

Научная статья

УДК 519.8

DOI: 10.18101/2304-5728-2026-3-67-79

О РАЗРАБОТКЕ ЗАМКНУТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ В РЕГИОНЕ

© **Дырхеев Константин Павлович**

кандидат экономических наук, доцент,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4

dkonst86@gmail.com

© **Балагуров Владислав Сергеевич**

аспирант,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4

balagur4ik97@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются проблемы построения межотраслевых моделей региональной экономической системы в динамической постановке. В большинстве случаев такого рода модели решаются поэтапно: сначала в виде системы однородных, а затем неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Обосновывается целесообразность непосредственного включения вектора непродовольственного потребления в систему межотраслевых связей в регионе в целях получения замкнутой динамической межотраслевой модели. Через норму сбережения в региональном доходе и удельные показатели добавленной стоимости потребительские расходы домашних хозяйств увязаны со структурой валовых выпусков в регионе. Решаемая как система однородных дифференциальных уравнений замкнутая межотраслевая модель динамики позволяет получать результаты, демонстрирующие сбалансированный и устойчивый рост макроэкономических показателей в регионе при неизменной отраслевой структуре производства и использования продуктов и услуг.

Ключевые слова: межотраслевые связи, замкнутая модель, регион, динамическая система, эндогенный вектор, однородные дифференциальные уравнения, непродовольственное потребление, корни характеристического уравнения, собственный вектор, межотраслевая структура.

Для цитирования

Дырхеев К. П., Балагуров В. С. О разработке замкнутой динамической модели межотраслевых связей в регионе // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2026. № 3. С. 67–79.

Введение

Начиная с первоначальных работ В. Леонтьева [1] проблемы динамического моделирования межотраслевых связей в экономике в разное время решались в работах М. Моришимы [2], А. Г. Гранберга [3], Н. П. Деметьева [4], Р. Миллера [6] и других авторов [7; 8]. Освещались и экспериментально разрабатывались региональные аспекты данной проблемы [9–11].

Методология построения динамических межотраслевых моделей основывается на формировании системы линейных дифференциальных уравнений с поэтапным их решением. Сначала определяется общее решение однородной системы уравнений, описывающих динамику замкнутой межотраслевой системы. Затем находится частное решение неоднородной системы уравнений с подключением функции непроизводственного потребления, темпы роста которого определяют характер траекторий вектора валовых выпусков и конечных региональных продуктов.

В экономическом смысле наиболее обоснованным представляется подход к обеспечению замкнутости формируемой межотраслевой модели с непосредственным включением вектора непроизводственного потребления в региональную систему межотраслевых связей. Получаемая замкнутая межотраслевая модель динамики решается в виде системы однородных дифференциальных уравнений, позволяет рассчитывать варианты сбалансированного и устойчивого роста всех макроэкономических показателей с неизменной отраслевой структурой производства в регионе.

1 Постановка задачи

Возьмем за основу линейную межотраслевую модель экономики некоторой территории (региона)

$$X = AX + Y, \quad (1)$$

где $X = (x_i)$, $Y = (y_i)$, $i = 1, \dots, n$ — векторы валовых выпусков и конечного потребления (конечного спроса) в регионе, n — число «чистых» отраслей или по методологии системы национальных счетов число видов экономической деятельности; $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ — матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

Считаем, что матрица A является продуктивной. В таком случае в целом межотраслевая модель является продуктивной, то есть существует такой вектор $X > 0$, что обеспечивается условие $X > AX$ или

$$(E - A)X = Y > 0.$$

Тогда для любого положительного вектора конечного спроса Y имеется положительное решение, равное

$$X = (E - A)^{-1}Y, \quad (2)$$

где матричный мультипликатор $(E - A)^{-1}$ содержательно представляет собой матрицу полных производственных затрат.

