УДК 519.62, 519
doi: 10.18101/2304-5728-2016-4-61-68

© А. Д. Мижидон, А.В. Харахинов

Частотное уравнение для балки Тимошенко с упруго прикреплённым телом с двумя степенями свободы [1]

В работе для механической системы, состоящей из твердого тела с двумя степенями свободы, прикрепленного с помощью двух пружин к балке Тимошенко производится построение частотного уравнения. Рассматриваемая система описывается гибридной системой дифференциальных уравнений, которая с помощью гармонической подстановки сводится к алгебраическо-дифференциальной системе относительно амплитудных параметров. Частотное уравнение получено на основании, рассмотрения условий существования решений краевой задачи для алгебраическо-дифференциальной системы.

Ключевые слова: частотное уравнение, балка Тимошенко, гибридная система дифференциальных уравнений, краевая задача.

© A. D. Mizhidon, A. V. Kharakhinov

A frequency equation of a Timoshenko beam carrying a two-degree of freedom spring-mass system

In paper construct a frequency equation for a mechanical system that consist of a rigid two degree of freedom mass that was attached by two springs to the Timoshenko beam. The system that we considered described a hybrid system of differential equations that with help a harmonic substitute transform into an algebraic-differential system relatively amplitude parameters. The frequency equation was obtained by review of conditions of the solution existence of the boundary problem for the algebraic differential equation.

Key words: eigenvalue problem, Timoshenko beam, hybrid system of differential equations, boundary problem.

Введение

В работе [1] рассматривалась механическая система (рис.1), состоящая из твердого тела с двумя степенями свободы, прикрепленного с помощью двух пружин к балке Тимошенко.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-08-00973а

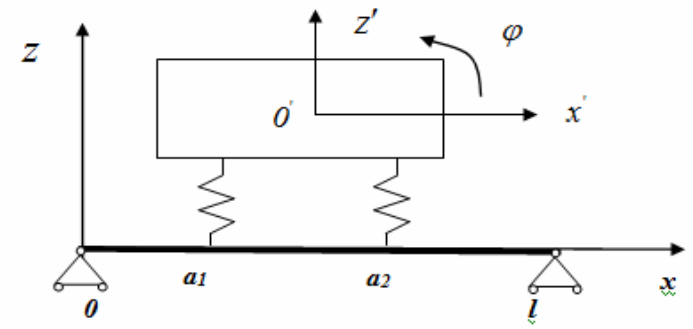

Рис. 1. Механическая система «упругая балка с телом, установленным на двух пружинах»

Для данной системы на основании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского построена математическая модель в виде гибридной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c_1(z - d_1\varphi - u(a_1,t)) + c_2(z + d_2\varphi - u(a_2,t)) = 0, \\ \quad I_\varphi\ddot{\varphi} - c_1 d_1(z - d_1\varphi - u(a_1,t)) + c_2 d_2(z + d_2\varphi - u(a_2,t)) = 0, \\ EI\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - EI\dfrac{\partial^3\beta(x,t)}{\partial x^3} - \rho I\dfrac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\partial t^2} + \rho I\dfrac{\partial^3\beta(x,t)}{\partial x\partial t^2} + \\ +\rho F\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c_1(z - d_1\varphi - u(x,t))\delta(x - a_1) + \\ \qquad\qquad + c_2(z + d_2\varphi - u(x,t))\delta(x - a_2), \\ EI\dfrac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} - EI\dfrac{\partial^2\beta(x,t)}{\partial x^2} - \rho I\dfrac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\partial t^2} + \rho I\dfrac{\partial^2\beta(x,t)}{\partial t^2} + \chi GF\beta(x,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, c_1, c_2, d_1, d_2, I_\varphi, E.I, \rho, F, \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, a_1, a_2, \chi, G, F$ – параметры системы [1]; z, φ – соответственно поступательное и угловое отклонения тела; $u(x,t)$ – поперечное смещение точек балки с координатой x в момент времени t; $\beta(x,t)$ – угол сдвига.

Решение системы (1) понимается в обобщенном смысле [1].

