \quad \Psi(1) = 0 \Rightarrow \Psi(t) = 1 - t.$$

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ -1, & t \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

с траекториями (по отрезкам $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$)

$$x^u(t) = \begin{cases} t, & \\ \frac{2}{3} - t, & \end{cases} \quad \psi^u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - t)(\frac{1}{3} + t), & \\ \frac{1}{2}(t - \frac{1}{3})(t - 1) & \end{cases}$$

и значением функционала $\Phi(u) = -\frac{1}{54}$.

Данное управление удовлетворяет ПМП:

$$u(t) = \text{sign } \psi^u(t), \quad t \in [0, 1].$$

Проверим условие (8) по схеме 1)-3). Подсчитаем функцию

$$\begin{aligned} p^u(t, x) &= \psi^u(t) + \Psi(t)(x - x^u(t)) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - t)(\frac{1}{3} + t) + (1 - t)(x - t), & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ (1 - t)(x + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}), & t \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом $v^*(x, t) = \text{sign } p^u(t, x)$. Далее решаем уравнение

$$\dot{x} = \text{sign } p^u(t, x), \quad x(0) = 0 \tag{12}$$

Пусть $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Поскольку $p^u(0, x(0)) = \frac{1}{18} > 0$, то единственным решением уравнения (12) является $x(t) = t$ с управлением $v(t) = 1$, т.е. на этом участке

$$x(t) = x^u(t), \quad v(t) = u(t), \quad p^u(t, x(t)) = \psi^u(t).$$

Точка $t = \frac{1}{3}$ является особой: $p^u(\frac{1}{3}, x(\frac{1}{3})) = 0$, т.е. требуется проверка вариантов пролонгации.

Пусть $t \in (\frac{1}{3}, 1]$. Условие $p^u(t, x(t)) < 0$ не требует проверки, поскольку оно приводит к исходному процессу $(x^u(t), u(t))$ с ПМП-управлением.

Рассмотрим второй случай: $p^u(t, x(t)) > 0$. Тогда

$$\dot{x} = 1, \quad x(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x(t) = t, \quad u(t) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$p^u(t, x(t)) = \frac{3}{2}(1-t)(t - \frac{1}{3}) > 0, \quad t \neq 1.$$

Таким образом, уравнение (12) допускает решение $x(t) = t$, $t \in [0, 1]$ с управлением $v(t) = 1$ и значением функционала $\Phi(v) = -\frac{1}{6} < \Phi(u)$. Это значит, что на управлении $u(t)$ условие (8) не выполняется с немедленным улучшением.

Остается рассмотреть особую ситуацию, когда $p^u(t, x(t)) = 0$, $t \in (\frac{1}{3}, 1]$. Это сразу приводит к скользящему режиму $x(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ с управлением $v(t) = -\frac{1}{2}$. В результате получаем управление

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{1}{2}, & t \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

без улучшения: $\Phi(v) = \Phi(u)$.

Наконец, проверим скользящий режим $x(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ на устойчивость. С этой целью для $\tau \in (\frac{1}{3}, 1)$, $t \in [\tau, 1]$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = \text{sign } p^u(t, x), \quad x(\tau) = \frac{1}{2}(1-\tau). \quad (13)$$

Пусть $x_\tau(t)$, $t > \tau$ — решение уравнения (13) с условием $p^u(t, x_\tau(t)) > 0$. Тогда

$$x_\tau(t) = t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\tau, \quad p^u(t, x_\tau(t)) = \frac{3}{2}(1-t)(t - \tau) > 0, \quad t \neq 1.$$

Таким образом, задача Коши (13) имеет решение $x_\tau(t)$, $t \in (\tau, 1]$ с управлением $v_\tau(t) = 1$ для любого $\tau \in (\frac{1}{3}, 1)$.

Второй случай $p^u(t, x_\tau(t)) < 0$, $t > \tau$ также допустим и приводит к управлению $v_\tau(t) = -1$, $t \in (\tau, 1]$.

Подведем итоги:

1. Скользящий режим $x(t) = \frac{1}{2}(1-t)$, $t \in (\frac{1}{3}, 1]$ является неустойчивым, т. е. допускает отклонения (выход из режима) в любой момент $\tau \in (\frac{1}{3}, 1)$ управлениями $v_\tau(t) = \pm 1$, $t \in [\tau, 1]$.