Межотраслевые модели в *динамической постановке* позволяют оценивать в среднесрочной перспективе изменение региональных показателей с учетом полного использования производственных ресурсов. В такого рода моделях выделяются две основные части конечного потребления — вектор производственного накопления $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ и вектор непроизводственного потребления домашних хозяйств $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$. С введением фактора времени t межотраслевая модель (1) предстает в виде:

$$X(t) = AX(t) + U(t) + C(t).$$

Динамический аспект данной межотраслевой модели связан с вектором $U(t)$, который определяется матрицей коэффициентов капиталоемкости приростов производства $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$. Коэффициенты матрицы B означают затраты производственного накопления на единицу прироста соответствующих видов валовых выпусков, а вектор производственного накопления записывается как

$$U(t) = B \frac{dX(t)}{dt},$$

где $\frac{dX(t)}{dt} = \left(\frac{dx_j(t)}{dt} \right)$ — вектор-столбец абсолютных приростов валовых выпусков ($j = 1, \dots, n$).

В целом межотраслевая модель в динамической постановке, известная как динамическая модель В. Леонтьева, предстает в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t). \quad (3)$$

Поскольку в соответствии с (2) имеем соотношение

$$\frac{dX(t)}{dt} = (E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt},$$

то вместо (3) можно исследовать систему дифференциальных уравнений

$$Y(t) = B \frac{dX(t)}{dt} + C(t). \quad (4)$$

После вычисления значений вектора $Y(t)$ могут определяться вектора валовых выпусков и промежуточного потребления:

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t), \quad AX(t) = A(E - A)^{-1} Y(t).$$

В системе (4) вектор производственного накопления преобразуется следующим образом:

$$U(t) = B \frac{dX(t)}{dt} = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt},$$

где $B(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полной капиталоемкости, означающих полные затраты производственного накопления на единицу прироста соответствующих видов конечного регионального продукта.

В таком случае в исследовании динамической межотраслевой модели можно сосредоточиться на решении следующей системы дифференциальных уравнений:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t). \quad (5)$$

На первом этапе решается однородная система уравнений при гипотетическом варианте, когда $C(t) = 0$. В таком случае исследуется динамика замкнутой межотраслевой модели с определением соответствующей отраслевой структуры производства и вычислением потенциально возможного *технологического темпа прироста*, который условно обозначим как $\hat{\delta}$.

На следующем этапе вводится функция $C(t) = C(0)e^{rt}$, в которой экзогенная величина агрегированного темпа прироста r определяет характер траекторий валовых выпусков и конечного продукта в регионе. Модель становится открытой и реализуется путем нахождения частного решения неоднородной системы уравнений.

На наш взгляд, более обоснованной в экономическом смысле представляется схема, при которой функция $C(t)$ непосредственно увязывается через норму сбережений с региональным доходом, который, в свою очередь, функционально связан с динамикой отраслевых валовых выпусков. Динамическая межотраслевая модель становится при этом замкнутой и эндогенной. Обоснование подобного подхода было рассмотрено в ряде работ [5; 6]. Более детальную реализацию данной методической схемы рассмотрим ниже.

2 Преобразование вектора непроеизводственного потребления

Для приведения открытой динамической межотраслевой модели (5) к замкнутому виду будем исходить из предположения, что конечный потребительский спрос пропорционален доходам домашних хозяйств, которые, в свою очередь, формируются в процессе производства продуктов и услуг. В связи с этим известен подход японского исследователя Миядзавы, который занимался разработкой многосекторного мультипликатора доходов применительно к статической модели межотраслевого баланса [6]. Имеются подобные экспериментальные разработки и прикладные модели на региональном уровне [11].

Согласно данного подхода все домашние хозяйства разделены на m групп по характеру получаемых доходов («доходные группы»). Если вектор $C = (c_1, \dots, c_n)$ — это набор потребительских благ всех домашних хозяйств, тогда каждый элемент этого вектора определяется как

$$c_i = \sum_{k=1}^m c_{ik}, (i=1, \dots, n),$$

где c_{ik} — потребление i -го продукта (или услуги) k -й доходной группой домашних хозяйств.

Для нашего исследования несущественно количество доходных групп, поэтому для простоты анализа рассмотрим все домашние хозяйства региона в целом без группового разбиения. Формально все они есть одна большая доходная группа. Разумеется, в дальнейшем исследовании можно усложнить задачу, разбив домашние хозяйства на несколько групп.