На функции $u(x,t)$ и $\beta(x,t)$ наложены некоторые граничные условия, соответствующие условиям закрепления на концах балки:

$$\Gamma_1(u(0,t),\beta(0,t)) = 0, \qquad \Gamma_2(u(l,t),\beta(l,t)) = 0\,. \tag{2}$$

В данной статье для механической системы, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2) производится построение частотного уравнения.

1. Постановка задачи

Подставив в систему (1) функции $z(t)$, $\varphi(t)$, $u(x,t)$, $\beta(x,t)$, в виде $z(t) = Z\sin\omega t$, $\varphi(t) = Z_\varphi\sin\omega t$, $u(x,t) = V(x)\sin\omega t$, $\beta(x,t) = B(x)\sin\omega t$,

получим алгебраическо-дифференциальную систему уравнений (3) относительно амплитудных параметров системы Z, Z_φ, $V(x)$, $B(x)$:

$$\begin{cases} -mA\omega^2 + c_1(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + c_2(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)) = 0, \\ -I_\varphi A_\varphi \omega^2 - c_1 d_1 (Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + c_2 d_2 (Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)) = 0, \\ \dfrac{d^4 V(x)}{dx^4} - \dfrac{d^3 B(x)}{dx^3} + \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{d^2 V(x)}{dx^2} - \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{dB(x)}{dx} - \dfrac{pF\omega^2}{EI}V(x) = \\ = \dfrac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(x))\delta(x - a_1) + \dfrac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(x))\delta(x - a_2), \\ \dfrac{d^3 V(x)}{dx^3} - \dfrac{d^2 B(x)}{dx^2} + \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{dV(x)}{dx} - \dfrac{p\omega^2}{E}B(x) + \dfrac{\chi GF}{EI}B(x) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, функции $V(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют граничным условиям соответствующим граничным условиям (2), накладываемым на функции $u(x,t)$ и $\beta(x,t)$:

$$\gamma_1(V(0), B(0)) = 0, \qquad \gamma_2(V(l), B(l)) = 0\,. \tag{4}$$

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если вектора Z, Z_φ, функции $V(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют алгебраическо-дифференциальной системе уравнений (3), функции $V(x)$ и $B(x)$ граничным условиям (4), то для функций $V(x)$ и $B(x)$ справедливо представление

$$\begin{cases} V(x) = G_1(x - a_1)\dfrac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + G_2(x - a_2)\dfrac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)), \\ B(x) = B_1(x - a_1)\dfrac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + B_2(x - a_2)\dfrac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)), \end{cases} \tag{5}$$

где функции $V_i(x), B_i(x)$, $(i = 1,2)$ являются обобщенными решениям системы

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 G_i(x)}{dx^4} - \dfrac{d^3 B_i(x)}{dx^3} + \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{d^2 G_i(x)}{dx^2} - \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{dB_i(x)}{dx} - \dfrac{pF\omega^2}{EI}G_i(x) = \delta(x), \\ \dfrac{d^3 G_i(x)}{dx^3} - \dfrac{d^2 B_i(x)}{dx^2} + \dfrac{p\omega^2}{E}\dfrac{dG_i(x)}{dx} - \dfrac{p\omega^2}{E}B_i(x) + \dfrac{\chi GF}{EI}B_i(x) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$\gamma_1(G_i(-a_i), B_i(-a_i)) = 0, \qquad \gamma_2(G_i(l - a_i), B_i(l - a_i)) = 0\,. \tag{7}$$

Требуется определить условие, из которых находятся частоты ϖ, при которых существует решение алгебраическо-дифференциальной системы уравнений (3) с краевыми условиями (4). Заметим, что найденное условие

и будет уравнением собственных частот (частотным уравнением) исходной системы, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2).