2. Проверка условия (8) для ПМП-управления $u(t)$ выделяет τ -параметрическое семейство управлений

$$v_\tau(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{3}), \\ -\frac{1}{2}, & t \in [\frac{1}{3}, \tau), \\ \pm 1, & t \in [\tau, 1]. \end{cases}$$

Для случая $v_\tau(t) = 1, t \in [\tau, 1]$ имеет место элегантное условие улучшения по функционалу

$$\Phi(v_\tau) = \Phi(u) - \frac{1}{2}(1 - \tau)^3, \quad \tau \in [\frac{1}{3}, 1].$$

Наилучшее по уменьшению значение $\tau_* = \frac{1}{3}$ приводит к управлению $u_*(t) = 1, t \in [0, 1]$, которое является оптимальным в данной задаче.

5 Линейная по состоянию задача. Конкретизация и дополнение

Рассмотрим линейный вариант функционала (1) без квадратичных членов: $C = O, D = O$. В этом случае

$$\Psi_u(t) = O, \quad p^u(t, x^v(t)) = \psi^u(t), \quad t \in T,$$

$$\psi^u(t) : \quad \dot{\psi} = -A(u, t)^T \psi + a(u, t), \quad \psi(t_1) = -c$$

и формула приращения для линейной задачи принимает вид [8]:

$$\Phi(v) - \Phi(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi^u(t), x^v(t), u(t), t) dt.$$

Все предыдущие результаты, конечно, сохраняются с уменьшением трудоемкости реализации.

Не составляет труда представить вторую (симметричную) формулу приращения (замена $u \Leftrightarrow v$)

$$\Phi(v) - \Phi(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi^v(t), x^u(t), u(t), t) dt. \quad (14)$$

Интересно отметить, что эта формула имеет самостоятельное значение и порождает не зависящие от предыдущих результаты аналогичного типа. Приведем соответствующие соотношения.

Условие улучшения и множество $\mathcal{V}_u \subset V$:

$$v(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi^v(t), x^u(t), w, t), \quad t \in T,$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(v) \leq \Phi(u), \quad v \in \mathcal{V}_u.$$

Необходимое условие оптимальности:

$$\Phi(u) = \Phi(v), \quad v \in \mathcal{V}_u$$

$$\Updownarrow$$

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi^v(t), x^u(t), w, t), \quad t \in T.$$

Процедура реализации (улучшения):

$$u \in V \Rightarrow x^u(t) \Rightarrow v^*(\psi, t) = u^*(\psi, x^u(t), t) \Rightarrow$$

$$\psi(t) : \dot{\psi} = -A(v^*(\psi, t), t)^T \psi + a(v^*(\psi, t), t), \quad \psi(t_1) = -c \Rightarrow$$

$$v(t) = v^*(\psi(t), t), \quad t \in T \Rightarrow \Phi(v) \leq \Phi(u).$$

Отметим, что позиционное управление $v^*(\psi, t)$ в данном случае зависит от сопряженной переменной.

Эффективность процедуры и соответствующего условия оптимальности продемонстрируем на примере.

Пример 3.

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1)dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq 1.$$

В данном случае

$$H = \psi u - x(u - 1), \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(1) = 0, \quad u^* = \text{sign}(\psi - x).$$

Рассмотрим управление $u = 0$ с траекториями $x^u(t) = 1$, $\psi^u(t) = 1 - t$ и значением функционала $\Phi(u) = -1$. Данное управление не удовлетворяет ПМП: $\psi^u(t) - x^u(t) = -t < 0$, $t \in (0, 1]$.

Реализация процедуры улучшения 1)-3) сводится к решению уравнения

$$\dot{x} = \text{sign}(1 - t - x), \quad x(0) = 1.$$

Единственное решение этого уравнения есть скользящий режим $x(t) = 1 - t$ с управлением $v(t) = -1$, $t \in [0, 1]$ и значением функционала $\Phi(v) = -1$. Таким образом, $\Phi(v) = \Phi(u)$ и нелокальное условие (8) выполнено.