Пусть c есть агрегированный показатель непроизводственного потребления домашних хозяйств региона: $c = \sum_{i=1}^n c_i$. Для начального периода можно определить структуру потребления домашними хозяйствами различных благ:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{c}, (i=1, \dots, n), \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

В дальнейшем анализе данную структуру потребления примем неизменной. Тогда имеем вектор непроизводственного потребления

$$C = (c_1, \dots, c_n)^T = (\alpha_1 c, \dots, \alpha_n c)^T. \quad (6)$$

Покажем зависимость агрегированного показателя потребления от агрегированного регионального дохода и от валового выпуска в отраслевом разрезе $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Матричную модель межотраслевого баланса (1) распишем в развернутом виде по схемам:

а) *первого и второго квадрантов* (по строкам — использование по i -м отраслям валовых выпусков продуктов и услуг на промежуточное потребление и конечное потребление):

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i + c_i, (i=1, \dots, n);$$

б) *первого и третьего квадрантов* (по столбцам — стоимостная структура по каждой j -й отрасли выпускаемых продуктов и услуг, включая промежуточные затраты и валовую добавленную стоимость z_j):

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j + z_j, (j=1, \dots, n). \quad (7)$$

Просуммируем валовые выпуски в соответствующих уравнениях:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n c_i, (i=1, \dots, n);$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n z_j, \quad (j=1, \dots, n).$$

Поскольку $x_i = x_j$ ($i = j$), то $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j$.

А так как $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j$, то $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n z_j = y$.

Таким образом, показатель y представляет собой на региональном уровне как валовой региональный продукт, так и валовой региональный доход. Рассчитывается этот агрегированный показатель, согласно экономической теории, двояким образом: по конечным расходам $\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$ и по доходам в виде суммы добавленных стоимостей, создаваемых в отраслях $\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)$.

Вернемся к формуле (6). Расходы регионального дохода на непроектное потребление регулируются с помощью нормы сбережений (или нормы накопления) s :

$$c = y - u = y - s \cdot y = (1 - s)y.$$

Тогда вектор потребления домашних хозяйств

$$C = (\alpha_1 c, \dots, \alpha_n c)^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T (1 - s)y.$$

В свою очередь, $y = \sum_{j=1}^n z_j$, а с учетом (7) имеем

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = \left(1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}\right) x_j, \quad (j=1, \dots, n) \Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^n a_{ij} = \frac{z_j}{x_j} = v_j,$$

где v_j — показатель добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции в отрасли j . Отсюда

$$y = \sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n v_j x_j = \langle V, X \rangle,$$

где $V = (v_1, \dots, v_n)$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Таким образом, вектор непроектного потребления выражается в виде

$$C = (1 - s) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \cdot (v_1, \dots, v_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Обозначим через

$$G = (1 - s) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} (1 - s)\alpha_1 v_1 & \dots & (1 - s)\alpha_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - s)\alpha_n v_1 & \dots & (1 - s)\alpha_n v_n \end{pmatrix}.$$

В таком случае вектор непродовственного потребления домашних хозяйств запишется в виде $C = G \cdot X$.

Каждый из элементов квадратной матрицы G представляет собой удельное потребление i -го продукта (услуги) в расчете на 1 денежную единицу стоимости валового выпуска в j -й отрасли ($i, j = 1, \dots, n$).

3 Замкнутая межотраслевая модель динамики с эндогенными переменными вектора непродовственного потребления

После преобразований, связанных с вектором непродовственного потребления домашних хозяйств, система дифференциальных уравнений (3) выглядит таким образом:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + GX(t). \quad (8)$$

Преобразуем систему (8), опустив при этом обозначение времени t . Получаем в результате систему *однородных уравнений*

$$X = (E - A - G)^{-1} BX'. \quad (9)$$

Обозначим через $H = (E - A - G)^{-1} B$. В получившейся замкнутой межотраслевой модели динамики квадратная матрица H представляет собой матрицу полной отраслевой капиталоемкости валового выпуска с учетом матриц A и G .

Систему (9) запишем в виде $X = HX'$, где $X = X(t)$, $X' = \frac{dX(t)}{dt}$.