2. Частотное уравнение

Исключим из системы (6) переменные $B_i(x)$. Для этого продифференцируем второе уравнение из (6) и отнимем от него первое уравнение системы (6). Полученное соотношение

$$\frac{dB_i(x)}{dx} = -\frac{p\omega^2}{\chi G} G_i(x) - \frac{\delta(x)}{\chi GF} \tag{8}$$

подставим в первое уравнение (6). В результате получим

$$\begin{gathered}\frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} + \left(\frac{p\omega^2}{\chi G} + \frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2 G_i(x)}{dx^2} + \left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE} - \frac{pF\omega^2}{EI}\right) G_i(x) = \\ = \left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\delta(x) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\delta(x)}{dx^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Заметим, решение уравнения (9) понимается в обобщенном смысле. Если $G_i(x)$ некоторое обобщенное решение уравнения (9), то при любой функции $\varphi(x)$ из класса основных функций должно выполняться тождество

$$\begin{gathered}\int_0^l \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} + \left(\frac{p\omega^2}{\chi G} + \frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2 G_i(x)}{dx^2} + \left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE} - \frac{pF\omega^2}{EI}\right) G_i(x)\right)\varphi_i(x)dx = \\ = \int_0^l \int_0^l \sum_{i=1}^2 \left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\delta(x) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\delta(x)}{dx^2}\right)\varphi_i(x)\,dx.\end{gathered}$$

Используя правило дифференцирования обобщенных функций [2] представим последнее выражение в виде

$$\begin{gathered}\int_0^l \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} + \left(\frac{p\omega^2}{\chi G} + \frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2 G_i(x)}{dx^2} + \left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE} - \frac{pF\omega^2}{EI}\right) G_i(x)\right)\varphi_i(x)dx = \\ = \sum_{i=1}^2 \left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\varphi_i(0) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\varphi_i(0)}{dx^2}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, в дальнейшем будем понимать для обобщенного решения уравнения (9) выполнение тождества (10).

Теорема 2. Обобщенное решение уравнения (9) определяется выражением

$$G_i(x) = \left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_i(x) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_i(x)}{dx^2}, \tag{11}$$

где функция $\overline{G}_i(x), (i = 1,2)$ являются обобщённым решением уравнения

$$\frac{d^4\overline{G}_i(x)}{dx^4}+\left(\frac{p\omega^2}{\chi G}+\frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2\overline{G}_i(x)}{dx^2}+\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)\overline{G}_i(x)=\delta(x)\,. \qquad (12)$$

Доказательство. Подставив (11) в левую часть выражения (10), после преобразований получим

$$\int_0^l\sum_{i=1}^2\left(\frac{d^4G_i(x)}{dx^4}+\left(\frac{p\omega^2}{\chi G}+\frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2G_i(x)}{dx^2}+\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)G_i(x)\right)\varphi_i(x)dx=$$

$$=\int_0^l\sum_{i=1}^2\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\left(\frac{d^4\overline{G}_i(x)}{dx^4}+\left(\frac{p\omega^2}{\chi G}+\frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2\overline{G}_i(x)}{dx^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)\overline{G}_i(x)\right)\varphi_i(x)dx-\int_0^l\sum_{i=1}^2\left(\frac{1}{\chi GF}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^4\overline{G}_i(x)}{dx^4}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{p\omega^2}{\chi G}+\frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2\overline{G}_i(x)}{dx^2}+\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)\overline{G}_i(x)\right)\varphi_i(x)dx$$

$$=\int_0^l\sum_{i-1}^2\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\delta(x)\varphi_i(x)-\frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\delta(x))}{dx^2}\varphi_i(x)\right)dx=$$

$$=\sum_{i=1}^2\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\varphi_i(0)-\frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\varphi_i(0)}{dx^2}\right),$$

что совпадает с правой частью (10). Теорема доказана.

Замечание 1. Решение уравнения (9) удовлетворяет некоторым краевым условиям

$$\tilde{\gamma}_1(\overline{G}_i(-a_i),B_i(-a_i))=0,\qquad \tilde{\gamma}_2(\overline{G}_i(l-a_i),B_i(l-a_i))=0\,, \qquad (13)$$

соответствующим краевым условиям (7) системы (6).