Рассмотрим вторую процедуру улучшения, которая сводится к решению сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = \text{sign } g(\psi) - 1, \quad \psi(1) = 0 \quad (15)$$

с функцией переключения $g(\psi) = \psi - 1$.

Для $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ решение имеет вид $\psi(t) = 2(1-t)$ с функцией $g(\psi(t)) = 1 - 2t < 0$, $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ и управлением $v(t) = -1$.

Точка $t = \frac{1}{2}$ является особой: $g(\psi(\frac{1}{2})) = 0$, и дальнейшее решение для $t \in [0, \frac{1}{2}]$ является скользящим режимом $\psi(t) = 1$ ($g(\psi(t)) = 0$) с управлением $v(t) = 1$. Этот режим является устойчивым, т.е. уравнение (15) имеет для $t \in [0, \frac{1}{2})$ единственное решение $\psi(t) = 1$.

В результате на выходе процедуры получаем управление

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ -1, & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

с улучшением по функционалу $\Phi(v) = -\frac{5}{4} < \Phi(u)$.

Таким образом, в данном примере результаты, связанные с альтернативной формулой приращения (14), показывают свою эффективность.

Заключение

Полученные соотношения позволяют установить дополнительные варианты использования точных формул приращения в теории оптимального управления. Приведенные примеры демонстрируют на простейшем уровне технику реализации новых условий оптимальности и их взаимодействие с принципом максимума.

Дальнейшее продвижение необходимо в направлении достаточных условий, а также в обобщении подхода и результатов на другие классы систем и задач.

Литература

1. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20, № 10. С. 1320–1334.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. Москва: Наука, 1973. 256 с.

4. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1376–1384.
5. Любушин А. А., Черноусько Ф. Л. Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 147–159.
6. Срочко В. А., Антоник В. Г. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала // Известия вузов. Математика. 2014. № 8. С. 96–102.
7. Аргучинцев А. В. Решение задач оптимального управления начальными краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения // Известия вузов. Математика. 2002. № 12. С. 23–29.
8. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
9. Погодаев Н. И., Старицын М. В. Точные формулы приращения функционала и необходимые условия оптимальности, альтернативные принципу Понтрягина // Матем. сборник. 2024. Т. 215, № 6. С. 77–110. <https://doi.org/10.4213/sm9967>.
10. Погодаев Н. И., Самсонюк О. Н., Старицын М. В. О точной форме позиционного принципа минимума В. А. Дыхты в нелинейных задачах управления // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2025. Т. 54. С. 48–63. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.48>.

Статья поступила в редакцию 29.08.2026; одобрена после рецензирования 10.09.2026; принята к публикации 17.09.2026.

EXACT FORMULAS FOR THE INCREMENT OF THE
FUNCTIONAL AND NON-LOCAL OPTIMALITY CONDITIONS
IN A LINEAR-QUADRATIC CONTROL PROBLEM

Vladimir A. Srochko

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Irkutsk State University
1, K. Marx str., Irkutsk, 664003, Russia

Elena V. Akseniyushkina

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Baikal State University
11 Lenin Street, Irkutsk, 664003, Russia

Abstract. A linear-quadratic optimal control problem with respect to the phase variable is considered in a general nonconvex setting. A well-known exact (without remainder terms) functional increment formula is used in an unconventional way to obtain the required optimality condition. This condition, unlike Pontryagin's maximum principle, is nonlocal and uses the Gabasov matrix function as the second adjoint variable. This condition has the potential to improve controls satisfying Pontryagin's maximum principle. Its implementation involves solving the Cauchy problem for a phase-domain system with positional control from the operation to maximize the Pontryagin function.

For the linear version of the problem, a second increment formula is used, which generates an optimality condition based on the adjoint system with positional control. The effectiveness of this condition is confirmed by an example.

Keywords: linear-quadratic problem, exact increment formulas, necessary optimality conditions, positional controls.

For citation

Srochko V. A., Akseniyushkina E. V. Exact Formulas for the Increment of the Functional and Non-Local Optimality Conditions in a Linear-Quadratic Control Problem. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics.* 2026. N. 3. P. 39–52.

The article was submitted 29.08.2026; approved after reviewing 10.09.2026; accepted for publication 17.09.2026.