Будем искать частное решение системы (9) в виде функций

$$x_1 = \theta_1 \cdot e^{\lambda t}, \dots, x_n = \theta_n \cdot e^{\lambda t}, \quad (10)$$

где $\theta_1, \dots, \theta_n$ — постоянные величины, которые надо подобрать так, чтобы функции (10) удовлетворяли системе (9). Подставив эти функции в систему (9) и разделив на $e^{\lambda t}$ с учетом того, что $e^{\lambda t} \neq 0$, получим систему уравнений:

$$\theta = \lambda H \theta,$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, $H = (h_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$.

Отсюда получаем однородную систему n алгебраических уравнений с неизвестными $\theta_1, \dots, \theta_n$:

$$(E - \lambda H) \theta = 0. \quad (11)$$

Решая характеристическое уравнение n -го порядка $\det(E - \lambda H) = 0$, находим его корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и для каждого корня λ_j напишем систему

$$(E - \lambda_j H) \theta_j = 0. \quad (12)$$

В результате определим соответствующие корням λ_j собственные векторы матрицы H , т. е. нетривиальные решения системы однородных уравнений (12):

$$\theta_j = (\theta_{1j}, \dots, \theta_{nj})^T, \quad j = 1, \dots, n,$$

для которых получим функции, образующие фундаментальную систему:

$$x_1^{(j)} = \theta_{1j} \cdot e^{\lambda_j t}, \dots, x_n^{(j)} = \theta_{nj} \cdot e^{\lambda_j t}, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Тогда общее решение системы (9) запишется в виде

$$X(t) = \sum_{j=1}^n q_j \theta_j e^{\lambda_j t}, \quad (13)$$

где q_j — неопределенные постоянные, которые однозначно определяют-ся из начального условия

$$\sum_{j=1}^n q_j \theta_j = X(0),$$

то есть из системы n линейных уравнений относительно $q_1, \dots, q_n$, имею-щей единственное решение.

4 Пример реализации замкнутой межотраслевой модели динамики с двумя отраслями

Рассмотрим условный пример динамической межотраслевой модели с двумя агрегированными отраслями.

Исходными данными являются:

- матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.44 \\ 0.38 & 0.18 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

- матрица коэффициентов приростной капиталоемкости

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.61 \\ 1.04 & 0.84 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

- вектор валовых выпусков

$$X(0) = (160, 120)^T;$$

- норма сбережений домашних хозяйств $s_0 = s(0) = 0.22$;

- структура непродовольственного потребления различных благ

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0.62, 0.38)^T, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Процедура вычисления матрицы H :

$$\begin{aligned} G &= (1 - s_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 0.2225 & 0.1838 \\ 0.1363 & 0.1126 \end{pmatrix}, \\ (E - A - G)^{-1} &= \begin{pmatrix} 6.1643 & 5.4358 \\ 4.4997 & 5.3816 \end{pmatrix}, \\ H &= (E - A - G)^{-1} B = \begin{pmatrix} 9.5984 & 8.3263 \\ 8.4766 & 7.2653 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с (9), (10), (11) получаем для двух отраслей *замкнутую межотраслевую модель* $X = HX'$ и однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 - 9.5984 \cdot \lambda & -8.3263 \cdot \lambda \\ -8.4766 \cdot \lambda & 1 - 7.2653 \cdot \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразований имеем характеристическое уравнение и его вычисленные корни:

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda H) &= 0 \Rightarrow \lambda^2 + 19.9911 \cdot \lambda - 1.18545 = 0; \\ \lambda_1 &\approx 0,059, \quad \lambda_2 \approx -20,050. \end{aligned}$$

Корни — действительные и различные. Для каждого из них в соответствии с (12) получаем однородные системы уравнений и соответствующие собственные векторы матрицы H :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \approx 0,059 &\Rightarrow \begin{cases} 0.4325 \cdot \theta_{11} - 0.4923 \cdot \theta_{21} = 0, \\ -0.5012 \cdot \theta_{11} + 0.5704 \cdot \theta_{21} = 0, \end{cases} \\ \lambda_2 \approx -20,050 &\Rightarrow \begin{cases} 193,45 \cdot \theta_{12} + 166,94 \cdot \theta_{22} = 0, \\ 169,96 \cdot \theta_{12} + 146,67 \cdot \theta_{22} = 0, \end{cases} \\ \theta_1 &= \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0,879 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ -1,159 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (13), запишется в виде

$$X(t) = q_1 \theta_1 e^{\lambda_1 t} + q_2 \theta_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Неопределенные постоянные величины q_1, q_2 определим из начального условия

$$q_1 \theta_1 + q_2 \theta_2 = X(0) \Rightarrow q_1 \approx 149.9, \quad q_2 \approx 10.1.$$