Решение уравнения (12) можно найти в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^4\overline{G}_i(x)}{dx^4}+\left(\frac{p\omega^2}{\chi G}+\frac{p\omega^2}{E}\right)\frac{d^2\overline{G}_i(x)}{dx^2}+\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)\overline{G}_i(x)=0 \quad (14)$$

и фундаментального решения уравнения (12). Отметим [3], в качестве фундаментального решения (12) можно взять решение однородного уравнения (14), удовлетворяющее начальным условиям

$$\overline{G}(0)=0,\ \frac{d\overline{G}}{dx}(0)=0,\ \frac{d^2\overline{G}}{dx^2}(0)=0,\ \frac{d^3G}{dx^3}(0)=1\,,$$

умноженное на функцию Хэвисайда $\theta(x)$.

При предположении

$$\left(\frac{pF\omega^2}{\chi GF}+\frac{p\omega^2}{E}\right)^2-4\cdot\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE}-\frac{pF\omega^2}{EI}\right)>0\,,$$

общее обобщенное решение уравнения (12) найдется в виде

$$\overline{G}_j(x) = c_1 \cos\varepsilon x + c_2 \sin\varepsilon x + c_3 e^{-\mu x} + c_4 e^{\mu x} + \theta(x)\frac{1}{\varepsilon^2+\mu^2}\left(\frac{sh\mu x}{\mu} - \frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon}\right),$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\frac{pF\omega^2}{\chi GF} + \frac{p\omega^2}{E} + \sqrt{\left(\frac{pF\omega^2}{\chi GF} + \frac{p\omega^2}{E}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE} - \frac{pF\omega^2}{EI}\right)}}{2}},$$

$$\mu = \sqrt{\frac{-\frac{pF\omega^2}{\chi GF} - \frac{p\omega^2}{E} + \sqrt{\left(\frac{pF\omega^2}{\chi GF} + \frac{p\omega^2}{E}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{p^2\omega^4}{\chi GE} - \frac{pF\omega^2}{EI}\right)}}{2}}.$$

Таким образом, для нахождения обобщенных решений $\overline{G}_1(x), \overline{G}_2(x)$ уравнения (12), удовлетворяющих заданным краевым условиям (13), определим произвольные константы c_1, c_2, c_3, c_4, входящие в общее решение из условий выполнения граничных условий (13).

Подставив (11) в первое выражение из (5) получим

$$\begin{aligned} V(x) = &\left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_1(x-a_1) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_1(x-a_1)}{dx^2}\right)\frac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + \\ &+\left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_2(x-a_2) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_2(x-a_2)}{dx^2}\right)\frac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)). \end{aligned} \tag{15}$$

Подставив последовательно в соотношение (15) $x = a_i$, $i = (\overline{1,2})$, получим систему вида

$$\begin{cases} V(a_1) = \left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_1(0) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_1(0)}{dx^2}\right)\frac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + \\ +\left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_2(a_1-a_2) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_2(a_1-a_2)}{dx^2}\right)\cdot \\ \cdot\frac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)) \\ V(a_2) = \left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_1(a_2-a_1) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_1(a_2-a_1)}{dx^2}\right)\cdot \\ \cdot\frac{c_1}{EI}(Z - d_1 Z_\varphi - V(a_1)) + \left(\left(1 - \frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\overline{G}_2(0) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\overline{G}_2(0)}{dx^2}\right)\cdot \\ \cdot\frac{c_2}{EI}(Z + d_2 Z_\varphi - V(a_2)). \end{cases} \tag{16}$$

Введя обозначения

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{EI}\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\bar{G}_1(0) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\bar{G}_1(0)}{dx^2}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{c_2}{EI}\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\bar{G}_2(a_1-a_2) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\bar{G}_2(a_1-a_2)}{dx^2}\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{c_1}{EI}\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\bar{G}_1(a_2-a_1) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\bar{G}_1(a_2-a_1)}{dx^2}\right),$$

$$\lambda_4 = \frac{c_2}{EI}\left(\left(1-\frac{p\omega^2}{\chi GFE}\right)\bar{G}_2(0) - \frac{1}{\chi GF}\frac{d^2\bar{G}_2(0)}{dx^2}\right),$$