После нормировки коэффициентов получаем окончательное решение:

$$X(t) = 281.6 \begin{pmatrix} 0.532 \\ 0.468 \end{pmatrix} e^{0.059t} + 10.1 \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.159 \end{pmatrix} e^{-20.050t}. \quad (17)$$

Очевидно, что второе слагаемое в выражении (17) при $t \rightarrow \infty$ очень быстро стремится к нулю. Поэтому темп прироста валового выпуска и его отраслевая структура также быстро приближаются соответственно к значениям λ_1 и $q_1\theta_1$.

Поскольку матрица $H = (E - A - G)^{-1}B$ имеет строго положительные элементы (16), то согласно соответствующей теореме она имеет так называемый корень Фробениуса — Перрона $\hat{\rho} = \hat{\rho}(H)$ — положительное собственное значение, превосходящее по модулю все остальные собственные значения этой матрицы. Этому $\hat{\rho}$ соответствует строго положительный собственный вектор θ_1 .

Действительно, из расчетов по формуле

$$\det(H - \rho \cdot E) = 0$$

имеем характеристическое уравнение и его решение:

$$\rho^2 - 16.8637 \cdot \rho - 0.8436 = 0 \Rightarrow \rho_1 \approx 16.914, \rho_2 \approx -0.050.$$

Корень Фробениуса — Перрона $\hat{\rho} = \rho_1 \approx 16.914$. Соответствующий ему собственный вектор θ_1 имеет положительные компоненты, в то время как собственный вектор θ_2 , соответствующий корню $\rho_2 \neq \hat{\rho}$, имеет компоненты различных знаков.

При этом корень $\hat{\rho}$ в соответствии с теорией неотрицательных матриц заключен между минимальной и максимальной суммами элементов столбцов матрицы H , представленной в (16):

$$15.6 < \hat{\rho} < 18.1.$$

В то же время $\frac{1}{\hat{\rho}} \approx 0.059 \approx \lambda_1$. Напомним: λ_1 — показатель экспоненты в первом слагаемом формулы (17).

Обозначим $\hat{\lambda} = \lambda_1$ и, сравнив этот показатель ($\hat{\lambda} \approx 0.059$) с обратными значениями сумм столбцов матрицы H , получим:

$$0.055 < \hat{\lambda} < 0.064.$$

Таким образом, получается, что показатель экспоненты $\hat{\lambda}$ есть обратная величина к некоторой средней из суммарных показателей столбцов матрицы $H = (E - A - G)^{-1}B$, матрицы, характеризующей полную отраслевую капиталоемкость валовых выпусков.

Аналогичным образом рассчитывается упомянутый в первом разделе *технологический темп прироста* $\hat{\delta}$, получаемый на основе решения системы (5) для вектора $Y(t)$ при $C(t) = 0$. По расчетам на основе исходных данных (14) и (15) $\hat{\delta} \approx 0.268$.

При сопоставлении $\hat{\lambda}$ и $\hat{\delta}$ становится очевидной их взаимная пропорциональность, коэффициентом которой является неизменная с начального периода агрегированная норма сбережений домашних хозяйств $s_0 = 0.22$. Таким образом, устанавливаем, что в пределе $\hat{\lambda} = s_0 \cdot \hat{\delta}$. Именно при таком темпе прироста макроэкономических показателей $\hat{\lambda}$ следует ожидать сбалансированную межотраслевую динамику всех макроэкономических показателей с неизменной отраслевой структурой и фиксированными значениями нормы сбережений, отраслевых коэффициентов материалоемкости и капиталоемкости.

Заключение

В целях обеспечения сбалансированной динамики замкнутой межотраслевой модели региона обоснована целесообразность непосредственного включения вектора непродовольственного потребления в систему межотраслевых связей региона.