преобразовав, перепишем (16) в виде

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)Z + (\lambda_2 d_2 - \lambda_1 d_1)Z_\varphi - (1+\lambda_1)V(a_1) - \lambda_2 V(a_2) = 0,\\ (\lambda_3+\lambda_4)Z + (\lambda_4 d_2 - \lambda_3 d_1)Z_\varphi - \lambda_3 V(a_1) - (1+\lambda_4)V(a_2) = 0.\end{cases} \tag{17}$$

Объединив первое и второе уравнения системы (3) с системой (17), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $Z, Z_\varphi, V(a_1), V(a_2)$.

$$\begin{cases}(-m\omega^2 + c_1 + c_2)Z - (c_1 d_1 + c_2 d_2)Z_\varphi - c_1 V(a_1) - c_2 V(a_2) = 0,\\ -(c_1 d_1 + c_2 d_2)Z - (I_\varphi \omega^2 - c_1 d_1^2 - c_2 d_2^2)Z_\varphi + c_1 d_1 V(a_1) + c_2 d_2 V(a_2) = 0,\\ (\lambda_1+\lambda_2)Z + (\lambda_2 d_2 - \lambda_1 d_1)Z_\varphi - (1+\lambda_1)V(a_1) - \lambda_2 V(a_2) = 0,\\ (\lambda_3+\lambda_4)Z + (\lambda_4 d_2 - \lambda_3 d_1)Z_\varphi - \lambda_3 V(a_1) - (1+\lambda_4)V(a_2) = 0.\end{cases} \tag{18}$$

Однородная система алгебраических уравнений (18) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (18) к нулю, получим уравнение для нахождения собственных частот

$$\det\begin{bmatrix}(-m\omega^2 + c_1 + c) & -(c_1 d_1 + c_2 d_2) & -c_1 & -c_2\\ -(c_1 d_1 + c_2 d_2) & (-I_\varphi \omega^2 + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) & c_1 d_1 & c_2 d_2\\ (\lambda_1+\lambda_2) & (\lambda_2 d_2 - \lambda_1 d_1) & -(1+\lambda_1) & -\lambda_2 V(a_2)\\ (\lambda_3+\lambda_4) & (\lambda_4 d_2 - \lambda_3 d_1) & -\lambda_3 & (1+\lambda_4)\end{bmatrix} = 0. \tag{19}$$

Заключение

Обосновано построение частотного уравнения (19) для балки Тимошенко с прикрепленным с помощью двух пружин твердым телом с двумя степенями свободы. В целом статья является продолжением исследований, приведенных в [1].

Литература

1. Мижидон А.Д., Харахинов А.В. К исследованию краевой задачи для балки Тимошенко с упруго прикреплённым твёрдым телом // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика.— 2016. — № 1. — С. 88 – 101.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
3. Мижидон А.Д., Мижидон К.А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — Т. 13. — С. 911 – 922.

References

1. Mizhidon A.D., Harahinov A.V. K issledovaniju kraevoj zadachi dlja balki Timoshenko s uprugo prikrepljonnym tvjordym telom // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. — 2016. — № 1. — S. 88 – 101.
2. Vladimirov V.S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike. — M.: Nauka, 1976. — 280 s.
3. Mizhidon A.D., Mizhidon K.A. Sobstvennye znachenija dlja odnoj sistemy gibridnyh differencial'nyh uravnenij // Sibirskie jelektronnye matematicheskie izvestija. — 2016. — T. 13. — S. 911 – 922.

Мижидон Арсалан Дугарович, доктор технических наук, профессор, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Бурятский государственный университет, e-mail: miarsdu@mail.ru.

Харахинов Алдар Владиславович, аспирант, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, e-mail: comma967@gmail.com.

Mizhidon Arsalan Dugarovuch, DSc, professor, East Siberia state university of technology and management, Buryat State University.

Kharakhinov Aldar Vladislavovich, postgraduate student, East Siberia state university of technology and management.