Установлена и смоделирована функциональная связь вектора потребительских расходов домашних хозяйств с региональным доходом с учетом нормы сбережений, в конечном счете — с вектором валовых выпусков с использованием отраслевых коэффициентов удельных добавленных стоимостей.

В результате построена замкнутая межотраслевая модель динамики с встроенным вектором эндогенных переменных непродовольственного потребления, решаемая как система однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Проведена расчетная реализация замкнутой межотраслевой модели динамики с определением темпа прироста, пропорционального норме сбережений и потенциальному технологическому темпу прироста с соответствующей отраслевой структурой, отраслевыми коэффициентами материалоемкости и капиталоемкости.

Литература

1. Леонтьев В. Межотраслевая экономика. Москва: Экономика, 1997. 477 с.
2. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. (Многоотраслевой анализ). Москва: Наука, 1972. 280 с.
3. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. Москва: Экономика, 1985. 240 с.
4. Дементьев Н. П. Магистральные свойства моделей экономической динамики с потреблением. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 168 с.
5. Математическая экономика на персональном компьютере: перевод с японского / М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ; под редакцией М. Кубонива. Москва: Финансы и статистика, 1991. 304 с.
6. Ronald E. Miller and Peter D. Blair. Input-Output Analysis. Foundations and Extensions. Second Edition. Cambridge University Press. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2009. P. 271–278.
7. Баранов А. О., Павлов В. Н. Построение и использование в анализе и прогнозировании динамических межотраслевых моделей: учебное пособие / Новосибирск, 2013. 166 с.
8. Методические проблемы формирования информационной базы динамической межотраслевой модели экономики Республики Бурятия / А. О. Баранов, З. Б.-Д. Дондоков, К. П. Дырхеев [и др.] // Регион: экономика и социология. 2016. № 4 (92). С. 47–68.
9. Серебряков Г. Р., Узяков М. Н., Янговский А. А. Межотраслевая модель экономики Ивановской области // Проблемы прогнозирования. 2005. № 2. С. 64–74.
10. Булдаев А. С., Дырхеев К. П. Моделирование и оптимизация межотраслевой экономики региона // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 3. С. 14–27.
11. Дондоков З. Б.-Д., Дырхеев К. П. Межотраслевые модели с расширенным составом эндогенных переменных // Вестник Бурятского государственного университета. Экономика. Право. 2014. № 2. С. 3–5.

Статья поступила в редакцию 30.08.2026; одобрена после рецензирования 10.09.2026; принята к публикации 17.09.2026.

ON THE DEVELOPMENT OF A CLOSED DYNAMIC MODEL
OF INTER-INDUSTRY RELATIONS IN THE REGION

Konstantin P. Dyrkheev

Cand. Sci (Economic), Associate Professor,
Banzarov Buryat State University
4 Ranzhurov St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vladislav S. Balagurov

Graduate Student,
Banzarov Buryat State University
4 Ranzhurov St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. The article examines the problems of constructing inter-industry models of a regional economic system in a dynamic setting. In most cases, such models are solved in stages, first as a system of homogeneous and then non-homogeneous linear differential equations with constant coefficients. The feasibility of directly including the vector of non-production consumption into the system of inter-industry links in the region is substantiated in order to obtain a closed dynamic inter-industry model. Through the savings rate in regional income and specific indicators of added value, household consumer spending is linked to the structure of gross output in the region. Solved as a system of homogeneous differential equations, the closed inter-industry dynamics model allows us to obtain results demonstrating balanced and sustainable growth of macroeconomic indicators in the region with an unchanged sectoral structure of production and use of products and services.

Keywords: inter-industry links, closed model, region, dynamic system, endogenous vector, homogeneous differential equations, non-production consumption, roots of the characteristic equation, eigenvector, inter-industry structure.

For citation

Dyrkheev K. P., Balagurov V. S. On the Development of a Closed Dynamic Model of Inter-Industry Relations in the Region. Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2026. N. 3. P. 67–79.

The article was submitted 30.08.2026; approved after reviewing 10.09.2026; accepted for publication 17.09.2026.